

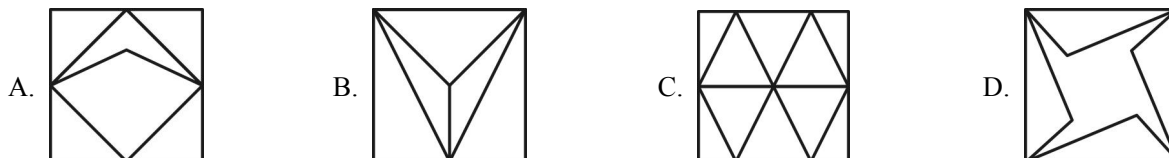
二〇二三年绥化市初中毕业学业考试数学试题

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟
2. 本试题共三道大题，28 个小题
3. 所有答案都必须写在答题卡上所对应的题号后的指定区域内

一、单选题

1. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心，进行逐一判断即可.

- 【详解】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 A 选项不合题意；
 B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 B 选项不符合题意；
 C、既是轴对称图形又是中心对称图形，故 C 选项合题意；
 D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故 D 选项不合题意.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形，解题的关键在于能够熟练掌握轴对称图形和中心对称图形的定义.

2. 计算 $|-5|+2^0$ 的结果是（ ）

- A. -3 B. 7 C. -4 D. 6

【答案】D

【解析】

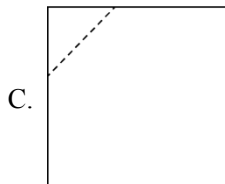
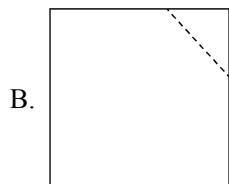
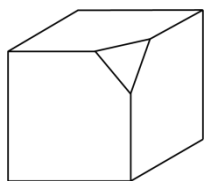
【分析】根据求一个数的绝对值，零指数幂进行计算即可求解.

【详解】解： $|-5|+2^0=5+1=6$,

故选：D.

【点睛】本题考查了求一个数的绝对值，零指数幂，熟练掌握求一个数的绝对值，零指数幂是解题的关键.

3. 如图是一个正方体，被切去一角，则其左视图是 ()

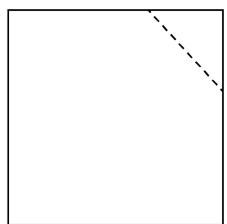


【答案】B

【解析】

【分析】根据左视图的意义判断即可.

【详解】根据题意，该几何体的左视图为：



故选 B.

【点睛】本题考查了三视图的画法，熟练掌握三视图的空间意义是解题的关键.

4. 纳米是非常小的长度单位， $1\text{nm} = 0.000000001\text{m}$ ，把 0.000000001 用科学记数法表示为 ()

A. 1×10^{-9}

B. 1×10^{-8}

C. 1×10^8

D. 1×10^9

【答案】A

【解析】

【分析】用科学记数法表示绝对值较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.

【详解】解： $0.000000001 = 1 \times 10^{-9}$.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了用科学记数法表示绝对值较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

5. 下列计算中，结果正确的是 ()

A. $(-pq)^3 = p^3q^3$ B. $x \cdot x^3 + x^2 \cdot x^2 = x^8$ C. $\sqrt{25} = \pm 5$ D. $(a^2)^3 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据积的乘方与幂的乘方运算，同底数幂的乘法、合并同类项，算术平方根，进行计算即可求解.

【详解】解：A. $(-pq)^3 = -p^3q^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $x \cdot x^3 + x^2 \cdot x^2 = 2x^4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

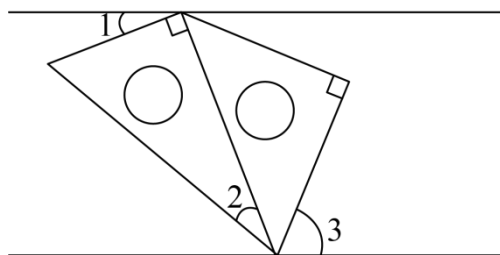
C. $\sqrt{25} = 5$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $(a^2)^3 = a^6$ ，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了积的乘方与幂的乘方运算，同底数幂的乘法、合并同类项，算术平方根，熟练掌握以上运算法则是解题的关键.

6. 将一副三角板按下图所示摆放在一组平行线内， $\angle 1 = 25^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为（ ）



A. 55°

B. 65°

C. 70°

D. 75°

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线平行内错角相等即可求解.

【详解】解：依题意， $\angle 1 + 90^\circ = \angle 3 + 45^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = 70^\circ$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了平行线的性质，熟练掌握两直线平行内错角相等是解题的关键.

7. 下列命题中叙述正确的是（ ）

A. 若方差 $s_{\text{甲}}^2 > s_{\text{乙}}^2$ ，则甲组数据的波动较小

B. 直线外一点到这条直线的垂线段，叫做点到直线的距离

C. 三角形三条中线的交点叫做三角形的内心

D. 角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上

【答案】D

【解析】

【分析】根据方差的意义，点到直线的距离，三角形的重心的定义，角平分线的性质，逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. 若方差 $s_{甲}^2 > s_{乙}^2$ ，则乙组数据的波动较小，故该选项不正确，不符合题意；

B. 直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离，故该选项不正确，不符合题意；

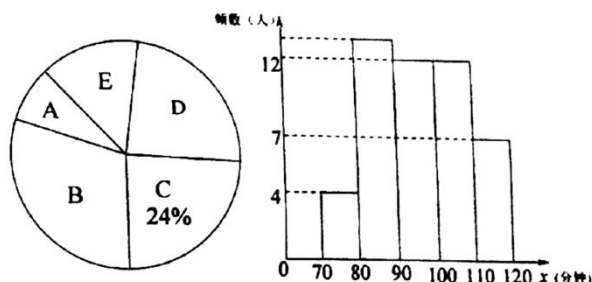
C. 三角形三条中线的交点叫做三角形的重心，故该选项不正确，不符合题意；

D. 角的内部到角的两边的距离相等的点在角的平分线上，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了方差的意义，点到直线的距离，三角形的重心的定义，角平分线的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键.

8. 绥化市举办了2023年半程马拉松比赛，赛后随机抽取了部分参赛者的成绩（单位：分钟），并制作了如下的参赛者成绩组别表、扇形统计图和频数分布直方图. 则下列说法正确的是（ ）



组别	参赛者成绩
A	$70 \leq x < 80$
B	$80 \leq x < 90$
C	$90 \leq x < 100$
D	$100 \leq x < 110$
E	$110 \leq x < 120$

A. 该组数据的样本容量是 50 人

B. 该组数据的中位数落在 $90 \sim 100$ 这一组

C. 90~100 这组数据的组中值是 96

D. 110~120 这组数据对应的扇形统计图的圆心角度数为 51°

【答案】B

【解析】

【分析】根据 C 组的人数除以占比求得样本的容量，结合统计图求得 $80 \leq x < 90$ 的人数为 15，进而根据中位数的定义，即可判断 B 选项，根据组中值为 $\frac{90+100}{2} = 95$ ，即可判断 C 选项，根据 110~120 的占比乘以 360° ，即可判断 D 选项.

【详解】解：A、该组数据的样本容量是 $12 \div 24\% = 50$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B、 $80 \leq x < 90$ 的人数为： $50 - 4 - 12 - 12 - 7 = 15$ ， $4 + 15 < 25$ ， $4 + 15 + 12 > 25$ ，该组数据的中位数落在 90~100 这一组，故该选项正确，符合题意；

C、90~100 这组数据的组中值是 95，故该选项不正确，不符合题意；

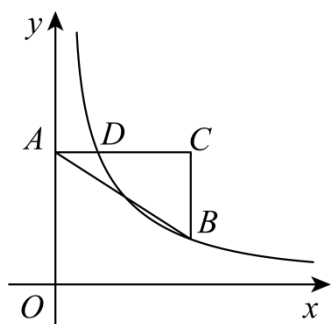
D、110~120 这组数据对应的扇形统计图的圆心角度数为 $\frac{7}{50} \times 360^\circ = 50.4^\circ$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了样本的容量，条形统计图与扇形统计图信息关联，中位数的定义，求扇形统计图的圆心角的度数，求频数分布直方图组中值，从统计图表中获取信息是解题的关键.

9. 在平面直角坐标系中，点 A 在 y 轴的正半轴上，AC 平行于 x 轴，点 B, C 的横坐标都是 3， $BC = 2$ ，

点 D 在 AC 上，且其横坐标为 1，若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图像经过点 B, D，则 k 的值是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. $\frac{3}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】设 $B(3, m)$ ，则 $C(3, m+2)$ ， $D(1, m+2)$ 根据反比例函数的性质，列出等式计算即可.

【详解】设 $B(3, m)$ ，

$\therefore$ 点 B, C 的横坐标都是 3, $BC = 2$, AC 平行于 x 轴, 点 D 在 AC 上, 且其横坐标为 1,

$$\therefore C(3, m+2), D(1, m+2),$$

$$\therefore 3m = m + 2,$$

解得 $m = 1$,

$$\therefore B(3, 1),$$

$$\therefore k = 3 \times 1 = 3,$$

故选 C.

【点睛】本题考查了反比例函数解析式的确定, 熟练掌握 k 的意义, 反比例函数的性质是解题的关键.

10. 某运输公司, 运送一批货物, 甲车每天运送货物总量的 $\frac{1}{4}$. 在甲车运送 1 天货物后, 公司增派乙车运送货物, 两车又共同运送货物 $\frac{1}{2}$ 天, 运完全部货物. 求乙车单独运送这批货物需多少天? 设乙车单独运送这批货物需 x 天, 由题意列方程, 正确的是 ()

A. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2x} = 1$

B. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} \right) = 1$

C. $\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{x} = 1$

D. $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{x} = 1$

【答案】B

【解析】

【分析】设乙车单独运送这批货物需 x 天, 由题意列出分式方程即可求解.

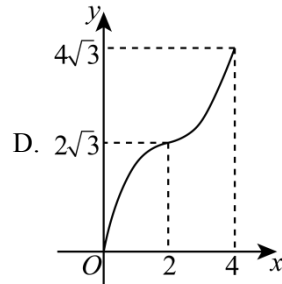
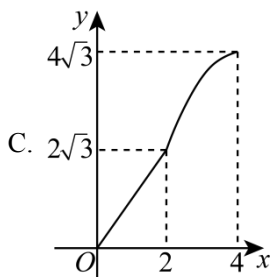
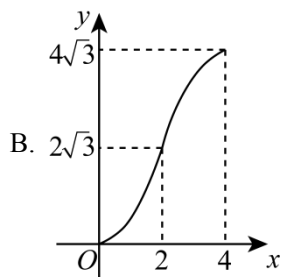
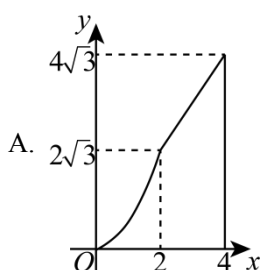
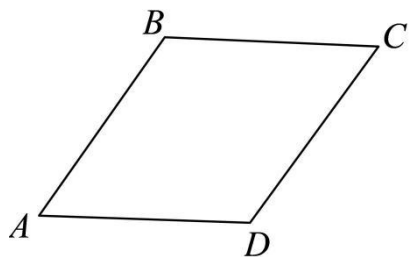
【详解】解: 设乙车单独运送这批货物需 x 天, 由题意列方程

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

故选: B.

【点睛】本题考查了列分式方程, 根据题意找到等量关系列出方程是解题的关键.

11. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 4$, 动点 M, N 同时从 A 点出发, 点 M 以每秒 2 个单位长度沿折线 $A-B-C$ 向终点 C 运动; 点 N 以每秒 1 个单位长度沿线段 AD 向终点 D 运动, 当其中一点运动至终点时, 另一点随之停止运动. 设运动时间为 x 秒, $\triangle AMN$ 的面积为 y 个平方单位, 则下列正确表示 y 与 x 函数关系的图象是 ()

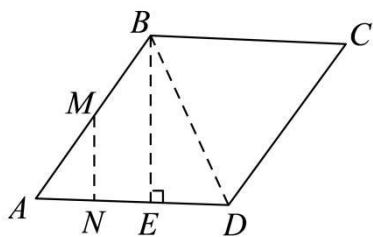


【答案】 A

【解析】

【分析】 连接 BD ，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，根据已知条件得出 $\triangle ABD$ 是等边三角形，进而证明 $\triangle AMN \sim \triangle ABE$ 得出 $\angle ANM = \angle AEB = 90^\circ$ ，当 $0 < t < 4$ 时， M 在 AB 上，当 $4 \leq t < 8$ 时， M 在 BC 上，根据三角形的面积公式得到函数关系式，

【详解】 解：如图所示，连接 BD ，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，
当 $0 < t < 4$ 时， M 在 AB 上，



菱形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ，

$\therefore AB = AD$ ，则 $\triangle ABD$ 是等边三角形，

$\therefore AE = ED = \frac{1}{2}AD = 2$ ， $BE = \sqrt{3}AE = 2\sqrt{3}$

$\therefore AM = 2x$ ， $AN = x$ ，

$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AE} = 2$ ，又 $\angle A = \angle A$

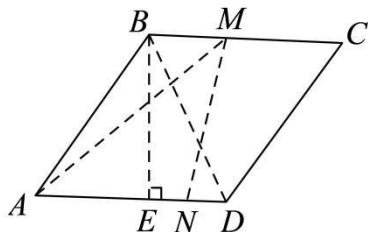
$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ABE$

$\therefore \angle ANM = \angle AEB = 90^\circ$

$$\therefore MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{3}x,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x \times \sqrt{3}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$$

当 $4 \leq t < 8$ 时, M 在 BC 上,



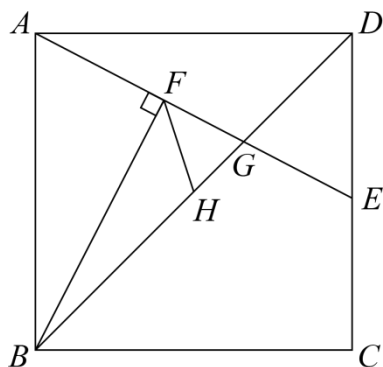
$$\therefore y = \frac{1}{2}AN \times BE = \frac{1}{2}x \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}x,$$

综上所述, $0 < t < 4$ 时的函数图象是开口向上的抛物线的一部分, 当 $4 \leq t < 8$ 时, 函数图象是直线的一部分,

故选: A.

【点睛】本题考查了动点问题的函数图象, 二次函数图象的性质, 一次函数图象的性质, 菱形的性质, 勾股定理, 等边三角形的性质与判定, 相似三角形的性质与判定, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

12. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E 为边 CD 的中点, 连接 AE , 过点 B 作 $BF \perp AE$ 于点 F , 连接 BD 交 AE 于点 G , FH 平分 $\angle BFG$ 交 BD 于点 H . 则下列结论中, 正确的个数为 ()



① $AB^2 = BF \cdot AE$; ② $S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2 : 3$; ③ 当 $AB = a$ 时, $BD^2 - BD \cdot HD = a^2$

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】D

【解析】

【分析】①根据题意可得 $\angle ABF = 90^\circ - \angle BAF = \angle DAE$, 则 $\cos \angle ABF = \cos \angle EAD$, 即 $\frac{BF}{AB} = \frac{AD}{AE}$,

又 $AB = AD$, 即可判断①; ②设正方形的边长为 a , 根据勾股定理求得 AF , 证明 $\triangle GAB \sim \triangle GED$, 根据相似三角形的性质求得 GE , 进而求得 FG , 即可判断②; 过点 H 分别作 BF, AE 的垂线, 垂足分别为 M, N , 根据②的结论求得 BH , 勾股定理求得 BD , 即可判断③.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ, \quad AB = AD$$

$$\therefore BF \perp AE$$

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ - \angle BAF = \angle DAE$$

$$\therefore \cos \angle ABF = \cos \angle EAD$$

$$\text{即 } \frac{BF}{AB} = \frac{AD}{AE}, \quad \text{又 } AB = AD,$$

$$\therefore AB^2 = BF \cdot AE, \quad \text{故①正确;}$$

设正方形的边长为 a ,

$\because$ 点 E 为边 CD 的中点,

$$\therefore DE = \frac{a}{2},$$

$$\therefore \tan \angle ABF = \tan \angle EAD = \frac{1}{2},$$

$$\text{在 Rt} \triangle ABE \text{ 中, } AB = \sqrt{AF^2 + BF^2} = \sqrt{5}AF = a,$$

$$\therefore AF = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

$$\text{在 Rt} \triangle ADE \text{ 中, } AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

$$\therefore EF = AE - AF = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{5}a = \frac{3\sqrt{5}}{10}a,$$

$$\therefore AB \parallel DE$$

$$\therefore \triangle GAB \sim \triangle GED$$

$$\therefore \frac{AG}{GE} = \frac{AB}{DE} = 2$$

$$\therefore GE = \frac{1}{3}AE = \frac{\sqrt{5}}{6}a$$

$$\therefore FG = AE - AF - GE = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{\sqrt{5}}{5}a - \frac{\sqrt{5}}{6}a = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$$

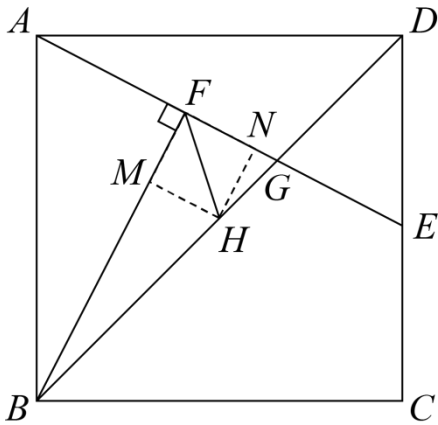
$$\therefore \frac{AF}{FG} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}a}{\frac{2\sqrt{5}}{15}a} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle BGF} : S_{\triangle BAF} = 2 : 3, \text{ 故②正确;}$$

$$\therefore AB = a,$$

$$\therefore BD^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2,$$

如图所示，过点 H 分别作 BF, AE 的垂线，垂足分别为 M, N ，



又 $\because BF \perp AE$,

$\therefore$ 四边形 $FMHN$ 是矩形,

$\therefore FH$ 是 $\angle BFG$ 的角平分线,

$$\therefore HM = HN,$$

$\therefore$ 四边形 $FMHN$ 是正方形,

$$\therefore FN = HM = HN$$

$$\therefore BF = 2AF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a, FG = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$$

$$\therefore \frac{MH}{BM} = \frac{FG}{BF} = \frac{1}{3}$$

设 $MH = b$ ，则 $BF = BM + FM = BM + MH = 3b + b = 4b$

在 $\text{Rt}\triangle BMH$ 中， $BH = \sqrt{BM^2 + MH^2} = \sqrt{10}b$ ，

$$\therefore BF = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{5}a = 4b$$

$$\text{解得: } b = \frac{\sqrt{5}}{10}a$$

$$\therefore BH = \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{5}}{10}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\therefore BD^2 - BD \cdot HD = 2a^2 - \sqrt{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = a^2, \text{ 故④正确.}$$

故选：D.

【点睛】本题考查了解直角三角形，相似三角形的性质与判定，正方形的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

二、填空题

13. 因式分解： $x^2 + xy - xz - yz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x+y)(x-z)$

【解析】

【分析】先分组，然后根据提公因式法，因式分解即可求解.

【详解】解： $x^2 + xy - xz - yz = x(x+y) - z(x+y) = (x+y)(x-z)$,

故答案为： $(x+y)(x-z)$.

【点睛】本题考查了因式分解，熟练掌握因式分解的方法是解题的关键.

14. 若式子 $\frac{\sqrt{x+5}}{x}$ 有意义，则 x 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x \geq -5$ 且 $x \neq 0$

【解析】

【分析】根据分母不为零，二次根式的被开方数是非负数，列出不等式计算即可.

【详解】 $\because$ 式子 $\frac{\sqrt{x+5}}{x}$ 有意义,

$$\therefore x+5 \geq 0 \text{ 且 } x \neq 0,$$

$\therefore x \geq -5$ 且 $x \neq 0$,

故答案为: $x \geq -5$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】本题考查了分母不为零, 二次根式的被开方数是非负数, 熟练掌握二次根式和分式有意义的条件是解题的关键.

15. 在4张完全相同的卡片上, 分别标出1, 2, 3, 4, 从中随机抽取1张后, 放回再混合在一起. 再随机抽取一张, 那么第二次抽取卡片上的数字能够整除第一次抽取卡片上的数字的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{2}$ 或 0.5

【解析】

【分析】根据题意列表法求概率即可求解.

【详解】解: 列表如下,

	1	2	3	4
1	$\frac{1}{1} = 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{2}{1} = 2$	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
3	$\frac{3}{1} = 3$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3} = 1$	$\frac{3}{4}$
4	$\frac{4}{1} = 4$	$\frac{4}{2} = 2$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4} = 1$

共有 16 种等可能结果, 符合题意的有 8 种,

$\therefore$ 第二次抽取卡片上的数字能够整除第一次抽取卡片上的数字的概率是 $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查了列表法求概率, 整除, 熟练掌握列表法求概率是解题的关键.

16. 已知一元二次方程 $x^2 + x = 5x + 6$ 的两根为 x_1 与 x_2 , 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为_____.

【答案】 $-\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = 4$, $x_1 x_2 = -6$, 将分式通分, 代入即可求解.

【详解】解: $\because$ 一元二次方程 $x^2 + x = 5x + 6$, 即 $x^2 - 4x - 6 = 0$, 的两根为 x_1 与 x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 4, \quad x_1 x_2 = -6,$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{-6} = -\frac{2}{3},$$

故答案为： $-\frac{2}{3}$.

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，一元二次方程根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

17. 化简： $\left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4} \right) \div \frac{x-4}{x^2-2x} = \underline{\hspace{2cm}} .$

【答案】 $\frac{1}{x-2} \div \frac{1}{-2+x}$

【解析】

【分析】 先根据分式的加减计算括号内的，同时将除法转化为乘法，再根据分式的性质化简即可求解.

【详解】 解： $\left(\frac{x+2}{x^2-2x} - \frac{x-1}{x^2-4x+4} \right) \div \frac{x-4}{x^2-2x}$

$$= \frac{(x+2)(x-2) - x(x-1)}{x(x-2)^2} \times \frac{x(x-2)}{x-4}$$

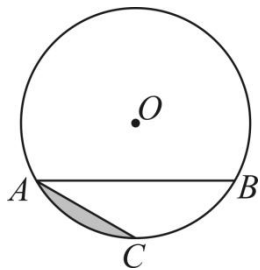
$$= \frac{x^2 - 4 - x^2 + x}{x(x-2)^2} \times \frac{x(x-2)}{x-4}$$

$$= \frac{1}{x-2};$$

故答案为： $\frac{1}{x-2}$.

【点睛】 本题考查了分式的混合运算，熟练掌握分式的运算法则是解题的关键.

18. 如图， $\odot O$ 的半径为 2 cm， AB 为 $\odot O$ 的弦，点 C 为 $\widehat{AB}$ 上的一点，将 $\widehat{AB}$ 沿弦 AB 翻折，使点 C 与圆心 O 重合，则阴影部分的面积为 $\underline{\hspace{2cm}}$. (结果保留 π 与根号)

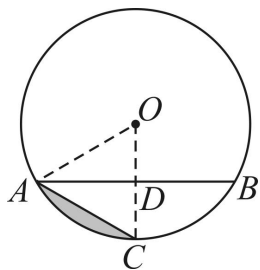


【答案】 $\left(\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} \right) \text{cm}^2$

【解析】

【分析】根据折叠的性质得出 $\triangle AOC$ 是等边三角形，则 $\angle AOC = 60^\circ$ ， $OD = CD = 1$ ，根据阴影部分面积 $= S_{\text{扇形}AOC} - S_{\triangle AOC}$ 即可求解。

【详解】解：如图所示，连接 OA, OC ，设 AB, CO 交于点 D



$\therefore$ 将 $\widehat{AB}$ 沿弦 AB 翻折，使点 C 与圆心 O 重合，

$\therefore AC = AO$ ， $OC \perp AB$

又 $OA = OC$

$\therefore OA = OC = AC$ ，

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形，

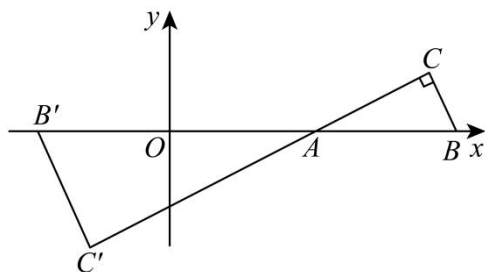
$\therefore \angle AOC = 60^\circ$ ， $OD = CD = 1$ ，

$\therefore AD = \sqrt{AO^2 - CD^2} = \sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 阴影部分面积 $= S_{\text{扇形}AOC} - S_{\triangle AOC} = \frac{60}{360} \pi \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2}{3} \pi - \sqrt{3} (\text{cm}^2)$

故答案为： $\left(\frac{2}{3} \pi - \sqrt{3}\right) \text{cm}^2$ 。

19. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 与 $\triangle AB'C'$ 的相似比为 1:2，点 A 是位似中心，已知点 $A(2,0)$ ，点 $C(a,b)$ ， $\angle C = 90^\circ$ 。则点 C' 的坐标为_____。（结果用含 a ， b 的式子表示）



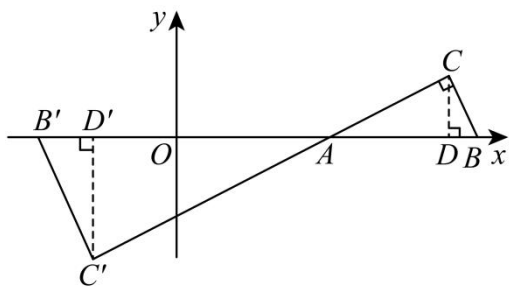
【答案】 $(6-2a, -2b)$

【解析】

【分析】过点 C, C' 分别作 x 轴的垂线 $CD, C'D'$ 垂足分别为 D, D' ，根据题意得出 $AD' = 2AD$ ，则

$AD = a - 2, CD = b$, 得出 $D'(2 - 2a + 4, 0)$, 即可求解.

【详解】解：如图所示，过点 C, C' 分别作 x 轴的垂线 $CD, C'D'$ 垂足分别为 D, D' ,



$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 $1:2$, 点 A 是位似中心, $A(2,0)$

$\therefore AD' = 2AD$

$\because C(a,b)$,

$\therefore AD = a - 2, CD = b$,

$\therefore AD' = 2a - 4, C'D' = 2b$,

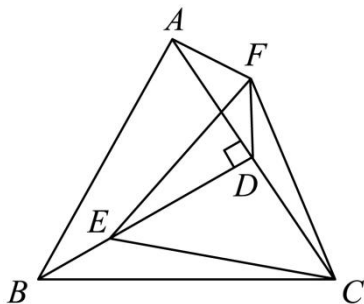
$\therefore D'(2 - 2a + 4, 0)$

$\therefore C'(6 - 2a, -2b)$

故答案为: $(6 - 2a, -2b)$.

【点睛】本题考查了求位似图形的坐标, 熟练掌握位似图形的性质是解题的关键.

20. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形, 点 E 为高 BD 上的动点. 连接 CE , 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . 连接 AF , EF , DF , 则 $\triangle CDF$ 周长的最小值是_____.



【答案】 $3 + 3\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据题意, 证明 $\triangle CBE \cong \triangle CAF$, 进而得出 F 点在射线 AF 上运动, 作点 C 关于 AF 的对称点 C' , 连接 DC' , 设 CC' 交 AF 于点 O , 则 $\angle AOC = 90^\circ$, 则当 D, F, C' 三点共线时, $FC + FD$ 取得最小值,

即 $FC + FD = F'C' + F'D = CD'$ ，进而求得 $C'D$ ，即可求解.

【详解】解：∵ E 为高 BD 上的动点.

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$$

∴ 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 CF . $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形,

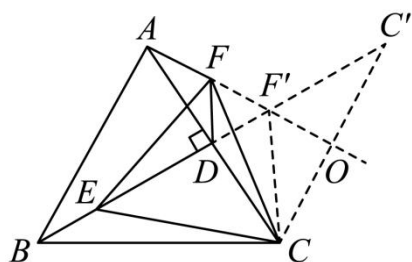
$$\therefore CE = CF, \angle ECF = \angle BCA = 60^\circ, BC = AC$$

$$\therefore \triangle CBE \cong \triangle CAF$$

$$\therefore \angle CAF = \angle CBE = 30^\circ,$$

∴ F 点在射线 AF 上运动,

如图所示,



作点 C 关于 AF 的对称点 C' ，连接 DC' ，设 CC' 交 AF 于点 O ，则 $\angle AOC = 90^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\angle CAO = 30^\circ$ ，则 $CO = \frac{1}{2} AC = 3$ ，

则当 D, F, C' 三点共线时， $FC + FD$ 取得最小值，即 $FC + FD = F'C' + F'D = CD'$

$$\because CC' = AC = 6, \angle ACO = \angle C'CD, CO = CD$$

$$\therefore \triangle ACO \cong \triangle C'CD$$

$$\therefore \angle C'DC = \angle AOC = 90^\circ$$

$$\text{在 } \triangle C'DC \text{ 中, } C'D = \sqrt{CC'^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle CDF \text{ 周长的最小值为 } CD + FC + CD = CD + DC' = 3 + 3\sqrt{3},$$

故答案为: $3 + 3\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了轴对称求线段和的最值问题，等边三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，勾股定理，熟练掌握等边三角形的性质与判定以及轴对称的性质是解题的关键.

21. 在求 $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ 的值时，发现： $1 + 100 = 101$ ， $2 + 99 = 101 \dots$ ，从而得到

$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 101 \times 50 = 5050$. 按此方法可解决下面问题. 图 (1) 有 1 个三角形，记作 $a_1 = 1$ ；分

别连接这个三角形三边中点得到图 (2)，有 5 个三角形，记作 $a_2 = 5$ ；再分别连接图 (2) 中间的小三角形

三边中点得到图 (3)，有 9 个三角形，记作 $a_3 = 9$ ；按此方法继续下去，则

$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果用含 n 的代数式表示)

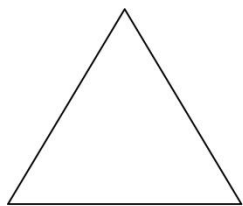


图 (1)

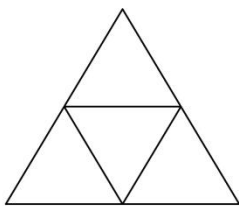


图 (2)

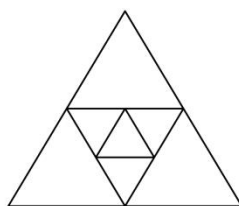


图 (3)

.....

【答案】 $2n^2 - n$

【解析】

【分析】 根据题意得出 $a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$ ，进而即可求解.

【详解】 解：依题意， $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 9, \dots, a_n = 1 + 4(n-1) = 4n - 3$ ，

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{1 + 4n - 3}{2} n = (2n - 1)n = 2n^2 - n,$$

故答案为： $2n^2 - n$.

【点睛】 本题考查了图形类规律，找到规律是解题的关键.

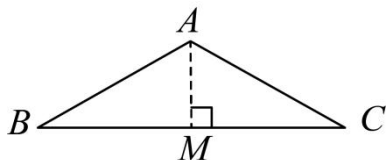
22. 已知等腰 $\triangle ABC$ ， $\angle A = 120^\circ$ ， $AB = 2$. 现将 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心旋转 45° ， 得到 $\triangle A'BC'$ ， 延长 $C'A'$ 交直线 BC 于点 D . 则 $A'D$ 的长度为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $4 + 2\sqrt{3}$ 或 $4 - 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 根据题意，先求得 $BC = 2\sqrt{3}$ ，当 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心逆时针旋转 45° ，过点 B 作 $BE \perp A'B$ 交 $A'D$ 于点 E ，当 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心顺时针旋转 45° ，过点 D 作 $DF \perp BC'$ 交 BC' 于点 F ，分别画出图形，根据勾股定理以及旋转的性质即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，



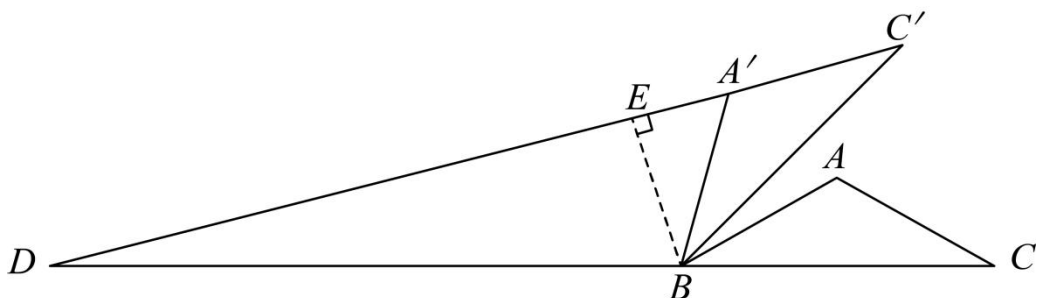
$\because$ 等腰 $\triangle ABC$ ， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = 2$.

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$ ，

$$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = 1, \quad BM = CM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3},$$

如图所示，当 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心逆时针旋转 45° ，过点 B 作 $BE \perp A'B$ 交 $A'D$ 于点 E ，



$$\therefore \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DA'B = 60^\circ, \quad \angle A'EB = 30^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle A'BE \text{ 中, } A'E = 2A'B = 4, \quad BE = \sqrt{A'E^2 - A'B^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{等腰 } \triangle ABC, \quad \angle BAC = 120^\circ, \quad AB = 2.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 以点 } B \text{ 为旋转中心逆时针旋转 } 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABA' = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ, \quad \angle A'BD = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ$$

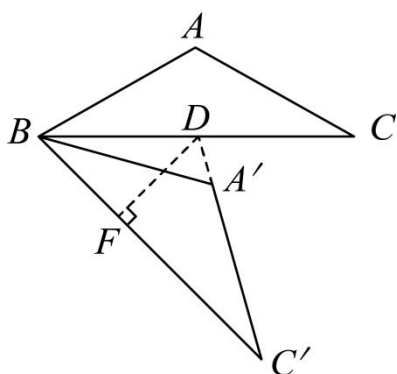
$$\text{在 } \triangle A'BD \text{ 中, } \angle D = 180^\circ - \angle DA'B - \angle A'BD = 180^\circ - 60^\circ - 105^\circ = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle D = \angle EBD,$$

$$\therefore EB = ED = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore A'D = A'E + DE = 4 + 2\sqrt{3},$$

如图所示，当 $\triangle ABC$ 以点 B 为旋转中心顺时针旋转 45° ，过点 D 作 $DF \perp BC'$ 交 BC' 于点 F ，



$$\text{在 } \triangle BFD \text{ 中, } \angle BDF = \angle CBC' = 45^\circ,$$

$$\therefore DF = BF$$

在 $\text{Rt}\triangle DC'F$ 中, $\angle C' = 30^\circ$

$$\therefore DF = \frac{\sqrt{3}}{3} FC'$$

$$\therefore BC = BF + \sqrt{3}BF = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore DF = BF = 3 - \sqrt{3}$$

$$\therefore DC' = 2DF = 6 - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore A'D = C'D - A'C' = 6 - 2\sqrt{3} - 2 = 4 - 2\sqrt{3},$$

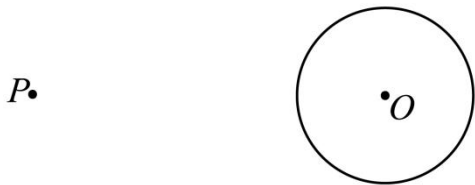
综上所述, $A'D$ 的长度为 $4 - 2\sqrt{3}$ 或 $4 + 2\sqrt{3}$,

故答案为: $4 - 2\sqrt{3}$ 或 $4 + 2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了旋转的性质, 勾股定理, 含 30° 度角的直角三角形的性质, 熟练掌握旋转的性质, 分类讨论是解题的关键.

三、解答题

23. 已知: 点 P 是 $\odot O$ 外一点.



(1) 尺规作图: 如图, 过点 P 作出 $\odot O$ 的两条切线 PE , PF , 切点分别为点 E 、点 F . (保留作图痕迹, 不要求写作法和证明)

(2) 在 (1) 的条件下, 若点 D 在 $\odot O$ 上 (点 D 不与 E , F 两点重合), 且 $\angle EPF = 30^\circ$. 求 $\angle EDF$ 的度数.

【答案】(1) 见解析 (2) $\angle EDF = 75^\circ$ 或 105°

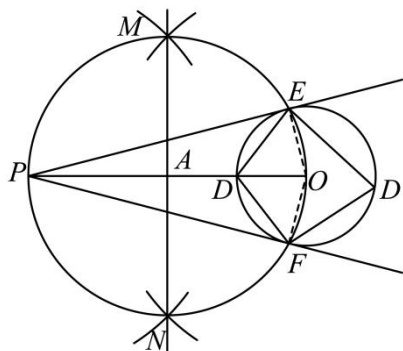
【解析】

【分析】(1) ①连接 PO , 分别以点 P, O 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}PO$ 的长为半径画圆, 两圆交于点 M, N 两点, 作直线 MN 交 OP 于点 A , ②以点 A 为圆心, OA 为半径画圆, 与 $\odot O$ 交于 E, F 两点, 作直线 PE, PF ,

(2) 根据切线的性质得出 $\angle PEO = \angle PFO = 90^\circ$, 根据四边形内角和得出 $\angle EOF = 150^\circ$, 进而根据圆周角定理以及圆内接四边形对角互补即可求解.

【小问 1 详解】

解：如图所示，



①连接 PO ，分别以点 P, O 为圆心，大于 $\frac{1}{2}PO$ 的长为半径画弧，两弧交于点 M, N 两点，作直线 MN 交 OP 于点 A ，

②以点 A 为圆心， OA 为半径画圆，与 $\odot O$ 交于 E, F 两点，作直线 PE, PF ，

则直线 PE, PF 即为所求；

【小问 2 详解】

如图所示，点 D 在 $\odot O$ 上（点 D 不与 E, F 两点重合），且 $\angle EPF = 30^\circ$ ，

$\therefore PE, PF$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle PEO = \angle PFO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle EOF = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ，

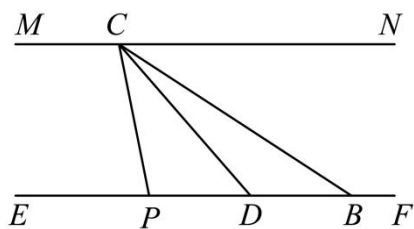
当点 D 在优弧 $\widehat{EF}$ 上时， $\angle EDF = \frac{1}{2}\angle EOF = 75^\circ$ ，

当点 D 在劣弧 $\widehat{EF}$ 上时， $\angle EDF = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ ，

$\therefore \angle EDF = 75^\circ$ 或 105° 。

【点睛】本题考查了切线的性质与判定，直径所对的圆周角是直角，圆内接四边形对角互补，圆周角定理，熟练掌握以上知识是解题的关键。

24. 如图，直线 MN 和 EF 为河的两岸，且 $MN \parallel EF$ ，为了测量河两岸之间的距离，某同学在河岸 FE 的 B 点测得 $\angle CBE = 30^\circ$ ，从 B 点沿河岸 FE 的方向走 40 米到达 D 点，测得 $\angle CDE = 45^\circ$ 。



(1) 求河两岸之间的距离是多少米？（结果保留根号）

(2) 若从 D 点继续沿 DE 的方向走 $(12\sqrt{3} + 12)$ 米到达 P 点. 求 $\tan \angle CPE$ 的值.

【答案】(1) 河两岸之间的距离是 $20\sqrt{3} + 20$ 米

$$(2) \tan \angle CPE = \frac{5}{2}$$

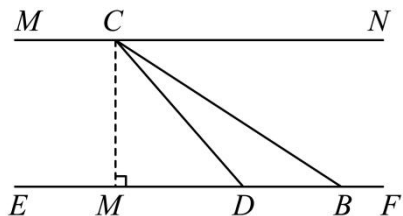
【解析】

【分析】(1) 过点 C 作 $CM \perp EF$ 于点 M , 设 $CM = a$ 米, 在 $\text{Rt}\triangle MCB$ 中, $MB = \sqrt{3}a$, 在 $\text{Rt}\triangle MCD$ 中, $MD = MC = a$, 根据 $BD = 40$, 建立方程, 解方程即可求解;

(2) 根据题意求得 MP 的长, 进而根据正切的定义, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图所示,



过点 C 作 $CM \perp EF$ 于点 M , 设 $CM = a$ 米,

$$\because \angle CBE = 30^\circ$$

$$\therefore \tan \angle CBM = \frac{CM}{MB} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore MB = \sqrt{3}a,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle MCD \text{ 中, } \tan \angle CDM = \frac{CM}{MD} = \tan 45^\circ = 1,$$

$$\therefore MD = MC = a$$

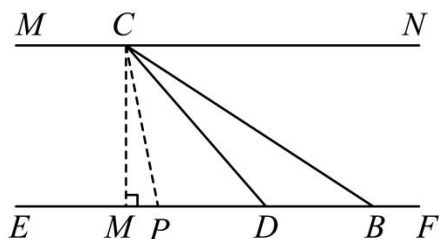
$$\therefore BD = MB - MD = \sqrt{3}a - a = 40$$

$$\text{解得: } a = 20\sqrt{3} + 20$$

答: 河两岸之间的距离是 $20\sqrt{3} + 20$ 米;

【小问 2 详解】

解: 如图所示,



依题意, $PB = BD + DP = 40 + (12\sqrt{3} + 12) = 52 + 12\sqrt{3}$,

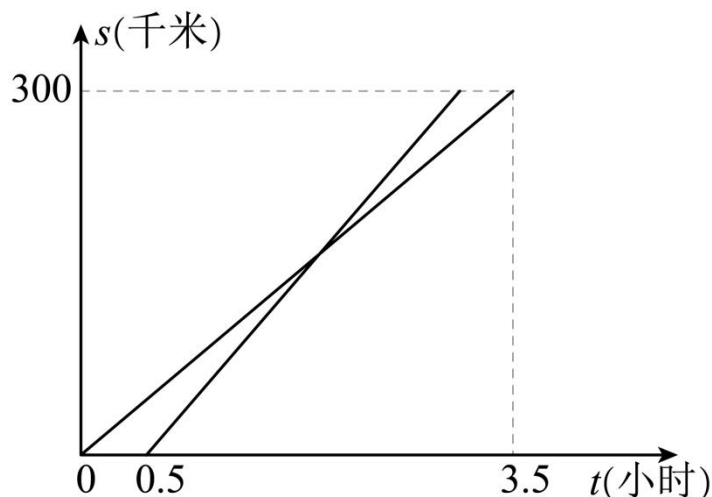
$$\therefore MP = MB - PB = (20\sqrt{3} + 20)\sqrt{3} - (52 + 12\sqrt{3}) = 8 + 8\sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CMP \text{ 中, } \tan \angle CPM = \frac{CM}{MP} = \frac{20\sqrt{3} + 20}{8 + 8\sqrt{3}} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \tan \angle CPE = \frac{5}{2}.$$

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用, 熟练掌握三角函数关系是解题的关键.

25. 某校组织师生参加夏令营活动, 现准备租用 A、B 两型客车 (每种型号的客车至少租用一辆). A 型车每辆租金 500 元, B 型车每辆租金 600 元. 若 5 辆 A 型和 2 辆 B 型车坐满后共载客 310 人; 3 辆 A 型和 4 辆 B 型车坐满后共载客 340 人.



- (1) 每辆 A 型车、B 型车坐满后各载客多少人?
- (2) 若该校计划租用 A 型和 B 型两种客车共 10 辆, 总租金不高于 5500 元, 并将全校 420 人载至目的地. 该校有几种租车方案? 哪种租车方案最省钱?
- (3) 在这次活动中, 学校除租用 A、B 两型客车外, 又派出甲、乙两辆器材运输车. 已知从学校到夏令营目的地的路程为 300 千米, 甲车从学校出发 0.5 小时后, 乙车才从学校出发, 却比甲车早 0.5 小时到达目的地. 下图是两车离开学校的路程 s (千米) 与甲车行驶的时间 t (小时) 之间的函数图象. 根据图象信息, 求甲乙两车第一次相遇后, t 为何值时两车相距 25 千米.

【答案】 (1) 每辆 A 型车、B 型车坐满后各载客 40 人、55 人

(2) 共有 4 种租车方案, 租 8 辆 A 型车, 2 辆 B 型车最省钱

(3) 在甲乙两车第一次相遇后，当 $t = 3$ 小时或 $\frac{11}{3}$ 小时，两车相距 25 千米

【解析】

【分析】(1) 设每辆 A 型车、B 型车坐满后各载客 x 人、 y 人，由题意列出二元一次方程组，解方程组即可求解；

(2) 设租用 A 型车 m 辆，则租用 B 型车 $(10-m)$ 辆，由题意列出一元一次不等式组，解不等式组，求整数解即可得出 m 的值，设总租金为 w 元，根据一次函数的性质即可求解；

(3) 设 $s_{\text{甲}} = kt$ ， $s_{\text{乙}} = k_1t + b$ ，由题意可知，甲车的函数图像经过 $(4, 300)$ ；乙车的函数图像经过 $(0.5, 0)$ ， $(3.5, 300)$ 两点，求出函数解析式，进而即可求解。

【小问 1 详解】

解：设每辆 A 型车、B 型车坐满后各载客 x 人、 y 人，由题意得

$$\begin{cases} 5x + 2y = 310 \\ 3x + 4y = 340 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 40 \\ y = 55 \end{cases}$$

答：每辆 A 型车、B 型车坐满后各载客 40 人、55 人。

【小问 2 详解】

设租用 A 型车 m 辆，则租用 B 型车 $(10-m)$ 辆，由题意得

$$\begin{cases} 500m + 600(10-m) \leq 5500 \\ 40m + 55(10-m) \geq 420 \end{cases} \quad \text{解得：} 5 \leq m \leq 8\frac{2}{3}$$

$\because m$ 取正整数，

$\therefore m = 5, 6, 7, 8$

$\therefore$ 共有 4 种租车方案

设总租金为 w 元，则 $w = 500m + 600(10-m) = -100m + 6000$

$\because -100 < 0$

$\therefore w$ 随着 m 的增大而减小

$\therefore m = 8$ 时， w 最小

$\therefore$ 租 8 辆 A 型车，2 辆 B 型车最省钱。

【小问 3 详解】

设 $s_{\text{甲}} = kt$, $s_{\text{乙}} = k_1t + b$.

由题意可知，甲车的函数图象经过 $(4, 300)$ ；乙车的函数图象经过 $(0.5, 0)$, $(3.5, 300)$ 两点.

$$\therefore s_{\text{甲}} = 75t, \quad s_{\text{乙}} = 100t - 50$$

$$s_{\text{乙}} - s_{\text{甲}} = 25, \quad \text{即 } 100t - 50 - 75t = 25$$

$$\text{解得 } t = 3$$

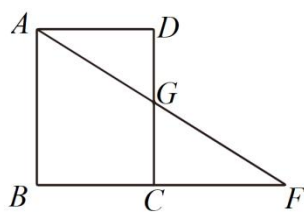
$$\text{或 } 300 - 75t = 25$$

$$\text{解得 } t = \frac{11}{3}$$

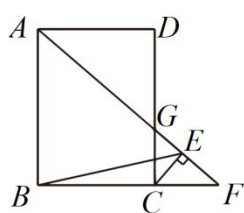
所以，在甲乙两车第一次相遇后，当 $t = 3$ 小时或 $\frac{11}{3}$ 小时时，两车相距 25 千米.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，一次函数的应用，根据题意找到等量关系，列出方程组，不等式组，以及函数解析式是解题的关键.

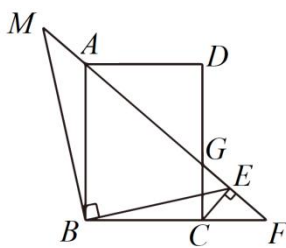
26. 已知：四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 4$, $AD = 3$ ，点 F 是 BC 延长线上的一个动点（点 F 不与点 C 重合），连接 AF 交 CD 于点 G .



图一



图二



图三

- (1) 如图一，当点 G 为 CD 的中点时，求证： $\triangle ADG \cong \triangle FCG$.
- (2) 如图二，过点 C 作 $CE \perp AF$ ，垂足为 E 。连接 BE ，设 $BF = x$ ， $CE = y$ 。求 y 关于 x 的函数关系式.
- (3) 如图三，在 (2) 的条件下，过点 B 作 $BM \perp BE$ ，交 FA 的延长线于点 M 。当 $CF = 1$ 时，求线段 BM 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $y = \frac{4x-12}{\sqrt{x^2+16}}$ (或 $y = \frac{(4x-12)\sqrt{x^2+16}}{x^2+16}$)

(3) $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得出 $AD \parallel BF$ ，则 $\angle D = \angle DCF$ ，根据题意得出 $DG = CG$ ，即可证明

$$\triangle ADG \cong \triangle FCG(\text{ASA});$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle ABF$ 中, $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{x^2 + 16}$, 证明 $\triangle CEF \sim \triangle ABF$, 根据相似三角形的性质即可求解;

(3) 过点 E 作 $EN \perp BF$ 于点 N , 得出 $\triangle ABF$, $\triangle CEF$ 为等腰直角三角形, 在 $\text{Rt}\triangle BNE$ 中, 勾股定理求得 BE , 证明 $\triangle BAM \sim \triangle BCE$, 根据相似三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore AD \parallel BF,$$

$$\therefore \angle D = \angle DCF,$$

$$\because G \text{ 为 } CD \text{ 中点},$$

$$\therefore DG = CG,$$

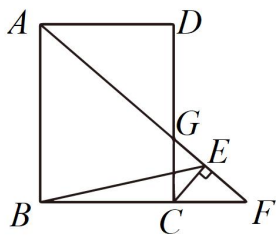
在 $\triangle ADG$ 和 $\triangle FCG$ 中

$$\begin{cases} \angle D = \angle GCF \\ DG = CG \\ \angle AGD = \angle FGC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle FCG(\text{ASA});$$

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,



$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because CE \perp AF,$$

$$\therefore \angle CEF = 90^\circ = \angle ABC,$$

$$\because \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{CF}{AF},$$

$$\therefore AB = 4, \quad BF = x,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABF \text{ 中, } AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{x^2 + 16},$$

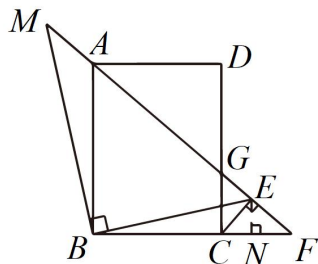
$$\therefore CE = y,$$

$$\therefore \frac{y}{4} = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+16}},$$

$$\therefore y = \frac{4x-12}{\sqrt{x^2+16}} \quad (\text{或 } y = \frac{(4x-12)\sqrt{x^2+16}}{x^2+16});$$

【小问 3 详解】

过点 E 作 $EN \perp BF$ 于点 N ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形, 且 $AD = 3$,

$$\therefore AD = BC = 3,$$

$$\therefore AB = 4, \quad CF = 1,$$

$$\therefore AB = BF,$$

$\therefore \triangle ABF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CFE = \angle BAF = 45^\circ,$$

$$\therefore CE \perp AF,$$

$\therefore \triangle CEF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle ECF = 45^\circ,$$

$$\therefore EN \perp CF,$$

$$\therefore EN \text{ 平分 } CF,$$

$$\therefore CN = NF = NE = \frac{1}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle BNE$ 中,

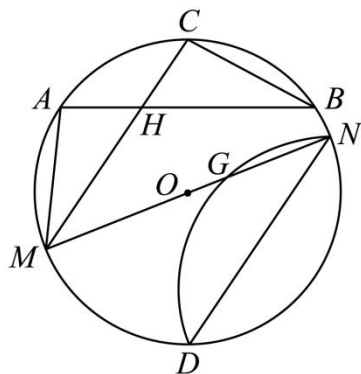
$$\therefore BE^2 = BN^2 + EN^2,$$

$$\therefore BE = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\begin{aligned}
&\because \angle ECF = \angle BAF = 45^\circ, \\
&\therefore \angle BAM = \angle BCE = 135^\circ, \\
&\because BM \perp BE, \\
&\therefore \angle MBA + \angle ABE = 90^\circ, \\
&\because \angle ABE + \angle EBC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle MBA = \angle EBC, \\
&\therefore \triangle BAM \sim \triangle BCE, \\
&\therefore \frac{BM}{BE} = \frac{BA}{BC} = \frac{4}{3}, \\
&\frac{BM}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3}, \\
&\therefore BM = \frac{10\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

【点睛】本题考查了矩形的性质，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，列函数关系式，勾股定理，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键。

27. 如图， MN 为 $\odot O$ 的直径，且 $MN = 15$ ， MC 与 ND 为圆内的一组平行弦，弦 AB 交 MC 于点 H 。点 A 在 MC 上，点 B 在 NC 上， $\angle OND + \angle AHM = 90^\circ$ 。



(1) 求证： $MH \cdot CH = AH \cdot BH$ 。

(2) 求证： $\widehat{AC} = \widehat{BC}$ 。

(3) 在 $\odot O$ 中，沿弦 ND 所在的直线作劣弧 $\widehat{ND}$ 的轴对称图形，使其交直径 MN 于点 G 。若 $\sin \angle CMN = \frac{3}{5}$ ，求 NG 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\frac{21}{5}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle AMH \sim \triangle CBH$ 即可；

(2) 连接 OC ，交 AB 于点 F ，根据平行线的性质和已知条件证明垂直平分即可；

(3) 利用对称的性质作辅助线，根据已知条件，转化为解直角三角形问题即可．

【小问 1 详解】

$\because \angle ABC$ 和 $\angle AMC$ 是 $\widehat{AC}$ 所对的圆周角，

$$\therefore \angle ABC = \angle AMC,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle CHB,$$

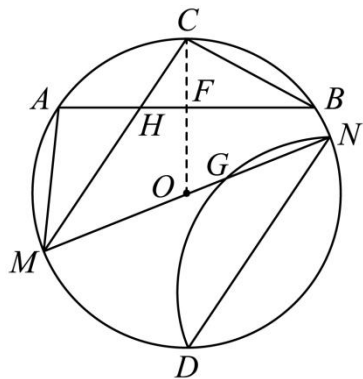
$$\therefore \triangle AMH \sim \triangle CBH,$$

$$\therefore \frac{AH}{CH} = \frac{MH}{BH},$$

$$\therefore MH \cdot CH = AH \cdot BH.$$

【小问 2 详解】

连接 OC ，交 AB 于点 F ，



$\because MC$ 与 ND 为一组平行弦，即： $MC \parallel ND$ ，

$$\therefore \angle OND = \angle OMC,$$

$$\because OM = OC,$$

$$\therefore \angle OMC = \angle OCM,$$

$$\therefore \angle OND + \angle AHM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCM + \angle AHM = \angle OCM + \angle CHB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle HFC = 90^\circ,$$

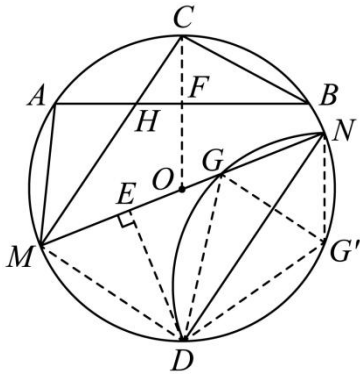
$$\therefore OC \perp AB,$$

$\therefore OC$ 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{BC}.$$

【小问 3 详解】

连接 DM 、 DG ，过点 D 作 $DE \perp MN$ ，垂足为 E ，设点 G 的对称点 G' ，连接 GD 、 $G'N$ ，



$$\because DG = DG', \angle GND = \angle G'ND,$$

$$\therefore \widehat{DM} = \widehat{DG'},$$

$$\therefore DG = DM,$$

$$\therefore \triangle DGM \text{ 是等腰三角形,}$$

$$\because DE \perp MN,$$

$$\therefore GE = ME,$$

$$\because DN \parallel CM,$$

$$\therefore \angle CMN = \angle DNM,$$

$$\because MN \text{ 为直径,}$$

$$\therefore \angle MDN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDE + \angle EDN = 90^\circ,$$

$$\because DE \perp MN,$$

$$\therefore \angle DEN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DNM + \angle EDN = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin \angle EDM = \sin \angle DNM = \sin \angle CMN = \frac{3}{5},$$

$$\text{在 } Rt \triangle MND \text{ 中, } MN = 15,$$

$$\therefore \sin \angle DNM = \frac{MD}{MN} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \frac{MD}{15} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore MD = 9,$$

$$\text{在 } Rt \triangle MED \text{ 中, } \sin \angle EDM = \frac{3}{5} = \frac{ME}{MD},$$

$$\therefore \frac{ME}{9} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore ME = \frac{27}{5},$$

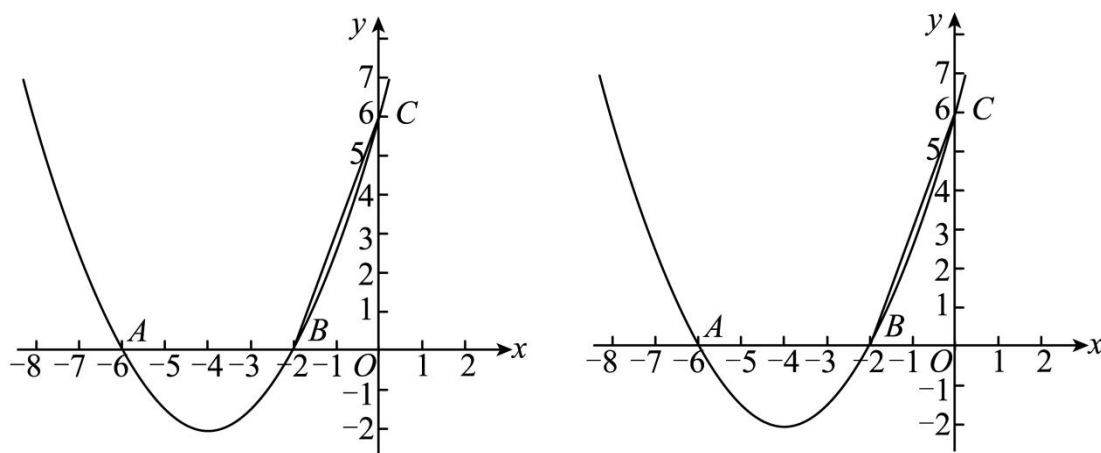
$$\therefore NG = MN - MG = MN - 2ME = 15 - 2 \times \frac{27}{5} = \frac{21}{5}$$

$$\therefore NG = \frac{21}{5}$$

故答案为： $\frac{21}{5}$.

【点睛】 本题考查了圆的综合问题，同弧所对圆周角相等、构建合适的辅助线是解题的关键；熟练掌握相似三角形的判定与性质、垂直平分线的性质、熟悉锐角三角函数解决直角三角形.

28. 如图，抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 的图象经过 $A(-6, 0)$ ， $B(-2, 0)$ ， $C(0, 6)$ 三点， 且一次函数 $y = kx + 6$ 的图象经过点 B .



(1) 求抛物线和一次函数的解析式.

(2) 点 E ， F 为平面内两点，若以 E 、 F 、 B 、 C 为顶点的四边形是正方形，且点 E 在点 F 的左侧. 这样的 E ， F 两点是否存在？如果存在，请直接写出所有满足条件的点 E 的坐标；如果不存在，请说明理由.

(3) 将抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 的图象向右平移 8 个单位长度得到抛物线 y_2 ，此抛物线的图象与 x 轴交于 M ， N 两点 (M 点在 N 点左侧). 点 P 是抛物线 y_2 上的一个动点且在直线 NC 下方. 已知点 P 的横坐标为 m . 过点 P 作 $PD \perp NC$ 于点 D . 求 m 为何值时， $CD + \frac{1}{2}PD$ 有最大值，最大值是多少？

【答案】 (1) $y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$ ， $y = 3x + 6$

(2) 满足条件的 E 、 F 两点存在， $E_1(-8, 2)$ ， $E_2(4, -2)$ ， $E_3(-4, 4)$

(3) 当 $m = \frac{13}{3}$ 时， $CD + \frac{1}{2}PD$ 的最大值为 $\frac{169\sqrt{2}}{24}$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) ①当 BC 为正方形的边长时，分别过 B 点 C 点作 $E_1E_2 \perp BC$ ， $F_1F_2 \perp BC$ ，使 $E_1B = E_2B = BC$ ， $CF_1 = CF_2 = BC$ ，连接 E_1F_1 、 E_2F_2 ，证明 $\triangle BE_1H_1 \cong \triangle CBO$ (AAS)，得出 $E_1H_1 = BO = 2$ ， $H_1B = OC = 6$ ，则 $E_1(-8, 2)$ 同理可得， $E_2(4, -2)$ ；②以 BC 为正方形的对角线时，过 BC 的中点 G 作 $E_3F_3 \perp BC$ ，使 E_3F_3 与 BC 互相平分且相等，则四边形 E_3BF_3C 为正方形，过点 E_3 作 $E_3N \perp y$ 轴于点 N ，过点 B 作 $BM \perp E_3N$ 于点 M ，证明 $\triangle CE_3N \cong \triangle E_3BM$ (AAS)，得出 $E_3B = 2\sqrt{5}$ ，在 $\text{Rt}\triangle E_3NC$ 中， $E_3C^2 = CN^2 + E_3N^2$ ，解得 $CN = 2$ 或 4 ，进而即可求解；

(3) 得出 $\triangle CON$ 是等腰直角三角形， $\triangle HPD$ 是等腰直角三角形，则 $HD = DP = \frac{\sqrt{2}}{2} HP$ ，点 P 在抛物线 y_2 上，且横坐标为 m ，得出 $H(m, -m+6)$ ，进而可得 $HD = DP = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{2}m^2 + 3m \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}m^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}m$ ，则 $CD + \frac{1}{2}PD = -\frac{3\sqrt{2}}{8} \left(m - \frac{13}{3} \right)^2 + \frac{169\sqrt{2}}{24}$ ，根据二次函数的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：把 $A(-6, 0)$ ， $B(-2, 0)$ ， $C(0, 6)$ 代入 $y_1 = ax^2 + bx + c$

$$\text{得} \begin{cases} 36a - 6b + c = 0 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 4 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$$

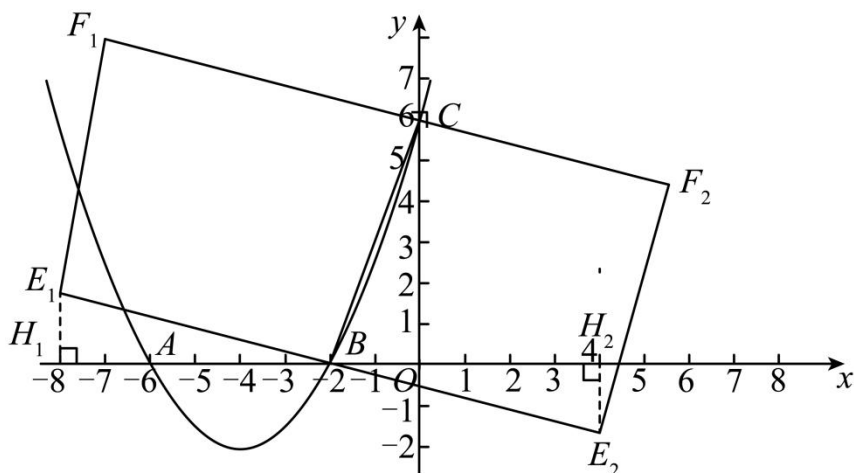
把 $B(-2, 0)$ 代入 $y = kx + 6$ 得 $k = 3$

$$\therefore y = 3x + 6$$

【小问 2 详解】

满足条件的 E 、 F 两点存在， $E_1(-8, 2)$ ， $E_2(4, -2)$ ， $E_3(-4, 4)$

解：①当 BC 为正方形的边长时，分别过 B 点 C 点作 $E_1E_2 \perp BC$ ， $F_1F_2 \perp BC$ ，使 $E_1B = E_2B = BC$ ， $CF_1 = CF_2 = BC$ ，连接 E_1F_1 、 E_2F_2 。



过点 E_1 作 $E_1H_1 \perp x$ 轴于 H_1 。

$$\because BE_1 = CB, \angle BOC = \angle E_1H_1B = 90^\circ = \angle E_1BC,$$

$$\text{又 } \angle BE_1H_1 = 90^\circ - \angle E_1BH_1 = \angle CBO,$$

$$\therefore \triangle BE_1H_1 \cong \triangle CBO (\text{AAS}),$$

$$\therefore E_1H_1 = BO = 2, \quad H_1B = OC = 6$$

$$\therefore E_1(-8, 2)$$

同理可得， $E_2(4, -2)$

②以 BC 为正方形的对角线时，过 BC 的中点 G 作 $E_3F_3 \perp BC$ ，使 E_3F_3 与 BC 互相平分且相等，则四边形 E_3BF_3C 为正方形，

过点 E_3 作 $E_3N \perp y$ 轴于点 N ，过点 B 作 $BM \perp E_3N$ 于点 M

$$\text{当 } y_2 = 0, \text{ 即 } \frac{1}{2}(x-8)^2 + 4(x-8) + 6 = 0$$

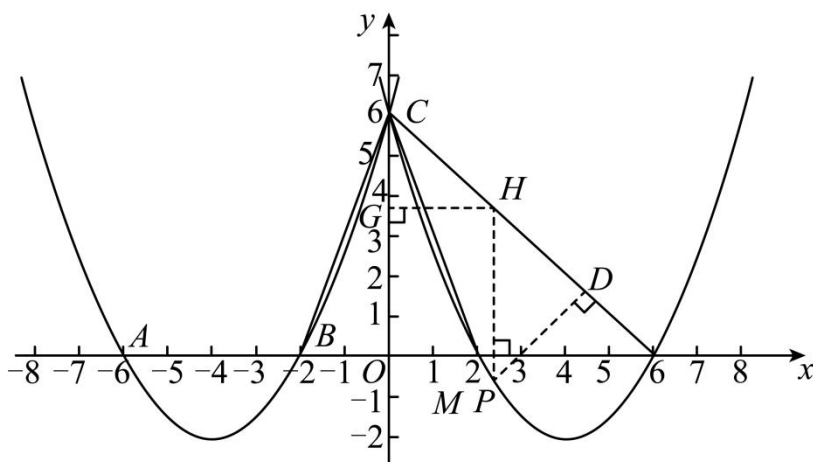
$$\text{解得: } x_1 = 2, x_2 = 6$$

$$\therefore M(2,0), N(6,0)$$

$\therefore y_2$ 过 M, N, C 三点

$$\therefore y_2 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

在直线 NC 下方的抛物线 y_2 上任取一点 P , 作 $PH \perp x$ 轴交 NC 于点 H , 过点 H 作 $HG \perp y$ 轴于点 G .



$$\therefore N(6,0), C(0,6)$$

$$\therefore ON = OC$$

$\therefore \triangle CON$ 是等腰直角三角形

$$\therefore \angle CHG = 45^\circ, \angle GHP = 90^\circ$$

$$\therefore \angle PHD = 45^\circ$$

又 $PD \perp CN$

$\therefore \triangle HPD$ 是等腰直角三角形

$$\therefore HD = DP = \frac{\sqrt{2}}{2} HP$$

$\therefore$ 点 P 在抛物线 y_2 上, 且横坐标为 m

$$\therefore CG = GH = m$$

$$\therefore CH = \sqrt{2}m$$

$$\therefore y_{CN} = -x + 6$$

$$\therefore H(m, -m+6)$$

$$\therefore HP = -m+6 - \left(\frac{1}{2}m^2 - 4m + 6 \right) = -\frac{1}{2}m^2 + 3m$$

$$\therefore HD = DP = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{1}{2}m^2 + 3m \right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}m^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}m$$

$$\therefore CD + \frac{1}{2}PD = CH + HD + \frac{1}{2}PD = CH + \frac{3}{2}PD = \sqrt{2}m + \frac{3}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}m^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}m \right)$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{8} \left(m - \frac{13}{3} \right)^2 + \frac{169\sqrt{2}}{24}$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{13}{3} \text{ 时, } CD + \frac{1}{2}PD \text{ 的最大值为 } \frac{169\sqrt{2}}{24}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数综合运用，正方形的性质，二次函数的性质，分类讨论，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

