

二〇二三年齐齐哈尔市初中学业考试

数学试卷

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟
2. 全卷共三道大题，总分 120 分
3. 使用答题卡的考生，请将答案填写在答题卡的指定位置

一、选择题（每小题只有一个正确答案，每小题 3 分，满分 30 分）

1. -9 的相反数是【 】

- A. 9 B. -9 C. $\frac{1}{9}$ D. $-\frac{1}{9}$

【答案】A

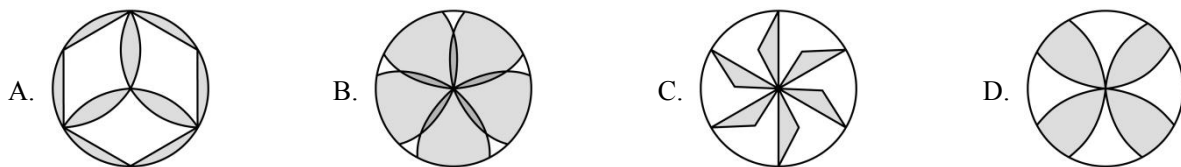
【解析】

【详解】 $\because$ 相反数的定义是：如果两个数只有符号不同，我们称其中一个数为另一个数的相反数，特别地，0 的相反数还是 0.

因此 -9 的相反数是 9.

故选 A.

2. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的定义依次对各项进行分析即可得到最后结果.

【详解】解：A、此图形沿一条直线对折后能够完全重合，此图形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故此选项错误；

B、此图形沿一条直线对折后能够完全重合，此图形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故此选项错误；

C、此图形沿一条直线对折后不能够完全重合，此图形不是轴对称图形，故此选项错误；

D、此图形沿一条直线对折后能够完全重合，此图形是轴对称图形，旋转 180° 能够与原图形重合，是中心对称图形，故此选项正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念，熟练掌握如果一个图形沿着一条直线对折后

两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴，如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心，是解答本题的关键。

3. 下列计算正确的是 ()

- A. $3b^2 + b^2 = 4b^4$ B. $(a^4)^2 = a^6$ C. $(-x^2)^2 = x^4$ D. $3a \cdot 2a = 6a$

【答案】C

【解析】

【分析】根据单项式乘以单项式，幂的乘方，积的乘方，合并同类项，进行计算即可求解。

【详解】解：A. $3b^2 + b^2 = 4b^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $(a^4)^2 = a^8$ ，故该选项不正确，不符合题意；

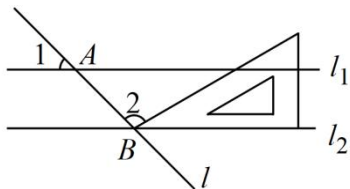
C. $(-x^2)^2 = x^4$ ，故该选项正确，符合题意；

D. $3a \cdot 2a = 6a^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：C.

【点睛】本题考查了单项式乘以单项式，幂的乘方，积的乘方，合并同类项，熟练掌握以上运算法则是解题的关键。

4. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ，分别与直线 l 交于点 A ， B ，把一块含 30° 角的三角尺按如图所示的位置摆放，若 $\angle 1 = 45^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



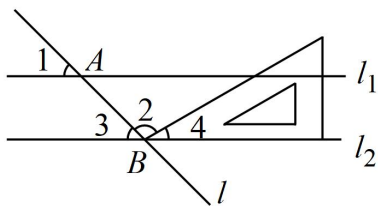
- A. 135° B. 105° C. 95° D. 75°

【答案】B

【解析】

【分析】依据 $l_1 \parallel l_2$ ，即可得到 $\angle 1 = \angle 3 = 45^\circ$ ，再根据 $\angle 4 = 30^\circ$ ，即可得出答案。

【详解】解：如图，



$$\because l_1 \parallel l_2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 45^\circ,$$

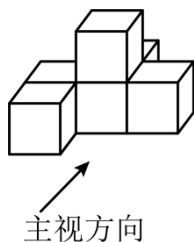
$$\text{又} \because \angle 4 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 - \angle 4 = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ,$$

故选：B.

【点睛】此题主要考查了平行线的性质，解本题的关键是熟记平行线的性质：两直线平行，同位角相等.

5. 如图，若几何体是由六个棱长为 1 的正方体组合而成的，则该几何体左视图的面积是（ ）



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】首先确定该几何体左视图的小正方形数量，然后求解面积即可.

【详解】解：该几何体左视图分上下两层，其中下层有 3 个小正方形，上层中间有 1 个正方形，共计 4 个小正方形，

$\because$ 小正方体的棱长为 1，

$\therefore$ 该几何体左视图的面积为 4，

故选：C.

【点睛】本题考查简单组合体的三视图，理解左视图即为从左边看到的图形是解题关键.

6. 如果关于 x 的分式方程 $\frac{2x-m}{x+1} = 1$ 的解是负数，那么实数 m 的取值范围是（ ）

A. $m < -1$

B. $m > -1$ 且 $m \neq 0$

C. $m > -1$

D. $m < -1$ 且 $m \neq -2$

【答案】D

【解析】

【分析】分式方程两边乘以 $(x+1)$ ，去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，根据分式方程的解是负数，得出不等式，解不等式即可求解.

$$\text{【详解】解：} \frac{2x-m}{x+1} = 1$$

$$2x - m = x + 1$$

解得： $x = m + 1$ 且 $x \neq -1$

$\therefore$ 关于 x 的分式方程 $\frac{2x-m}{x+1} = 1$ 的解是负数，

$\therefore m + 1 < 0$ ，且 $m \neq -2$

$\therefore m < -1$ 且 $m \neq -2$ ，

故选：D.

【点睛】 本题考查了根据分式方程的解的情况求参数，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

7. 某校举办文艺汇演，在主持人选拔环节中，有一名男同学和三名女同学表现优异. 若从以上四名同学中随机抽取两名同学担任主持人，则刚好抽中一名男同学和一名女同学的概率是 ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{6}$

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据列表法求概率即可求解.

【详解】 解：列表如下，

	女1	女2	女3	男
女1		女1, 女2	女1, 女3	女1, 男
女2	女2, 女1		女2, 女3	女2, 男
女3	女3, 女1	女3, 女2		女3, 男
男	男, 女1	男, 女2	男, 女3	

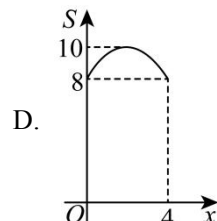
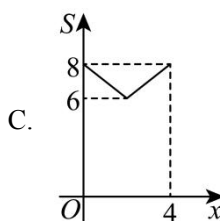
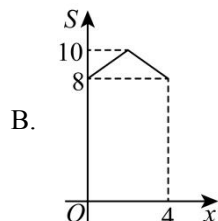
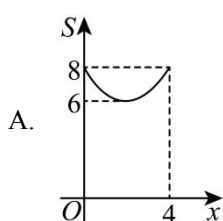
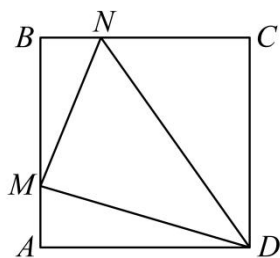
共有 12 种等可能结果，其中符合题意的有 6 种，

$\therefore$ 刚好抽中一名男同学和一名女同学的概率是 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ ，

故选：A.

【点睛】 本题考查了列表法求概率，熟练掌握列表法求概率是解题的关键.

8. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ，动点 M ， N 分别从点 A ， B 同时出发，沿射线 AB ，射线 BC 的方向匀速运动，且速度的大小相等，连接 DM ， MN ， ND . 设点 M 运动的路程为 x ($0 \leq x \leq 4$)， $\triangle DMN$ 的面积为 S ，下列图像中能反映 S 与 x 之间函数关系的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】先根据 $S = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ADM} - S_{\triangle DCN} - S_{\triangle BMN}$ ，求出 S 与 x 之间函数关系式，再判断即可得出结论。

【详解】解： $S = S_{\text{正方形}ABCD} - S_{\triangle ADM} - S_{\triangle DCN} - S_{\triangle BMN}$ ，

$$= 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 4x - \frac{1}{2} \times 4(4-x) - \frac{1}{2}x(4-x),$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 8,$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)^2 + 6,$$

故 S 与 x 之间函数关系为二次函数，图像开口向上， $x=2$ 时，函数有最小值 6，

故选：A.

【点睛】本题考查了正方形的性质，二次函数的图像与性质，本题的关键是求出 S 与 x 之间函数关系式，再判断 S 与 x 之间函数类型。

9. 为提高学生学习兴趣，增强动手实践能力，某校为物理兴趣小组的同学购买了一根长度为 150cm 的导线，将其全部截成 10cm 和 20cm 两种长度的导线用于实验操作（每种长度的导线至少一根），则截取方案共有（ ）

A. 5 种

B. 6 种

C. 7 种

D. 8 种

【答案】C

【解析】

【分析】设 10cm 和 20cm 两种长度的导线分别为 x, y 根，根据题意，得出 $y = \frac{15-x}{2}$ ，进而根据 x, y 为正

整数，即可求解.

【详解】解：设10cm和20cm两种长度的导线分别为 x, y 根，根据题意得，

$$10x + 20y = 150,$$

$$\text{即 } y = \frac{15-x}{2},$$

$\therefore x, y$ 为正整数,

$$\therefore x = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$$

$$\text{则 } y = 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1,$$

故有7种方案,

故选：C.

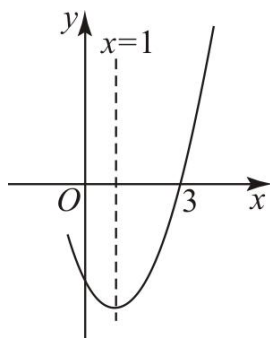
【点睛】本题考查了二元一次方程的应用，根据题意列出方程求整数解是解题的关键.

10. 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图像的一部分与 x 轴的一个交点坐标为 $(3, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，结合图像给出下列结论：

① $abc > 0$ ；② $b = 2a$ ；③ $3a + c = 0$ ；

④关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c + k^2 = 0$ ($a \neq 0$) 有两个不相等的实数根；

⑤若点 (m, y_1) ， $(-m+2, y_2)$ 均在该二次函数图像上，则 $y_1 = y_2$. 其中正确结论的个数是 ()



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线的对称轴、开口方向、与 y 轴的交点确定 a, b, c 的正负，即可判定①和②；将点 $(3, 0)$ 代入抛物线解析式并结合 $b = -2a$ 即可判定③；运用根的判别式并结合 a, c 的正负，判定判别式是否大于零即可判定④；判定点 (m, y_1) ， $(-m+2, y_2)$ 的对称轴为 $x = 1$ ，然后根据抛物线的对称性即可判定⑤.

【详解】解： $\because$ 抛物线开口向上，与 y 轴交于负半轴，

$$\therefore a > 0, c < 0,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1, \text{ 即 } b = -2a < 0, \text{ 即②错误;}$$

$$\therefore abc > 0, \text{ 即①正确,}$$

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 图像的一部分与 x 轴的一个交点坐标为 $(3, 0)$

$$\therefore 9a + 3b + c = 0$$

$$\therefore 9a + 3(-2a) + c = 0, \text{ 即 } 3a + c = 0, \text{ 故③正确;}$$

$$\therefore \text{关于 } x \text{ 的一元二次方程 } ax^2 + bx + c + k^2 = 0 (a \neq 0), \Delta = b^2 - 4a(c + k^2) = b^2 - 4ac - 4ak^2,$$

$$a > 0, c < 0,$$

$$\therefore -4ac > 0, -4ak^2 \leq 0,$$

$\therefore$ 无法判断 $b^2 - 4ac - 4ak^2$ 的正负, 即无法确定关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c + k^2 = 0 (a \neq 0)$ 的根的情况, 故④错误;

$$\therefore \frac{m + (-m + 2)}{2} = 1$$

$\therefore$ 点 $(m, y_1), (-m + 2, y_2)$ 关于直线 $x = 1$ 对称

$\therefore$ 点 $(m, y_1), (-m + 2, y_2)$ 均在该二次函数图像上,

$$\therefore y_1 = y_2, \text{ 即⑤正确;}$$

综上, 正确的为①③⑤, 共 3 个

故选: B.

【点睛】本题考查了二次函数的 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的性质及图像与系数的关系, 能够从图像中准确的获取信息是解题的关键.

二、填空题 (每小题 3 分, 满分 21 分)

11. 经文化和旅游部数据中心测算, 今年春节假期全国国内旅游出游 308000000 人次, 同比增长 23.1%, 数据 308000000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 3.08×10^8

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原

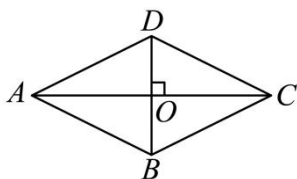
数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解：数据 308000000 用科学记数法表示为 3.08×10^8 .

故答案为： 3.08×10^8 .

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD = BC$ ， $AC \perp BD$ 于点 O . 请添加一个条件：_____，使四边形 $ABCD$ 成为菱形.



【答案】 $AD \parallel BC$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据题意，先证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，根据 $AC \perp BD$ ，可得四边形 $ABCD$ 成为菱形.

【详解】解：添加条件 $AD \parallel BC$

$$\because AD = BC, AD \parallel BC$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\because AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 成为菱形.

添加条件 $AB = CD$

$$\because AD = BC, AB = CD$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\because AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 成为菱形.

添加条件 $OB = OD$

$$\because AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COB = 90^\circ$$

$$\because AD = BC, OB = OD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AOD \cong \text{Rt}\triangle COB (\text{HL})$$

$$\therefore AD = BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 成为菱形.

添加条件 $\angle ADB = \angle CBD$

在 $\triangle AOD$ 与 $\triangle COB$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle CBD \\ \angle AOD = \angle COB \\ AD = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle COB$

$\therefore AD = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\because AC \perp BD$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 成为菱形.

故答案为: $AD \parallel BC$ ($AB = CD$ 或 $OB = OD$ 或 $\angle ADB = \angle CBD$ 等).

【点睛】 本题考查了平行四边形的判定, 菱形的判定, 熟练掌握菱形的判定定理是解题的关键.

13. 在函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{x-2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > 1$ 且 $x \neq 2$

【解析】

【分析】 根据分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件得出 $x-1 > 0, x-2 \neq 0$, 即可求解.

【详解】 解: 依题意, $x-1 > 0, x-2 \neq 0$

$\therefore x > 1$ 且 $x \neq 2$,

故答案为: $x > 1$ 且 $x \neq 2$.

【点睛】 本题考查了求函数自变量的取值范围, 熟练掌握分式有意义的条件, 二次根式有意义的条件是解题的关键.

14. 若圆锥的底面半径长 2cm, 母线长 3cm, 则该圆锥的侧面积为_____ cm^2 (结果保留 π).

【答案】 6π

【解析】

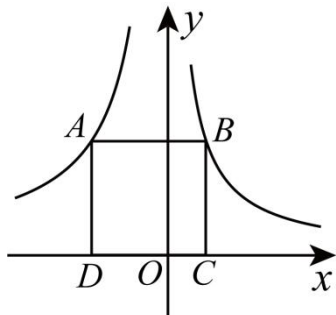
【分析】 根据圆锥的侧面积公式 $S_{\text{侧}} = \pi r l$, 把相应数值代入即可求解.

【详解】 解: $S_{\text{侧}} = \pi r l = \pi \times 2 \times 3 = 6\pi \text{ cm}^2$.

故答案为： 6π .

【点睛】 本题考查了圆锥侧面积的计算，解题的关键是牢记圆锥的侧面积的计算公式.

15. 如图，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图像的一支上，点 B 在反比例函数 $y = -\frac{k}{2x}$ 图像的一支上，点 C, D 在 x 轴上，若四边形 $ABCD$ 是面积为 9 的正方形，则实数 k 的值为_____.



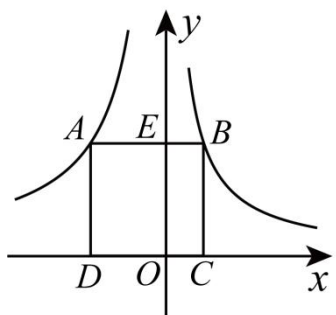
【答案】 -6

【解析】

【分析】 如图：由题意可得 $S_{ODAE} = |k| = -k$, $S_{OCBE} = \left| \frac{k}{2} \right| = -\frac{k}{2}$ ，再根据 $S_{ODAE} + S_{OCBE} = 9$ 进行计算即可解

答.

【详解】 解：如图：



$\because$ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图像的一支上，点 B 在反比例函数 $y = -\frac{k}{2x}$ 图像的一支上，

$$\therefore S_{ODAE} = |k| = -k, S_{OCBE} = \left| \frac{k}{2} \right| = -\frac{k}{2}$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是面积为 9 的正方形，

$$\therefore S_{ODAE} + S_{OCBE} = 9, \text{ 即 } -\frac{k}{2} - k = 9, \text{ 解得: } k = -6.$$

故答案为 -6 .

【点睛】 本题主要考查了反比例函数 k 的几何意义，掌握反比例函数图像线上任意一点作 x 轴、 y 轴的垂线，它们与 x 轴、 y 轴所围成的矩形面积为 k 的绝对值.

16. 矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 5$ ，点 M 在 AD 边所在的直线上，且 $DM = 1$ ，将矩形纸片 $ABCD$

折叠，使点 B 与点 M 重合，折痕与 AD ， BC 分别交于点 E ， F ，则线段 EF 的长度为_____.

【答案】 $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$

【解析】

【分析】分点 M 在 D 点右边与左边两种情况分别画出图形，根据勾股定理即可求解.

【详解】解： $\because$ 折叠，

$$\therefore OM = OB, EF \perp BM,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore AD \parallel BC$$

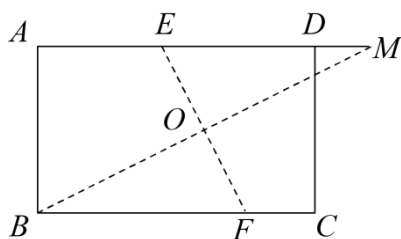
$$\therefore \angle M = \angle OBF, \angle MEO = \angle BFO,$$

$$\text{又 } OM = OB$$

$$\therefore \triangle OEM \cong \triangle OFB$$

$$\therefore OF = OB,$$

当 M 点在 D 点的右侧时，如图所示，设 BM, EF 交于点 O ，



$$\because AB = 3, BC = 5, DM = 1,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \text{ 中, } BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\text{则 } OM = \frac{1}{2}BM = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

$$\because \tan M = \frac{EO}{OM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

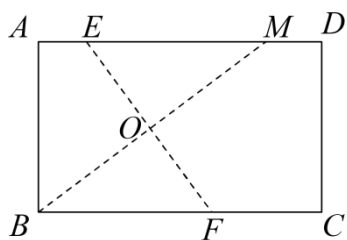
$$\therefore EO = \frac{1}{2}OM$$

$$\therefore EF = 2OE = OM = \frac{3}{2}\sqrt{5},$$

当 M 点在 D 点的左侧时，如图所示，设 BM, EF 交于点 O ，

$$\because AB = 3, BC = 5, DM = 1,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABM \text{ 中, } BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$



$$\text{则 } OM = \frac{1}{2}BM = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \tan \angle EMO = \frac{EO}{OM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore EO = \frac{3}{4}OM$$

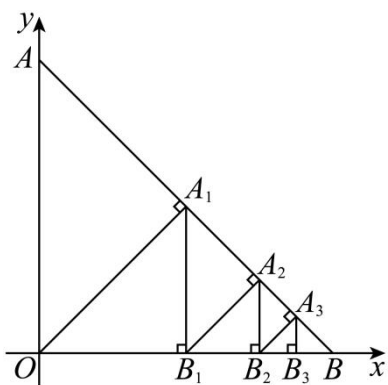
$$\therefore EF = 2OE = \frac{3}{2}OM = \frac{15}{4},$$

综上所述, EF 的长为: $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$,

故答案为: $\frac{15}{4}$ 或 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$.

【点睛】 本题考查了矩形与折叠问题, 勾股定理, 分类讨论是解题的关键.

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 在 y 轴上, 点 B 在 x 轴上, $OA = OB = 4$, 连接 AB , 过点 O 作 $OA_1 \perp AB$ 于点 A_1 , 过点 A_1 作 $A_1B_1 \perp x$ 轴于点 B_1 ; 过点 B_1 作 $B_1A_2 \perp AB$ 于点 A_2 , 过点 A_2 作 $A_2B_2 \perp x$ 轴于点 B_2 ; 过点 B_2 作 $B_2A_3 \perp AB$ 于点 A_3 , 过点 A_3 作 $A_3B_3 \perp x$ 轴于点 B_3 ; $\cdots$; 按照如此规律操作下去, 则点 A_{2023} 的坐标为_____.



【答案】 $\left(4 - \frac{1}{2^{2021}}, \frac{1}{2^{2021}}\right)$

【解析】

【分析】根据题意，结合图形依次求出 A_1, A_2, A_3 的坐标，再根据其规律写出 A_{2023} 的坐标即可.

【详解】解：在平面直角坐标系中，点 A 在 y 轴上，点 B 在 x 轴上， $OA = OB = 4$,

$\therefore \triangle OAB$ 是等腰直角三角形， $\angle OBA = 45^\circ$,

$\because OA_1 \perp AB$,

$\therefore \triangle OA_1B$ 是等腰直角三角形，

同理可得： OA_1B_1 ， A_1B_1B 均为等腰直角三角形，

$\therefore A_1(2, 2)$,

根据图中所有的三角形均为等腰直角三角形，

依次可得： $A_2(3, 1)$ ， $A_3\left(4 - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ， $A_4\left(4 - \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}\right)$ ，

由此可推出：点 A_{2023} 的坐标为 $\left(4 - \frac{1}{2^{2021}}, \frac{1}{2^{2021}}\right)$.

故答案为： $\left(4 - \frac{1}{2^{2021}}, \frac{1}{2^{2021}}\right)$.

【点睛】本题主要考查了平面直角坐标系中点的坐标特征，以及点的坐标变化规律问题，等腰直角三角形的性质，解题的关键是依次求出 A_1, A_2, A_3 的坐标，找出其坐标的规律.

三、解答题（本题共 7 道大题，共 69 分）

18. (1) 计算： $|\sqrt{3} - 1| - 4\sin 30^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + (4 - \pi)^0$;

(2) 分解因式： $2a^3 - 12a^2 + 18a$.

【答案】(1) $\sqrt{3}$; (2) $2a(a - 3)^2$.

【解析】

【分析】(1) 先化简各数，然后再进行计算即可；

(2) 先提取公因式，然后再利用完全平方公式继续分解即可.

【详解】(1) 解：原式 $= \sqrt{3} - 1 - 4 \times \frac{1}{2} + 2 + 1$

$= \sqrt{3}$,

(2) 解：原式 $= 2a(a^2 - 6a + 9)$

$$= 2a(a-3)^2.$$

【点睛】 本题考查了零指数幂，负整数指数幂，二次根式的化简，实数的运算，特殊角的三角函数值，提公因式法与公式法的综合运用，准确熟练地进行计算是解题的关键.

19. 解方程: $x^2 - 3x + 2 = 0$.

【答案】 $x_1 = 1, x_2 = 2$

【解析】

【分析】 首先将方程进行因式分解，然后根据因式分解的结果求出方程的解.

【详解】 解: $x^2 - 3x + 2 = 0$

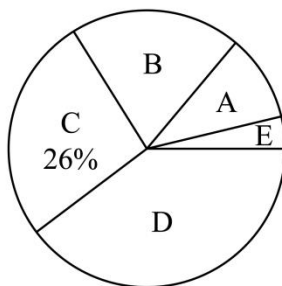
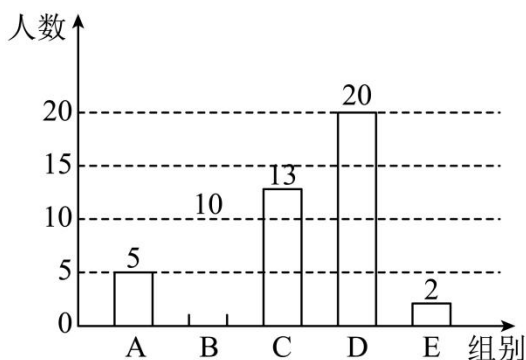
$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-2=0$$

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = 2.$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，解题的关键是掌握因式分解法求解方程.

20. 为了解学生完成书面作业所用时间的情况，进一步优化作业管理，某中学从全校学生中随机抽取部分学生，对他们一周平均每天完成书面作业的时间 t (单位: 分钟) 进行调查. 将调查数据整理后分为五组: A 组 “ $0 < t \leq 45$ ”; B 组 “ $45 < t \leq 60$ ”; C 组 “ $60 < t \leq 75$ ”; D 组 “ $75 < t \leq 90$ ”; E 组 “ $t > 90$ ”. 现将调查结果绘制成如下两幅不完整的统计图.



根据以上信息，解答下列问题:

- (1) 这次调查的样本容量是_____, 请补全条形统计图;
- (2) 在扇形统计图中, A 组对应的圆心角的度数是_____, 本次调查数据的中位数落在_____组内;
- (3) 若该中学有 2000 名学生, 请你估计该中学一周平均每天完成书面作业不超过 90 分钟的学生有多少人?

【答案】 (1) 50, 图见解析

(2) 36, C

(3) 1920 人

【解析】

【分析】(1) 用条形统计图中 C 组人数除以扇形统计图中 C 组占比，计算求解可得样本容量，总人数与其他各组人数的差即为 B 组人数，然后补全统计图即可；

(2) 根据 $360^\circ \times \frac{5}{50}$ 计算求解 A 组的圆心角，然后根据中位数的定义求解判断即可；

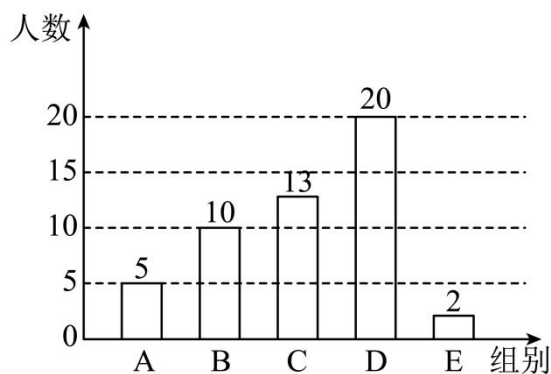
(3) 2000 乘以该校随机抽取部分学生完成书面作业不超过 90 分钟的学生人数的占比，计算求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意知，样本容量为 $\frac{13}{26\%} = 50$ ，

B 组人数为 $50 - 5 - 13 - 20 - 2 = 10$ (人)，

补全条形统计图如下：



【小问 2 详解】

解：由题意知，在扇形统计图中， A 组的圆心角为 $360^\circ \times \frac{5}{50} = 36^\circ$ ，

$\therefore$ 样本容量为 50，

$\therefore$ 将数据排序后，第 25 个和第 26 个数据的平均数为中位数，

$\therefore 5 + 10 = 15$ ， $5 + 10 + 13 = 28$ ，

$\therefore$ 本次调查数据的中位数落在 C 组内，

故答案为： 36° ， C ；

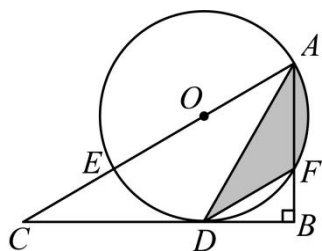
【小问 3 详解】

$2000 \times \frac{5 + 10 + 13 + 20}{50} = 1920$ (人)，

答：估计该中学一周平均每天完成书面作业不超过 90 分钟的学生有 1920 人.

【点睛】本题考查了条形统计图与扇形统计图，圆心角，中位数，用样本估计总体等知识. 解题的关键在于从统计图中获取正确的信息.

21. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， AD 平分 $\angle BAC$ 交 BC 于点 D ，点 E 是斜边 AC 上一点，以 AE 为直径的 $\odot O$ 经过点 D ，交 AB 于点 F ，连接 DF .



(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $BD = 5$, $\tan \angle ADB = \sqrt{3}$, 求图中阴影部分的面积 (结果保留 π).

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{50\pi}{9}$

【解析】

【分析】(1) 连接 OD , $\angle OAD = \angle ODA$, 由角平分线的定义可得 $\angle OAD = \angle BAD$, 从而可得 $\angle ODA = \angle BAD$, 再根据平行线的判定可得 $OD \parallel AB$, 从而可得 $\angle ODC = \angle B = 90^\circ$, 再根据切线的判定即可得出结论;

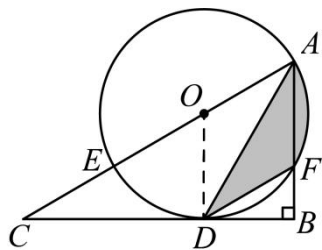
(2) 连接 OF , DE , 由 $\angle B = 90^\circ$, $\tan \angle ADB = \sqrt{3}$, 可得 $\angle ADB = 60^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$, 再由直角三角形的性质可得 $AD = 2BD = 10$, 再由圆周角定理可得 $\angle ADE = 90^\circ$, 根据角平分线的定义可得 $\angle DAE = \angle BAD = 30^\circ$, 利用锐角三角函数求得 $AE = \frac{20\sqrt{3}}{3}$, 再由直角三角形的性质可得

$OA = \frac{1}{2}AE = \frac{10\sqrt{3}}{3}$, 证明 $\triangle AOF$ 是等边三角形, 可得 $\angle AOF = 60^\circ$, 从而证明 $\triangle ODF$ 是等边三角形,

可得 OF 垂直平分 AD , 再由 $BD = \frac{1}{2}AD$, 可得 $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AOF}$, 从而可得 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OAF}$, 再利用扇形的面积公式计算即可.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OD ,



$\because OA, OD$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore OA = OD$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle OAD = \angle BAD$,

$\therefore \angle ODA = \angle BAD$,

$\therefore OD \parallel AB$,

$\therefore \angle ODC = \angle B = 90^\circ$,

$\therefore OD \perp BC$ 于点 D ,

又 $\because OD$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

解: 连接 OF , DE ,

$\because$ 在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\tan \angle ADB = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle ADB = 60^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$,

$\because BD = 5$,

$\therefore AD = 2BD = 10$,

$\because AE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADE = 90^\circ$,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle DAE = \angle BAD = 30^\circ$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AD = 10$,

$$\therefore AE = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AE = \frac{10\sqrt{3}}{3},$$

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAC = 2\angle BAD = 60^\circ$,

$\because OA = OF$,

$\therefore \triangle AOF$ 是等边三角形,

$\therefore \angle AOF = 60^\circ$,

$\because OD \parallel AB$,

$\therefore \angle DOF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ODF$ 是等边三角形,

$\therefore OF \perp AD$,

又 $\because OA = OD$,

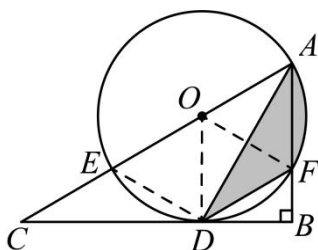
$\therefore OF$ 垂直平分 AD ,

$\therefore \angle B = 90^\circ$, $\angle BAD = 30^\circ$,

$\therefore BD = \frac{1}{2}AD$,

$\therefore S_{\triangle ADF} = S_{\triangle AOF}$,

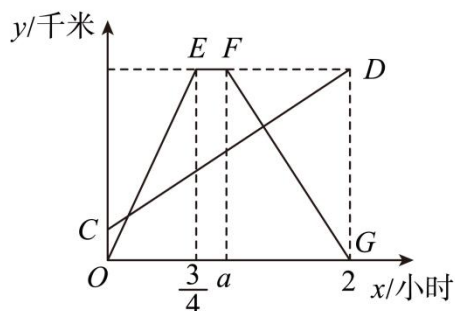
$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OAF} = \frac{60\pi \times \left(\frac{10\sqrt{3}}{3}\right)^2}{360} = \frac{50\pi}{9}.$$



【点睛】本题考查角平分线的定义、平行线的判定与性质、切线的判定、直

角三角形的性质、圆周角定理、等边三角形的判定与性质、垂直平分线的判定与性质及扇形的面积公式, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

22. 一辆巡逻车从 A 地出发沿一条笔直的公路匀速驶向 B 地, $\frac{2}{5}$ 小时后, 一辆货车从 A 地出发, 沿同一路线每小时行驶 80 千米匀速驶向 B 地, 货车到达 B 地填装货物耗时 15 分钟, 然后立即按原路匀速返回 A 地. 巡逻车、货车离 A 地的距离 y (千米) 与货车出发时间 x (小时) 之间的函数关系如图所示, 请结合图象解答下列问题:



- (1) A, B 两地之间的距离是_____千米, $a =$ _____;
- (2) 求线段 FG 所在直线的函数解析式;
- (3) 货车出发多少小时两车相距 15 千米? (直接写出答案即可)

【答案】(1) 60, 1

(2) $y = -60x + 120$

(3) $\frac{5}{11}$ 小时或 $\frac{19}{17}$ 小时或 $\frac{25}{17}$ 小时

【解析】

【分析】(1) 根据货车从 A 地到 B 地花了 $\frac{3}{4}$ 小时结合路程 = 速度 $\times$ 时间即可求出 A 、 B 两地的距离；根据货车装货花了 15 分钟即可求出 a 的值；

(2) 利用待定系数法求解即可；

(3) 分两车从 A 前往 B 途中相遇前后和货车从 B 往 A 途中相遇前后，四种情况建立方程求解即可.

【小问 1 详解】

解： $80 \times \frac{3}{4} = 60$ 千米，

$\therefore A$ 、 B 两地之间的距离是 60 千米，

$\because$ 货车到达 B 地填装货物耗时 15 分钟，

$$\therefore a = \frac{3}{4} + \frac{15}{60} = 1,$$

故答案为：60，1

【小问 2 详解】

解：设线段 FG 所在直线的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$

将 $F(1, 60)$ ， $G(2, 0)$ 代入 $y = kx + b$ ，得

$$\begin{cases} k + b = 60 \\ 2k + b = 0 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} k = -60 \\ b = 120 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 线段 FG 所在直线的函数解析式为 $y = -60x + 120$

【小问 3 详解】

解：设货车出发 x 小时两车相距 15 千米，

由题意得，巡逻车的速度为 $60 \div \left(2 + \frac{2}{5}\right) = 25$ 千米/小时

当两车都在前往 B 地的途中且未相遇时两车相距 15 千米，则 $25\left(x + \frac{2}{5}\right) - 15 = 80x$ ，

解得 $x = -\frac{1}{11}$ (所去);

当两车都在前往 B 地的途中且相遇后两车相距 15 千米, 则 $25\left(x + \frac{2}{5}\right) + 15 = 80x$,

解得 $x = \frac{5}{11}$;

$\therefore 25 \times \left(1 + \frac{2}{5}\right) = 35 < 60 - 15 = 45$,

$\therefore$ 货车装货过程中两车不可能相距 15 千米,

当货车从 B 地前往 A 地途中且两车未相遇时相距 15 千米, 则 $25\left(x + \frac{2}{5}\right) + 15 + \frac{60}{2-1}(x-1) = 60$,

解得 $x = \frac{19}{17}$;

当货车从 B 地前往 A 地途中且两车相遇后相距 15 千米, 则 $25\left(x + \frac{2}{5}\right) - (-60x + 120) = 15$,

解得 $x = \frac{25}{17}$;

综上所述, 当货车出发 $\frac{5}{11}$ 小时或 $\frac{19}{17}$ 小时或 $\frac{25}{17}$ 小时时, 两车相距 15 千米.

【点睛】本题主要考查了求一次函数解析式, 从函数图象获取信息, 一元一次方程的实际应用, 正确读懂函数图象是解题的关键.

23. 综合与实践

数学模型可以用来解决一类问题, 是数学应用的基本途径. 通过探究图形的变化规律, 再结合其他数学知识的内在联系, 最终可以获得宝贵的数学经验, 并将其运用到更广阔的数学天地.

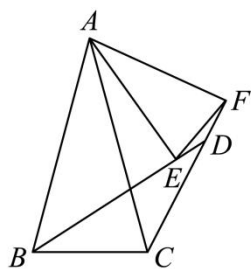


图1

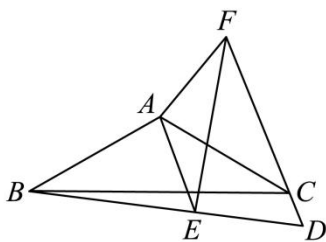


图2

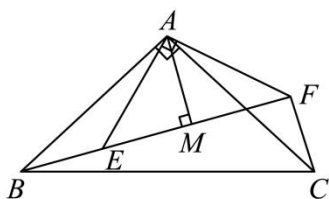
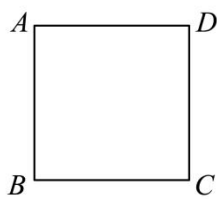


图3



备用图

(1) 发现问题: 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中, $AB = AC$, $AE = AF$, $\angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$, 连接 BE ,

CF ，延长 BE 交 CF 于点 D ．则 BE 与 CF 的数量关系：_____， $\angle BDC =$ _____°；

(2) 类比探究：如图 2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 中， $AB = AC$ ， $AE = AF$ ， $\angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$ ，连接 BE ， CF ，延长 BE ， FC 交于点 D ．请猜想 BE 与 CF 的数量关系及 $\angle BDC$ 的度数，并说明理由；

(3) 拓展延伸：如图 3， $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 均为等腰直角三角形， $\angle BAC = \angle EAF = 90^\circ$ ，连接 BE ， CF ，且点 B ， E ， F 在一条直线上，过点 A 作 $AM \perp BF$ ，垂足为点 M ．则 BF ， CF ， AM 之间的数量关系：_____；

(4) 实践应用：正方形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ，若平面内存在点 P 满足 $\angle BPD = 90^\circ$ ， $PD = 1$ ，则 $S_{\triangle ABP} =$ _____．

【答案】(1) $BE = CF$ ，30

(2) $BE = CF$ ， $\angle BDC = 60^\circ$ ，证明见解析

(3) $BF = CF + 2AM$

(4) $\frac{7+\sqrt{7}}{4}$ 或 $\frac{7-\sqrt{7}}{4}$

【解析】

【分析】(1) 根据已知得出 $\angle BAE = \angle CAF$ ，即可证明 $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ ，得出 $BE = CF$ ， $\angle ABE = \angle ACF$ ，进而根据三角形的外角的性质即可求解；

(2) 同 (1) 的方法即可得证；

(3) 同 (1) 的方法证明 $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ (SAS)，根据等腰直角三角形的性质得出 $AM = \frac{1}{2}EF = EM = MF$ ，即可得出结论；

(4) 根据题意画出图形，连接 BD ，以 BD 为直径， BD 的中点为圆心作圆，以 D 点为圆心，1 为半径作圆，两圆交于点 P, P_1 ，延长 BP 至 M ，使得 $PM = DP = 1$ ，证明 $\triangle ADP \sim \triangle BDM$ ，得出 $PA = \frac{\sqrt{2}}{2}BM$ ，勾

股定理求得 PB ，进而求得 BM ，根据相似三角形的性质即可得出 $PA = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{7}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$ ，勾股定

理求得 BQ, PQ ，进而根据三角形的面积公式即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ $\angle BAC = \angle EAF = 30^\circ$ ，

∴ $\angle BAE = \angle CAF$ ，

又∵ $AB = AC$ ， $AE = AF$ ，

∴ $\triangle BAE \cong \triangle CAF$ ，

$$\therefore BE = CF, \angle ABE = \angle ACF$$

设 AC, BD 交于点 O ,

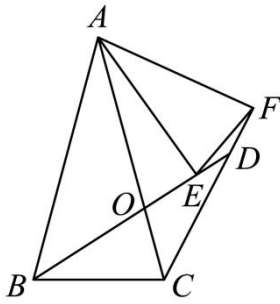


图1

$$\because \angle AOD = \angle ACF + \angle BDC = \angle ABE + \angle BAO$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BAO = \angle BAC = 30^\circ,$$

故答案为: $BE = CF, 30$.

【小问 2 详解】

结论: $BE = CF, \angle BDC = 60^\circ$;

证明: $\because \angle BAC = \angle EAF = 120^\circ$,

$$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle EAF - \angle EAC, \text{ 即 } \angle BAE = \angle CAF,$$

$$\text{又} \because AB = AC, AE = AF,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF$$

$$\therefore BE = CF,$$

$$\triangle AEB = \triangle AFC$$

$$\because \angle EAF = 120^\circ, AE = AF,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BEF - \angle EFD = \angle AEB + 30^\circ - (\angle AFC - 30^\circ) = 60^\circ,$$

【小问 3 详解】

$BF = CF + 2AM$, 理由如下,

$$\because \angle BAC = \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle EAC = \angle EAF - \angle EAC,$$

$$\text{即 } \angle BAE = \angle CAF,$$

又 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle AEF$ 均为等腰直角三角形

$$\therefore AB = AC, AE = AF,$$

$$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CAF (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = CF,$$

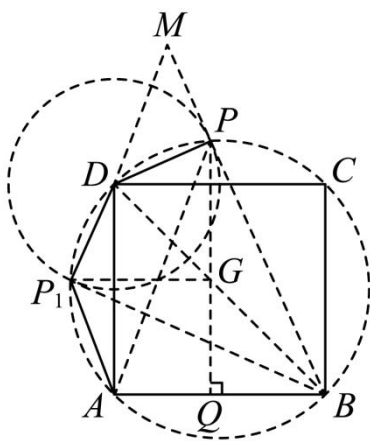
在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中, $AM \perp BF$,

$$\therefore AM = \frac{1}{2}EF = EM = MF,$$

$$\therefore BF = BE + EF = CF + 2AM ;$$

【小问 4 详解】

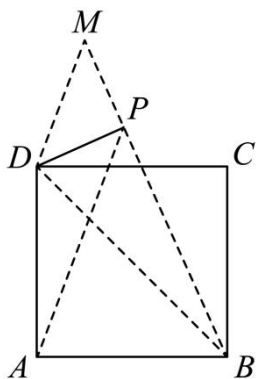
解: 如图所示,



连接 BD ，以 BD 为直径， BD 的中点为圆心作圆，以 D 点为圆心，1 为半径作圆，两圆交于点 P, P_1 ，

延长 BP 至 M ，使得 $PM = DP = 1$ ，

则 $\triangle MDP$ 是等腰直角三角形, $\angle MDP = 45^\circ$



$$\therefore \angle CDB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MDB = \angle MDP + \angle PDC + \angle CDB = 90^\circ + \angle PDC = \angle ADP,$$

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{DP}{DM} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \Delta ADP \sim \Delta BDM$$

$$\therefore \frac{PA}{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore PA = \frac{\sqrt{2}}{2} BM,$$

$$\therefore AB = 2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle DPB \text{ 中, } PB = \sqrt{DB^2 - DP^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{7},$$

$$\therefore BM = BP + PM = \sqrt{7} + 1$$

$$\therefore PA = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \sqrt{7}) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2}$$

过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于点 Q ,

设 $QB = x$, 则 $AQ = 2 - x$,

$$\text{在 Rt}\triangle APQ \text{ 中, } PQ^2 = AP^2 - AQ^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PBQ \text{ 中, } PQ^2 = PB^2 - BQ^2$$

$$\therefore AP^2 - AQ^2 = PB^2 - BQ^2$$

$$\therefore \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{2} \right)^2 - (2 - x)^2 = (\sqrt{7})^2 - x^2$$

$$\text{解得: } x = \frac{7 - \sqrt{7}}{4}, \text{ 则 } BQ = \frac{7 - \sqrt{7}}{4},$$

设 PQ, BD 交于点 G , 则 $\triangle BQG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore QG = QB = \frac{7 - \sqrt{7}}{4}$$

在 $\text{Rt}\triangle DPB, \text{Rt}\triangle DP_1B$ 中,

$$\begin{cases} DP = DP_1 \\ DB = DB \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DPB \cong \text{Rt}\triangle DP_1B$$

$$\therefore \angle PDB = \angle P_1DB$$

$$\text{又 } PD = P_1D = 1, \quad DG = DG$$

$$\therefore \triangle PGD \cong \triangle P_1DG$$

$$\therefore \angle PGD = \angle P_1GD = 45^\circ$$

$$\therefore \angle PGP_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore P_1G \parallel AB$$

$$\therefore S_{\triangle ABP_1} = \frac{1}{2} AB \times QG = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{7-\sqrt{7}}{4} = \frac{7-\sqrt{7}}{4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PQB \text{ 中, } PQ = \sqrt{PB^2 - BQ^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - \left(\frac{7-\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \frac{7+\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} AB \times PQ = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{7+\sqrt{7}}{4} = \frac{7+\sqrt{7}}{4},$$

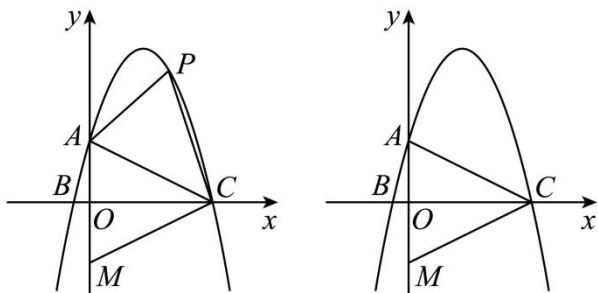
$$\text{综上所述, } S_{\triangle ABP} = \frac{7+\sqrt{7}}{4} \text{ 或 } \frac{7-\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{故答案为: } \frac{7+\sqrt{7}}{4} \text{ 或 } \frac{7-\sqrt{7}}{4}.$$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，正方形的性质，勾股定理，直径所对的圆周角是直角，熟练运用已知模型是解题的关键.

24. 综合与探究

如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上的点 A, C 坐标分别为 $(0, 2)$, $(4, 0)$ ，抛物线与 x 轴负半轴交于点 B ，点 M 为 y 轴负半轴上一点，且 $OM = 2$ ，连接 AC, CM .



备用图

- (1) 求点 M 的坐标及抛物线的解析式；
- (2) 点 P 是抛物线位于第一象限图象上的动点，连接 AP, CP ，当 $S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ACM}$ 时，求点 P 的坐标；
- (3) 点 D 是线段 BC (包含点 B, C) 上的动点，过点 D 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 Q ，交直线 CM 于点 N ，若以点 Q, N, C 为顶点的三角形与 $\triangle COM$ 相似，请直接写出点 Q 的坐标；
- (4) 将抛物线沿 x 轴的负方向平移得到新抛物线，点 A 的对应点为点 A' ，点 C 的对应点为点 C' ，在抛物线平移过程中，当 $MA' + MC'$ 的值最小时，新抛物线的顶点坐标为 _____， $MA' + MC'$ 的最小值为 _____.

【答案】(1) $M(0, -2)$, $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$

(2) $P(2, 5)$

(3) $Q_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $Q_2\left(\frac{3}{2}, 5\right)$

(4) $\left(-\frac{11}{12}, \frac{81}{16}\right)$, $2\sqrt{13}$

【解析】

【分析】(1) 根据点 M 在 y 轴负半轴且 $OM = 2$ 可得点 M 的坐标为 $M(0, -2)$ ，利用待定系数法可得抛物线的解析式为 $y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$ ；

(2) 过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，交线段 AC 于点 E ，用待定系数法求得直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$ ，

设点 P 的横坐标为 p ($0 < p < 4$)，则 $P\left(p, -p^2 + \frac{7}{2}p + 2\right)$ ， $E\left(p, -\frac{1}{2}p + 2\right)$ ，故 $PE = -p^2 + 4p$ ($0 < p < 4$)，先求得 $S_{\triangle ACM} = 8$ ，从而得到 $S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2}PE \cdot OC = -2p^2 + 8p = 8$ ，解出 p 的值，从而得出点 P 的坐标；

(3) 由 $\angle COM = 90^\circ$ 可知，要使点 Q ， N ， C 为顶点的三角形与 COM 相似，则以点 Q ， N ， C 为顶点的三角形也是直角三角形，从而分 $\angle CQN = 90^\circ$ 和 $\angle QCN = 90^\circ$ 两种情况讨论，①当 $\angle CQN = 90^\circ$ ，可推导 B 与点 Q 重合， $\triangle CQN \sim \triangle COM$ ，即此时符合题意，利用求抛物线与 x 轴交点的方法可求出点 Q 的坐标；②当 $\angle QCN = 90^\circ$ 时，可推导 $\triangle QCN \sim \triangle COM$ ，即此时符合题意，再证明 $\triangle QDC \sim \triangle COM$ ，从而得到 $QD = 2DC$ ，再设点 Q 的横坐标为 q ，则 $Q\left(q, -q^2 + \frac{7}{2}q + 2\right)$ ， $D(q, 0)$ ，从而得到 $-q^2 + \frac{7}{2}q + 2 = 2(3 - q)$ ，解得 q 的值，从而得到点 Q 的坐标，最后综合①②即可；

(4) 设抛物线沿 x 轴的负方向平移 m 个单位长度得到新抛物线，将点 M 右平移 m 个单位长度得到点 M' ，由平移的性质可知， $MA' = M'A$ ， $MC' = M'C$ ， $MA' + MC'$ 的值最小就是 $M'A + M'C$ 最小值，作出点 C 关于直线 $y = -2$ 对称的对称点 C'' ，连接 AC'' 交直线 $y = -2$ 于点 M' ，连接 $M'C$ 则此时 $M'A + M'C$ 取得最小值，即为 AC'' 的长度，利用两点间的距离公式求这个长度，用待定系数法求出直线 AC'' 的解析式，从而

确定 M' 的坐标，继而确定平移距离，将原抛物线的解析式化为顶点式，从而得到其顶点，继而确定新抛物线的顶点.

【小问 1 详解】

解：∵ 点 M 在 y 轴负半轴且 $OM = 2$,

$$\therefore M(0, -2)$$

将 $A(0, 2)$, $C(4, 0)$ 代入 $y = -x^2 + bx + c$, 得

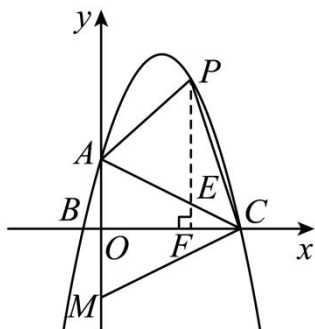
$$\begin{cases} c = 2 \\ -16 + 4b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = \frac{7}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2$$

【小问 2 详解】

解：过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F , 交线段 AC 于点 E ,



设直线 AC 的解析式为 $y = kx + m (k \neq 0)$,

将 $A(0, 2)$, $C(4, 0)$ 代入 $y = kx + m$, 得

$$\begin{cases} m = 2 \\ 4k + m = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

设点 P 的横坐标为 $p (0 < p < 4)$

$$\text{则 } P\left(p, -p^2 + \frac{7}{2}p + 2\right), E\left(p, -\frac{1}{2}p + 2\right),$$

$$\therefore PE = -p^2 + \frac{7}{2}p + 2 - \left(-\frac{1}{2}p + 2\right) = -p^2 + 4p (0 < p < 4)$$

$$\because S_{\triangle ACM} = 8, \therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2}PE \cdot OC = -2p^2 + 8p = 8, \text{ 解得 } p_1 = p_2 = 2,$$

$$\therefore P(2, 5)$$

【小问3详解】

$$Q_1\left(\frac{3}{2}, 5\right), Q_2\left(-\frac{1}{2}, 0\right),$$

补充求解过程如下：

$\because$ 在 COM 中， $\angle COM = 90^\circ$ ，以点 Q, N, C 为顶点的三角形与 COM 相似，

$\therefore$ 以点 Q, N, C 为顶点的三角形也是直角三角形，

又 $\because QD \perp x$ 轴，直线 QD 交直线 CM 于点 N ，

$\therefore \angle CNQ \neq 90^\circ$ ，即点 N 不与点 O 是对应点．

故分为 $\angle CQN = 90^\circ$ 和 $\angle QCN = 90^\circ$ 两种情况讨论：

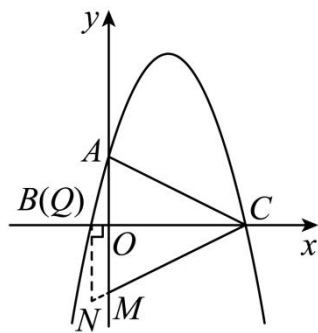
①当 $\angle CQN = 90^\circ$ 时，由于 $QN \perp x$ 轴，

$\therefore CQ \perp y$ 轴，即 CQ 在 x 轴上，

又 $\because$ 点 Q 在抛物线上，

$\therefore$ 此时点 B 与点 Q 重合，

作出图形如下：



此时 $\angle CQN = \angle COM = 90^\circ$ ，

又 $\because \angle QCN = \angle OCM$

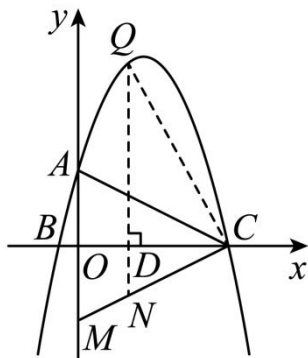
$\therefore \triangle CQN \sim \triangle COM$ ，即此时符合题意，

$$\text{令 } y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 3 (\text{舍去})$$

$\therefore$ 点 Q 的坐标, 也即点 B 的坐标是 $Q_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

②当 $\angle QCN = 90^\circ$ 时, 作图如下:



$$\because QD \perp x \text{ 轴}, \angle COM = 90^\circ$$

$$\therefore QD \parallel OM,$$

$$\therefore \angle CNQ = \angle OMC,$$

$$\because \angle CNQ = \angle OMC, \angle QCN = \angle COM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle QCN \sim \triangle COM, \text{ 即此时符合题意,}$$

$$\because \triangle QCN \sim \triangle COM,$$

$$\therefore \angle CQN = \angle OCM, \text{ 即 } \angle DQC = \angle OCM$$

$$\because \angle DQC = \angle OCM, \angle QDC = \angle COM,$$

$$\therefore \triangle QDC \sim \triangle COM$$

$$\therefore \frac{QD}{DC} = \frac{CO}{OM} = \frac{4}{2} = 2, \quad QD = 2DC$$

设点 Q 的横坐标为 q , 则 $Q\left(q, -q^2 + \frac{7}{2}q + 2\right)$, $D(q, 0)$,

$$\therefore QD = -q^2 + \frac{7}{2}q + 2, \quad CD = 3 - q$$

$$\therefore -q^2 + \frac{7}{2}q + 2 = 2(3-q),$$

$$\text{解得: } q_1 = \frac{3}{2}, q_2 = 3 (\text{舍去}),$$

$$\therefore -q^2 + \frac{7}{2}q + 2 = 5,$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标是 } Q_2\left(\frac{3}{2}, 5\right)$$

$$\text{综上所述: 点 } Q \text{ 的坐标是 } Q_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right), Q_2\left(\frac{3}{2}, 5\right);$$

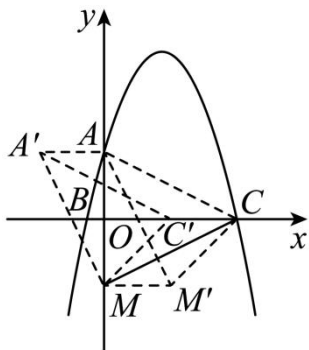
【小问 4 详解】

$$\left(-\frac{11}{12}, \frac{81}{16}\right), 2\sqrt{13},$$

补充求解过程如下:

设抛物线沿 x 轴的负方向平移 m 个单位长度得到新抛物线,

将点 M 向右平移 m 个单位长度得到点 M' , 作出图形如下:



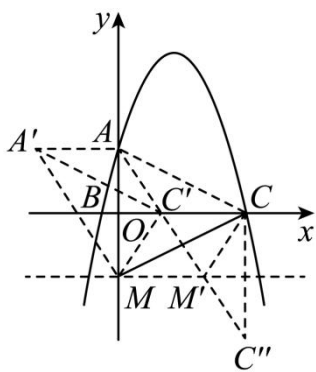
由平移的性质可知, $MA' = M'A, MC' = M'C$,

$\therefore MA' + MC'$ 的值最小就是 $M'A + M'C$ 最小值,

显然点 M' 在直线 $y = -2$ 上运用,

作出点 C 关于直线 $y = -2$ 对称的对称点 C'' , 连接 AC'' 交直线 $y = -2$ 于点 M' , 连接 $M'C$ 则此时

$M'A + M'C$ 取得最小值, 即为 AC'' 的长度,



$\therefore$ 点 C 关于直线 $y = -2$ 对称的对称的点是点 C'' , $C(4, 0)$

$\therefore C''(4, -4)$,

$$\therefore (MA' + MC')_{\min} = (M'A + M'C)_{\min} = AC'' = \sqrt{(4-0)^2 + (-4-2)^2} = 2\sqrt{13},$$

设直线 AC'' 的解析式是: $y = k_1x + b_1$

将点 $A(0, 2)$, $C''(4, -4)$ 代入得:
$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ 4k_1 + b_1 = -4 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k_1 = -\frac{3}{2} \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

直线 AC'' 的解析式是: $y = -\frac{3}{2}x + 2$

令 $y = -\frac{3}{2}x + 2 = -2$, 解得: $x = \frac{8}{3}$,

$\therefore M'\left(\frac{8}{3}, -2\right)$,

$\therefore$ 平移的距离是 $m = \frac{8}{3}$

又 $\because y = -x^2 + \frac{7}{2}x + 2 = -\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{81}{16}$,

$\therefore$ 平移前的抛物线的坐标是 $\left(\frac{7}{4}, \frac{81}{16}\right)$

$\therefore$ 新抛物线的顶点坐标为 $\left(\frac{7}{4} - \frac{8}{3}, \frac{81}{16}\right)$ 即 $\left(-\frac{11}{12}, \frac{81}{16}\right)$

故答案是: $\left(-\frac{11}{12}, \frac{81}{16}\right)$, $2\sqrt{13}$.

【点睛】本题考查求二次函数的解析式，二次函数的图象与性质，二次函数与几何变换综合，二次函数与相似三角形综合，最短路径问题，三角形面积公式等知识，难度较大，综合性大，作出辅助线和掌握转换思想是解题的关键，第二问的解题技巧是使用铅锤公式计算面积，第三问的技巧是转化成直角三角形的讨论问题，如果直接按相似讨论，则有四种情况，可以降低分类讨论的种类，第四问的技巧，是将点 M 向反方向移动，从而将两个动点转化为一个动点来解决.

