

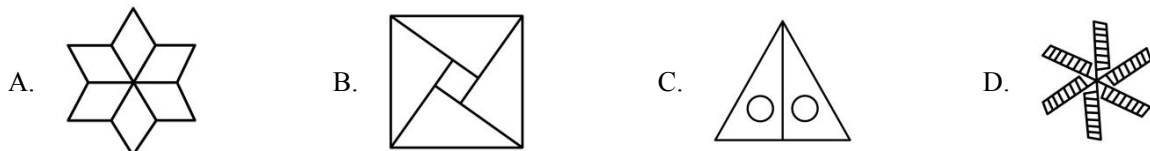
2023 年牡丹江市初中毕业学业考试数学试卷

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟；
2. 全卷共三道大题，总分 120 分；
3. 所有试题请在答题卡上作答，在试卷上答题无效.

一、单项选择题（本题 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 下列图形中，既是中心对称图形，又是轴对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【详解】A、是轴对称图形，也是中心对称图形，故选项符合题意；

B、不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项不符合题意；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故选项不符合题意；

D、不是轴对称图形，是中心对称图形，故选项不符合题意；

故选：A.

【点睛】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

2. 函数 $y = \sqrt{x+1}$ 中，自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x \leq 1$ B. $x \geq -1$ C. $x < -1$ D. $x > 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，被开方数大于等于 0 知： $x+1 \geq 0$ ，可求出 x 的范围.

【详解】解：根据题意得： $x+1 \geq 0$ ，

解得： $x \geq -1$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查的是函数自变量取值范围的求法. 函数自变量的范围一般从三个方面考虑：(1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；(3) 当函

数表达式是二次根式时，被开方数非负.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^4 = a^8$

B. $3a^3 - a^3 = 2a$

C. $(ab^2)^3 = a^3b^6$

D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】分别根据同底数幂的乘法，合并同类项，积的乘方，完全平方公式逐一分析判断即可.

【详解】解： $a^2 \cdot a^4 = a^6$ ，故 A 不符合题意，

$3a^3 - a^3 = 2a^3$ ，故 B 不符合题意；

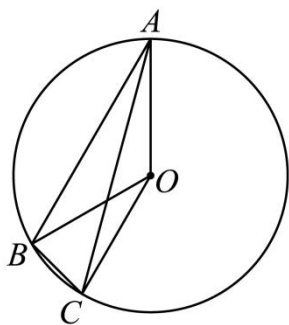
$(ab^2)^3 = a^3b^6$ ，故 C 符合题意；

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故 D 不符合题意；

故选 C

【点睛】本题考查的是同底数幂的乘法，合并同类项，积的乘方运算，完全平方公式的应用，熟记运算法则是解本题的关键.

4. 如图，A, B, C 为 $\odot O$ 上的三个点， $\angle AOB = 4\angle BOC$ ，若 $\angle ACB = 60^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数是 ()



A. 20°

B. 18°

C. 15°

D. 12°

【答案】C

【解析】

【分析】由 $\angle ACB = 60^\circ$ ，可得 $\angle AOB = 2\angle ACB = 120^\circ$ ，结合 $\angle AOB = 4\angle BOC$ ，可得 $\angle BOC = \frac{1}{4} \times 120^\circ = 30^\circ$ ，再利用圆周角定理可得答案.

【详解】解： $\because \angle ACB = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB = 2\angle ACB = 120^\circ,$$

$$\because \angle AOB = 4\angle BOC,$$

$$\therefore \angle BOC = \frac{1}{4} \times 120^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 15^\circ,$$

故选 C.

【点睛】 本题考查的是圆周角定理的应用，熟记圆周角定理的含义是解本题的关键.

5. 一组数据 1, x , 5, 7 有唯一众数，且中位数是 6，则平均数是 ()

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】 B

【解析】

【分析】 由一组数据 1, x , 5, 7 有唯一众数，可得 x 的值只能是 1, 5, 7，结合中位数是 6，可得 $x = 7$ ，从而可得答案.

【详解】 解： $\because$ 一组数据 1, x , 5, 7 有唯一众数，

$\therefore x$ 的值只能是 1, 5, 7，

$\because$ 中位数是 6，

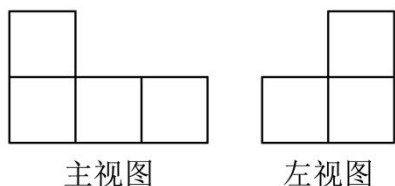
$\therefore x = 7$ ，

$\therefore$ 平均数为 $\frac{1}{4}(1+5+7+7) = 5$ ，

故选 B

【点睛】 本题考查的是众数，中位数，平均数的含义，理解概念并灵活应用是解本题的关键.

6. 由若干个完全相同的小正方体搭成的几何体的主视图和左视图如图所示，则搭成该几何体所用的小正方体的个数最多是 ()



A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据主视图和左视图判断该几何体的层数及每层的最多个数，即可得到答案.

【详解】 解： 根据主视图和左视图判断该几何体共有两层，

下面一层最多有 4 个小正方体，上面的一层最多有 3 个小正方体，故该几何体所用的小正方体的个数最多是 7 个，

故选:B.

【点睛】 此题考查了几何体的三视图，由三视图判断小正方体的个数，正确理解三视图是解题的关键.

7. 观察下面两行数:

1,5,11,19,29,...

1,3,6,10,15,... 取每行数的第 7 个数, 计算这两个数的和是 ()

A. 92

B. 87

C. 83

D. 78

【答案】C

【解析】

【分析】先分别找出每行数字的规律, 求出每行第 7 个数, 将这两个数相加即可.

【详解】解: 第一行的数字规律为: $n^2 + n - 1$, 第二行的数字规律为: $\frac{n^2 + n}{2}$,

$\therefore$ 第一行的第 7 个数字为: $7^2 + 7 - 1 = 55$, 第二行的第 7 个数字为: $\frac{7^2 + 7}{2} = 28$,

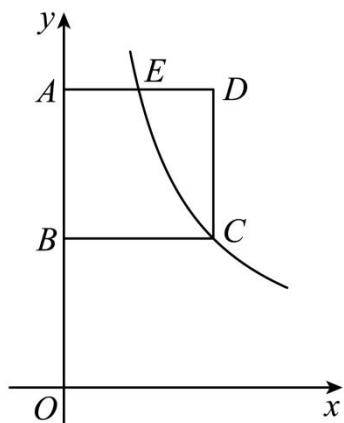
$\therefore 55 + 28 = 83$,

故选: C.

【点睛】本题考查规律探究, 发现每行数字的排布规律是解题的关键.

8. 如图, 正方形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在 y 轴上, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 C 和 AD 的中点 E , 若 $AB = 2$,

则 k 的值是 ()



A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】由正方形的性质得 $BC = AB = 2$, 可设 $C\left(2, \frac{k}{2}\right)$, $E\left(1, \frac{k}{2} + 2\right)$, 根据 $2 \times \frac{k}{2} = 1 \times \left(\frac{k}{2} + 2\right)$ 可求出

k 的值.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 2,$$

∵ 点 E 为 AD 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = 1,$$

设点 C 的坐标为 $\left(2, \frac{k}{2}\right)$ ，则 $BO = \frac{k}{2}$ ， $AO = AB + BO = \frac{k}{2} + 2$ ，

$$\therefore E\left(1, \frac{k}{2} + 2\right),$$

∵ 点 C ， E 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，

$$\therefore 2 \times \frac{k}{2} = 1 \times \left(\frac{k}{2} + 2\right),$$

解得， $k = 4$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征：反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 的图象是双

曲线，图象上的点 (x, y) 的横纵坐标的积是定值 k ，即 $xy = k$ 。

9. 若分式方程 $\frac{a}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ 的解为负数，则 a 的取值范围是 ()

A. $a < -1$ 且 $a \neq -2$

B. $a < 0$ 且 $a \neq -2$

C. $a < -2$ 且 $a \neq -3$

D. $a < -1$ 且 $a \neq -3$

【答案】D

【解析】

【分析】直接解分式方程，进而得出 a 的取值范围，注意分母不能为零。

【详解】解：去分母得： $a = x + 2 - 3$ ，

解得： $x = a + 1$ ，

∵ 分式方程 $\frac{a}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$ 的解是负数，

$$\therefore a + 1 < 0, \quad x + 2 \neq 0, \quad \text{即 } a + 1 + 2 \neq 0,$$

解得： $a < -1$ 且 $a \neq -3$ ，

故选：D.

【点睛】此题主要考查了分式方程的解，正确解分式方程是解题关键.

10. 用一个圆心角为 90° ，半径为 8 的扇形作一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面直径是 ()

- A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】先利用弧长公式求出扇形的弧长即圆锥的底面周长，再根据圆的周长公式求出直径即可.

【详解】解：扇形的弧长： $\frac{\pi \times 8 \times 90^\circ}{180^\circ} = 4\pi$,

则圆锥的底面直径： $4\pi \div \pi = 4$.

故选：C.

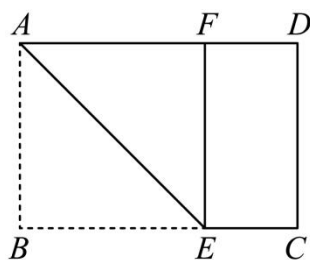
【点睛】本题考查圆锥侧面积公式，熟记公式的灵活应用是解题的关键.

11. 在以“矩形的折叠”为主题的数学活动课上，某位同学进行了如下操作：

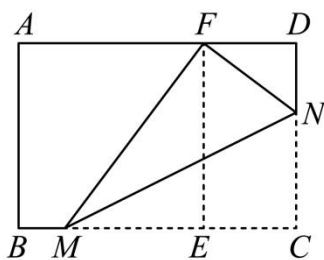
第一步：将矩形纸片的一端，利用图①的方法折出一个正方形 $ABEF$ ，然后把纸片展平；

第二步：将图①中的矩形纸片折叠，使点 C 恰好落在点 F 处，得到折痕 MN ，如图②.

根据以上的操作，若 $AB = 8$ ， $AD = 12$ ，则线段 BM 的长是 ()



图①



图②

- A. 3 B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. 1

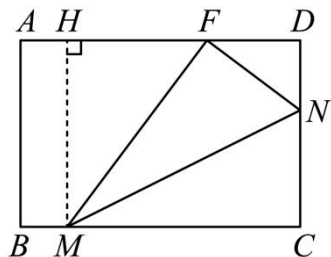
【答案】C

【解析】

【分析】根据折叠的性质得： $AB = AF = BE = 8$ ， $FD = EC = 4$ ， $FN = CN$ ，设 $DN = x$ ，则

$CN = FN = 8 - x$ ，利用勾股定理求出 DN, FN ，再证明 $\triangle MFH \sim \triangle FND$ ，得 $MF = MC$ ，求解即可.

【详解】解：如图，过点 M 作 $MH \perp AD$ ，交 AD 于点 H ，



$$\because \angle DFN + \angle DNF = 90^\circ \quad \angle MFH + \angle DFN = 90^\circ$$

$$\therefore \angle MFH = \angle DNF$$

$$\because \angle D = \angle MHD = 90^\circ$$

在 $\triangle MFH$ 和 $\triangle FND$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle MHD = 90^\circ \\ \angle MFH = \angle DNF \\ \angle FMH = \angle DFN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MFH \sim \triangle FND$$

$$\therefore \frac{MF}{FN} = \frac{MH}{DF} = \frac{FH}{DN}$$

$$\because DF = 4, MH = 8$$

$$\therefore \frac{MF}{FN} = \frac{FH}{DN} = \frac{8}{4} = 2$$

设 $DN = x$, 则 $CN = FN = 8 - x$,

$$\therefore FN^2 = DN^2 + DF^2, \text{ 即: } (8-x)^2 = x^2 + 4^2,$$

解得: $x = 3$,

$$\therefore DN = 3, \quad CN = FN = 5,$$

$$\therefore \frac{MF}{FN} = \frac{MF}{5} = 2,$$

$$\therefore MF = 10,$$

$$\therefore MC = MF = 10,$$

$$\because AD = BC = 12$$

$$\therefore BM = BC - MC = 12 - 10 = 2,$$

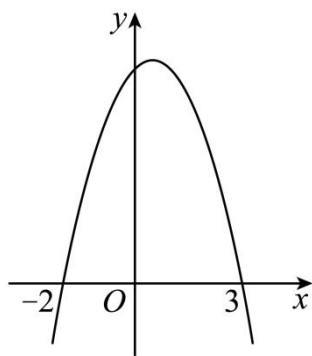
故选: C.

【点睛】 本题考查折叠问题及矩形的性质、正方形的性质，相似三角形的判定与性质，掌握折叠的性质并能熟练运用勾股定理方程思想是解题的关键.

12. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-2, 0)$, $(3, 0)$. 下列结论: ① $\frac{ab}{c} > 0$; ② $c = 2b$; ③若抛物线

上有点 $\left(\frac{5}{2}, y_1\right)$, $(-3, y_2)$, $\left(-\frac{1}{2}, y_3\right)$, 则 $y_2 < y_1 < y_3$; ④方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的解为 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{3}$,

其中正确的个数是 ()



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数图象可知： $a < 0$ ， $-\frac{b}{2a} > 0$ ， $c > 0$ ，得出 $\frac{ab}{c} < 0$ ，故①不正确；将点 $(-2, 0)$ ， $(3, 0)$ 代入，得出： $a + b = 0$ ，再求出 $c = -2b$ ，故②不正确；根据函数图象可得 $y_2 < y_1 < y_3$ ，故③正确；根据方程 $cx^2 + bx + a = 0$ ， $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \times (-b) \times (-2b) = -7b^2 < 0$ ，可知方程无解，故④不正确。

【详解】解：根据二次函数图象可知： $a < 0$ ， $-\frac{b}{2a} > 0$ ， $c > 0$ ，

$\therefore b > 0$ ，

$\therefore \frac{ab}{c} < 0$ ，故①不正确；

将点 $(-2, 0)$ ， $(3, 0)$ 代入得出：
$$\begin{cases} 4a - b + c = 0 \text{①} \\ 9a + 3b + c = 0 \text{②} \end{cases}$$

②-①得出： $a + b = 0$ ，

$\therefore a = -b$ ，

再代入①得出： $c = -2b$ ，故②不正确；

$\therefore -3 < -\frac{1}{2} < 0$ ，

$\therefore y_2 < 0$ ， $y_3 > 0$ ，

$\therefore \frac{5}{2} > 0$ ，

$\therefore y_1 > 0$ ，

根据图象可知： $y_2 < y_1 < y_3$ ，故③正确；

$\therefore$ 方程 $cx^2 + bx + a = 0$ ，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = b^2 - 4 \times (-b) \times (-2b) = -7b^2 < 0,$$

$\therefore$ 方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 无解，故④不正确；

正确的个数是 1 个，

故选：D.

【点睛】本题考查二次函数，掌握二次函数的性质是解题的关键.

二、填空题 (本题 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分)

13. 目前，中国国家版本馆中央总馆入藏版本量共 16000000 余册. 数据 16000000 用科学记数法表示为 _____.

【答案】 1.6×10^7

【解析】

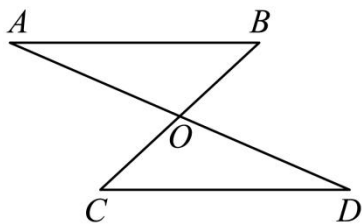
【分析】根据题意用科学记数法 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) 表示即可.

【详解】解： $16000000 = 1.6 \times 10^7$,

故答案为： 1.6×10^7 .

【点睛】本题考查科学记数法，掌握科学记数法的形式 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) 是解题的关键.

14. 如图， $AB \parallel CD$ ， AD 与 BC 交于点 O ， 请添加一个条件 _____， 使 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$. (只填一种情况即可)



【答案】 $AB = CD$ 或 $AO = DO$ 或 $BO = CO$

【解析】

【分析】根据三角形全等的判定方法处理.

【详解】 $\because AB \parallel CD$

$$\therefore \angle A = \angle D, \quad \angle B = \angle C$$

若 $AB = CD$ ， 则 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (ASA)；

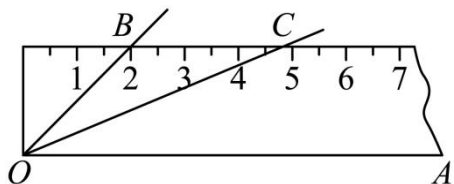
若 $AO = DO$ ， 则 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (AAS)；

若 $BO = CO$ ，则 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (AAS)；

故答案为： $AB = CD$ 或 $AO = DO$ 或 $BO = CO$ 。

【点睛】 本题考查平行线的性质，全等三角形的判定；掌握全等三角形的判定方法是解题的关键。

15. 如图，将 45° 的 $\angle AOB$ 按下面的方式放置在一把刻度尺上：顶点 O 与尺下沿的端点重合， OA 与尺下沿重合， OB 与尺上沿的交点 B 在尺上的读数恰为 2cm ，若按相同的方式将 22.5° 的 $\angle AOC$ 放置在该刻度尺上，则 OC 与尺上沿的交点 C 在尺上的读数为 _____ cm 。



【答案】 $(2\sqrt{2} + 2)$

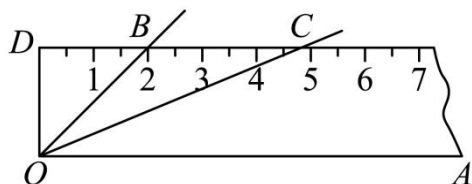
【解析】

【分析】 根据平行线的性质得到 $\angle DBO = \angle AOB = 45^\circ$ ，解直角三角形求出 $OB = 2\sqrt{2}\text{cm}$ ，再推出 $\angle BOC = \angle BCO$ ，进而得到 $BC = BO = 2\sqrt{2}\text{cm}$ ，再求出 CD 的长即可得到答案。

【详解】 解：由题意得， $BC \parallel OA$ ， $\angle BDO = 90^\circ$ ， $OB = 2\text{cm}$ ，

$$\therefore \angle DBO = \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore OB = \frac{BD}{\cos \angle DBO} = 2\sqrt{2}\text{cm}$$



$$\therefore \angle AOC = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle AOB - \angle AOC = 22.5^\circ, \quad \angle BCO = \angle AOC = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = \angle BCO,$$

$$\therefore BC = BO = 2\sqrt{2}\text{cm},$$

$$\therefore CD = BD + BC = (2\sqrt{2} + 2)\text{cm},$$

$$\therefore OC \text{ 与尺上沿的交点 } C \text{ 在尺上的读数为 } (2\sqrt{2} + 2)\text{cm},$$

故答案为： $(2\sqrt{2} + 2)$ 。

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形，平行线的性质，等腰三角形的判定，正确求出 BC 的长是解题的

关键.

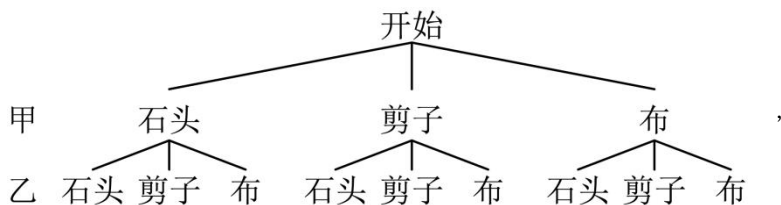
16. 甲、乙两名同学玩“石头、剪子、布”的游戏，随机出手一次，甲获胜的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】画树状图得出所有等可能的结果数，再从中找到符合条件的结果数，然后再用概率公式求解即可.

【详解】解：根据题意画出树状图如图所示：



共有 9 种等可能的结果，甲获胜的情况有 3 种，

∴ 甲获胜的概率是： $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ ，

故答案为： $\frac{1}{3}$.

【点睛】本题主要考查的是用列表法或树状图法求概率，列表法可以重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件，用到的知识点为：概率等于所求情况数与总情况数之比.

17. 张师傅去年开了一家超市，今年 2 月份开始盈利，3 月份盈利 5000 元，5 月份盈利达到 7200 元，从 3 月到 5 月，每月盈利的平均增长率都相同，则每月盈利的平均增长率是_____.

【答案】 20%

【解析】

【分析】设该超市的月平均增长率为 x ，根据等量关系：三月份盈利额 $\times (1+x)^2 =$ 五月份的盈利额列出方程求解即可.

【详解】解：设每月盈利平均增长率为 x ，

根据题意得： $5000(1+x)^2 = 7200$.

解得： $x_1 = 20\%$ ， $x_2 = -220\%$ (不符合题意，舍去)，

故答案为： 20% .

【点睛】此题主要考查了一元二次方程的应用，属于增长率的问题，一般公式为原来的量 $\times (1 \pm x)^2 =$ 后来的量，其中增长用 $+$ ，减少用 $-$ ，难度一般.

18. 将抛物线 $y = (x+3)^2$ 向下平移 1 个单位长度，再向右平移_____个单位长度后，得到的新抛物线经

过原点.

【答案】 2 或 4 或 2

【解析】

【分析】 先求出抛物线 $y = (x+3)^2$ 向下平移 1 个单位长度后与 x 的交点坐标，然后再求出新抛物线经过原点时平移的长度.

【详解】 解： 抛物线 $y = (x+3)^2$ 向下平移 1 个单位长度后的解析式为 $y = (x+3)^2 - 1$,

令 $y = 0$, 则 $(x+3)^2 - 1 = 0$,

解得, $x_1 = -2, x_2 = -4$,

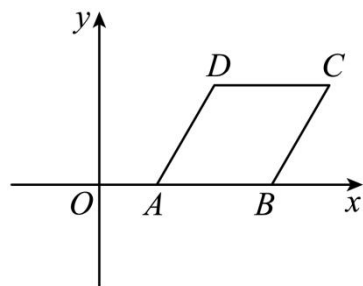
$\therefore$ 抛物线 $y = (x+3)^2 - 1$ 与 x 的交点坐标为 $(-2, 0)$ 和 $(-4, 0)$,

$\therefore$ 将抛物线 $y = (x+3)^2 - 1$ 向右平移 2 个单位或 4 个单位后, 新抛物线经过原点.

故答案为: 2 或 4.

【点睛】 此题考查了二次函数图象的平移与几何变换, 利用抛物线解析式的变化规律: 左加右减, 上加下减是解题关键.

19. 如图, 在平面直角坐标系中, 菱形 $ABCD$ 的顶点 A, B 在 x 轴上, $AB = 2$, $A(1, 0)$, $\angle DAB = 60^\circ$, 将菱形 $ABCD$ 绕点 A 旋转 90° 后, 得到菱形 $AB_1C_1D_1$, 则点 C_1 的坐标是_____.

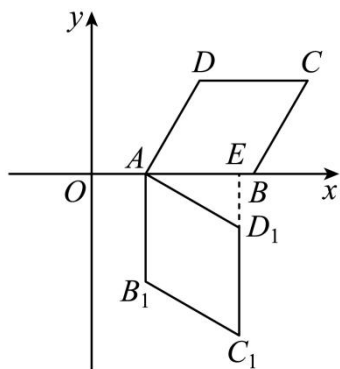


【答案】 $(1-\sqrt{3}, 3)$ 或 $(1+\sqrt{3}, -3)$

【解析】

【分析】 分两种情况: 当绕点 A 顺时针旋转 90° 后, 当绕点 A 逆时针旋转 90° 后, 利用菱形的性质及直角三角形 30° 度角的性质求解即可.

【详解】 解: 当绕点 A 顺时针旋转 90° 后, 如图,



$$\because \angle DAB = 60^\circ, \quad \angle D_1AD = 90^\circ$$

$$\therefore \angle D_1AB = 30^\circ,$$

$$\because \text{菱形 } ABCD \text{ 中 } AB \parallel CD, \quad CD = AD = AB = 2,$$

$$\therefore \angle AD_1C_1 = \angle ADC = 120^\circ,$$

延长 C_1D_1 交 x 轴于点 E ,

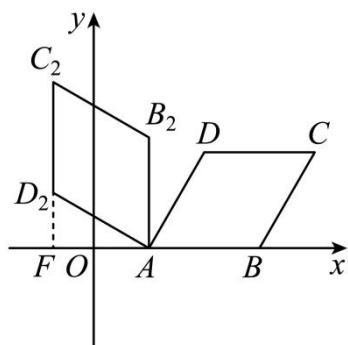
$$\therefore \angle AD_1E = 60^\circ, \quad \angle AED_1 = 90^\circ,$$

$$\therefore ED_1 = \frac{1}{2}AD_1 = 1,$$

$$\therefore AE = \sqrt{3},$$

$$\therefore C_1(1 + \sqrt{3}, -3);$$

当绕点 A 逆时针旋转 90° 后, 如图, 延长 C_2D_2 交 x 轴于点 F ,



$$\because \angle DAB = 60^\circ, \quad \angle B_2AB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D_2AF = 30^\circ,$$

$$\because \text{菱形 } ABCD \text{ 中 } AB \parallel CD, \quad CD = AD = AB = 2,$$

$$\therefore \angle AD_2C_2 = \angle ADC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AD_2F = 60^\circ, \quad \angle AFD_2 = 90^\circ,$$

$$\therefore FD_2 = \frac{1}{2} AD_2 = 1,$$

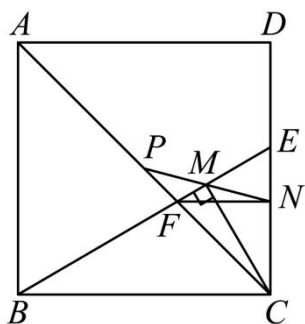
$$\therefore AF = \sqrt{3},$$

$$\therefore C_2(1-\sqrt{3}, 3);$$

故答案为: $(1-\sqrt{3}, 3)$ 或 $(1+\sqrt{3}, -3)$.

【点睛】此题考查了菱形的性质，直角三角形 30 度角所对的直角边等于斜边的一半，旋转的性质，正确理解菱形的性质及旋转的性质是解题的关键.

20. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 在边 CD 上， BE 交对角线 AC 于点 F ， $CM \perp BE$ 于 M ， $\angle CME$ 的平分线所在直线分别交 CD ， AC 于点 N ， P ，连接 FN . 下列结论: ① $S_{\triangle NPF} : S_{\triangle NPC} = FM : MC$; ② $CM = PN$; ③ $EN \cdot CD = EC \cdot CF$; ④ 若 $EM = 1$ ， $MB = 4$ ，则 $PM = \sqrt{2}$ ，其中正确的是_____.



【答案】①④

【解析】

【分析】如图，记 N 到 PC 的距离为 h ，可得 $\frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{\frac{1}{2} PF \times h}{\frac{1}{2} PC \times h} = \frac{PF}{PC}$ ，证明 $\triangle PMF \sim \triangle PCN$ ，可得

$$\frac{MF}{CN} = \frac{PF}{PN}, \quad \angle PFM = \angle PNC, \quad \text{证明 } \triangle NCM \sim \triangle NPC, \quad \text{可得 } \frac{PN}{CN} = \frac{PC}{CM}, \quad \text{可得 } \frac{PF}{PC} = \frac{FM}{CM},$$

$$\frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{PF}{PC} = \frac{FM}{CM}, \quad \text{故①正确; 证明 } M, F, C, N \text{ 四点共圆, 可得 } FN \parallel BC, \quad \text{证明 } \triangle EFN \sim \triangle EBC,$$

$$\frac{EN}{EC} = \frac{FN}{BC} = \frac{FN}{CD}, \quad \text{故③不正确; 求解 } CM^2 = BM \cdot EM = 4, \quad \text{可得 } CM = 2, \quad (\text{负根舍去}), \quad CE = \sqrt{5},$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} = AB, \quad \text{证明 } \triangle CEF \sim \triangle ABF, \quad EF = \frac{5}{3}, \quad BF = \frac{10}{3}, \quad FM = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}, \quad \text{证明}$$

$$\triangle PMF \sim \triangle BCF, \quad \frac{PM}{BC} = \frac{MF}{CF}, \quad \text{求解 } CF = \sqrt{2}CN = \frac{2\sqrt{10}}{3}, \quad \text{可得 } PM = \sqrt{2}, \quad \text{故④正确; 证明}$$

$\triangle EMN \sim \triangle ECF$ ，可得 $\frac{EN}{EF} = \frac{MN}{CF}$ ，求解 $MN = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，则 $PN = PM + MN = \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \neq CM$ ，

故②不正确。

【详解】解：如图，记 N 到 PC 的距离为 h ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{\frac{1}{2}PF \times h}{\frac{1}{2}PC \times h} = \frac{PF}{PC},$$

$\because CM \perp BE$ ，正方形 $ABCD$ ，

$\therefore \angle CME = 90^\circ$ ， $\angle PCN = 45^\circ$ ，

$\therefore MN$ 平分 $\angle CME$ ，

$\therefore \angle CMN = \angle EMN = \angle PMF = 45^\circ = \angle PCN$ ，

$\therefore \angle MPF = \angle NPC$ ，

$\therefore \triangle PMF \sim \triangle PCN$ ，

$$\therefore \frac{MF}{CN} = \frac{PF}{PN}, \quad \angle PFM = \angle PNC,$$

$$\therefore \frac{PF}{MF} = \frac{PN}{CN},$$

同理可得： $\triangle NCM \sim \triangle NPC$ ，

$$\therefore \frac{PN}{CN} = \frac{PC}{CM},$$

$$\therefore \frac{PC}{CM} = \frac{PF}{MF},$$

$$\therefore \frac{PF}{PC} = \frac{FM}{CM},$$

$$\frac{S_{\triangle NPF}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{PF}{PC} = \frac{FM}{CM}, \quad \text{故①符合题意；}$$

$\therefore \angle PMF = 45^\circ = \angle PCE$ ，

$\therefore \angle PCE + \angle FMN = 180^\circ$ ，

$\therefore M, F, C, N$ 四点共圆，

$\therefore \angle FNC = \angle FMC = 90^\circ$ ，

$\therefore FN \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle EFN \sim \triangle EBC$ ，

$$\therefore \frac{EN}{EC} = \frac{FN}{BC} = \frac{FN}{CD},$$

$\therefore EN \cdot CD = EC \cdot FN$ ，故③不正确；

$$\because EM = 1, BM = 4, \text{ 则 } BE = 5,$$

$$\because \text{正方形 } ABCD, CM \perp BE,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle BMC = \angle EMC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MEC + \angle MCE = 90^\circ = \angle MCE + \angle BCM,$$

$$\therefore \angle MEC = \angle BCM,$$

$$\therefore \triangle CME \sim \triangle BMC,$$

$$\therefore \frac{CM}{BM} = \frac{ME}{CM},$$

$$\therefore CM^2 = BM \cdot EM = 4,$$

$$\therefore CM = 2, \text{ (负根舍去)},$$

$$\therefore CE = \sqrt{5}, BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} = AB,$$

$$\text{同理可得: } \triangle CEF \sim \triangle ABF,$$

$$\therefore \frac{EF}{BF} = \frac{CE}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore EF = \frac{5}{3}, BF = \frac{10}{3}, FM = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \angle PMF = \angle ACB = 45^\circ, \angle PFM = \angle BFC,$$

$$\therefore \triangle PMF \sim \triangle BCF,$$

$$\therefore \frac{PM}{BC} = \frac{MF}{CF},$$

$$\therefore \triangle EFN \sim \triangle EBC,$$

$$\therefore \frac{EN}{EC} = \frac{EF}{BE} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EN = \frac{\sqrt{5}}{3}, CN = \frac{2\sqrt{5}}{3},$$

$$\therefore CF = \sqrt{2}CN = \frac{2\sqrt{10}}{3},$$

$$\text{即 } \frac{PM}{2\sqrt{5}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}\sqrt{10}},$$

$$\therefore PM = \sqrt{2}, \text{ 故④正确;}$$

$$\text{同理可得: } \triangle EMN \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \frac{EN}{EF} = \frac{MN}{CF},$$

$$\therefore \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{MN}{\frac{2\sqrt{10}}{3}},$$

$$\therefore MN = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 则 } PN = PM + MN = \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{5\sqrt{2}}{3} \neq CM, \text{ 故②不正确.}$$

综上：正确的有①④；

故答案为：①④

【点睛】 本题考查的是正方形的性质，角平分线的定义，相似三角形的判定与性质，四点共圆，熟练的利用相似三角形的性质解决问题是关键，本题的难度大，是填空压轴题.

三、解答题（共 60 分）

21. 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x-3}{x^2-1}$ ，其中 $x = \sin 30^\circ$.

【答案】 $x+1$, $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 先计算括号内分式减法，再计算除法，然后代入求值，即可得到答案.

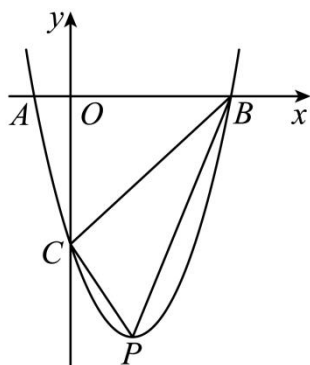
$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(1 - \frac{2}{x-1}\right) \div \frac{x-3}{x^2-1} \\ &= \left(\frac{x-1}{x-1} - \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x-3} \\ &= \frac{x-1-2}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x-3} \\ &= x+1, \end{aligned}$$

当 $x = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

【点睛】 本题考查了分式的混合运算，平方差公式，代数式求值，特殊角的三角函数值，熟练掌握分式的混合运算法则是解题关键.

22. 如图，抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，与 y 轴交于点 C .



(1) 求抛物线对应的函数解析式，并直接写出顶点 P 的坐标；

(2) 求 $\triangle BCP$ 的面积.

注：抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a}$ ，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

【答案】(1) 抛物线对应的解析式 $y = x^2 - 3x - 4$ ， $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

$$(2) S_{\triangle BCP} = \frac{15}{2}$$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求出抛物线的表达式，再根据解析式求点 P 的坐标即可；

(2) 求出点 $C(0, -4)$ 和抛物线顶点 $P\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right)$ ， $A(-1, 0)$ ， $B(4, 0)$ 利用 $S_{\triangle BCP} = S_{\triangle OCP} + S_{\triangle OBP} - S_{\triangle BOC}$

即可得到答案.

【小问 1 详解】

$\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 16 + 4b + c = 0 \end{cases},$$

解这个方程组，得 $\begin{cases} b = -3 \\ c = -4 \end{cases}$.

$\therefore$ 抛物线对应的解析式 $y = x^2 - 3x - 4$.

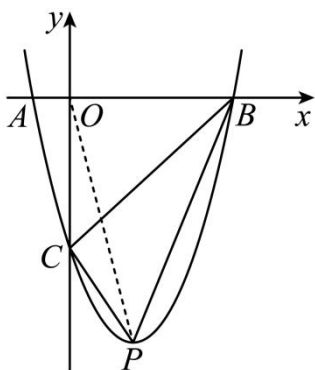
$\because$ P 点是抛物线的顶点坐标，

$$\therefore P\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right), \text{ 即: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}, \quad \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-3)^2}{4 \times 1} = -\frac{25}{4},$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right).$$

【小问 2 详解】

如图，连接 OP .



$$\because A(-1, 0), B(4, 0), C(0, -4), P\left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{4}\right),$$

$$\therefore S_{\triangle OCP} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3,$$

$$S_{\triangle OBP} = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{25}{4} = \frac{25}{2},$$

$$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8.$$

$$\therefore S_{\triangle BCP} = S_{\triangle OCP} + S_{\triangle OBP} - S_{\triangle BOC},$$

$$\therefore S_{\triangle BCP} = 3 + \frac{25}{2} - 8 = \frac{15}{2}.$$

【点睛】此题考查待定系数法求二次函数解析式、二次函数的图象和性质等知识，掌握数形结合思想和割补法求三角形面积是解题的关键.

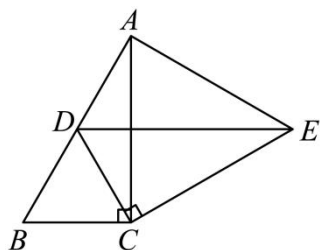
23. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ， $BC = 2$ ， D 为 AB 的中点，以 CD 为直角边作含 30° 角的 $\text{Rt}\triangle CDE$ ， $\angle DCE = 90^\circ$ ，且点 E 与点 A 在 CD 的同侧，请用尺规或三角板作出符合条件的图形，并直接写出线段 AE 的长.

【答案】作图见解析，线段 AE 的长为 $AE = 2\sqrt{3}$ 或 $AE = \frac{2\sqrt{21}}{3}$

【解析】

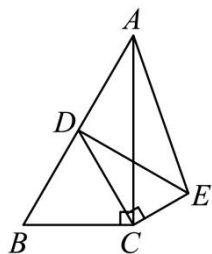
【分析】先根据含 30° 度角的直角三角形的性质得到 $AB = 2BC = 4$ ， $AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$ ，再根据直角三角形斜边上的中线性质的判定证明 $\triangle BCD$ 为等边三角形，可得 $\angle BCD = \angle BDC = 60^\circ$ ， $\angle ACD = 30^\circ$ ，分 $\angle CED = 30^\circ$ 和 $\angle CDE = 30^\circ$ 两种情况，利用等边三角形的性质，结合锐角三角形和勾股定理求解即可.

【详解】解：如图，当 $\angle CED = 30^\circ$ 时，



$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle B = 30^\circ$, 又 $BC = 2$,
 $\therefore AB = 2BC = 4$, $AC = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}$,
 $\because D$ 为 AB 的中点,
 $\therefore CD = BD = AD = \frac{1}{2}AB = 2$,
 $\therefore \triangle BCD$ 为等边三角形,
 $\therefore \angle BCD = \angle BDC = 60^\circ$, $\angle ACD = 30^\circ$,
 $\because \angle DCE = 90^\circ$, $DC = 2$,
 $\therefore \angle ACE = 90^\circ - \angle ACD = 60^\circ$, $CE = \sqrt{3}CD = 2\sqrt{3} = AC$,
 $\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形,
 $\therefore AE = AC = 2\sqrt{3}$;

如图, 当 $\angle CDE = 30^\circ$ 时,



$\because \angle BDC = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ADE = \angle BDC + \angle CDE = 90^\circ$

在 $\text{Rt } \triangle DCE$ 中, $DC = 2$, 则 $DE = \frac{DC}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$,

在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $AD = 2$, 则 $AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$,

综上, 满足条件的线段 AE 的长为 $AE = 2\sqrt{3}$ 或 $AE = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

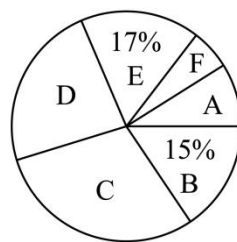
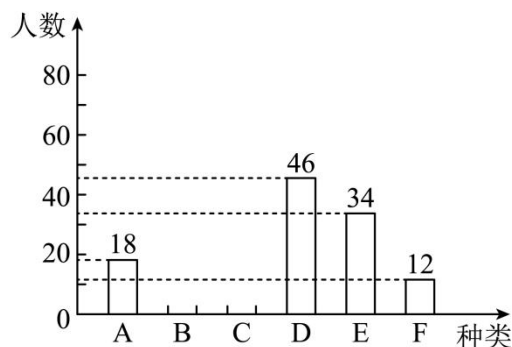
【点睛】 本题考查含 30° 度角的直角三角形的性质、直角三角形斜边上的中线性质的判定与性

质、锐角三角函数以及勾股定理等知识，熟练掌握等边三角形和直角三角形的相关性质是解答的关键。

24. 第二十二届中国绿色食品博览会上，我省采用多种形式，全方位展示“寒地黑土”“绿色有机”金字招牌，大力推介以下绿色优质农产品：*A*．“龙江奶”；*B*．“龙江肉”；*C*．“龙江米”；*D*．“龙江杂粮”；*E*．“龙江菜”；*F*．“龙江山珍”等，为了更好地了解某社区对以上六类绿色优质农产品的关注程度，某校学生对社区居民进行了抽样调查（每位居民只选最关注的一项），根据调查统计结果，绘制了如图所示的不完整统计图。请根据两幅统计图中的信息，解答下列问题：

关注绿色优质农产品人数的条形统计图

关注绿色优质农产品人数的扇形统计图



- (1) 本次参与调查的居民有多少人？
- (2) 补全条形统计图，在扇形统计图中 *C* 类的百分比是_____；
- (3) 如果该社区有 4000 人，估计关注“龙江杂粮”的居民有多少人？

【答案】 (1) 本次参与调查的居民有 200 人；

(2) 补全条形统计图见解析，30%；

(3) 关注“龙江杂粮”的居民有 920 人；

【解析】

【分析】 (1) 根据 *E* 项关注的人数为 34 人，*E* 项关注占总人数的百分数为 17% 即可解答；

(2) 根据条形统计图和扇形统计图可知 *A*、*B*、*C*、*D*、*E*、*F* 各项的关注人数，再根据总人数为 200 即可解答；

(3) 抽样调查中 *D* 项关注人数为 46 人，抽样调查中的总人数为 200 人即可解答。

【小问 1 详解】

解：∵ *E* 项关注的人数为 34 人，*E* 项关注占总人数的百分数为 17%，

∴ 本次参与调查的总人数有 $34 \div 17\% = 200$ (人)，

【小问 2 详解】

解：∵ 本次参与调查的总人数是 200 人，*B* 项关注人数所占百分数为 15%，

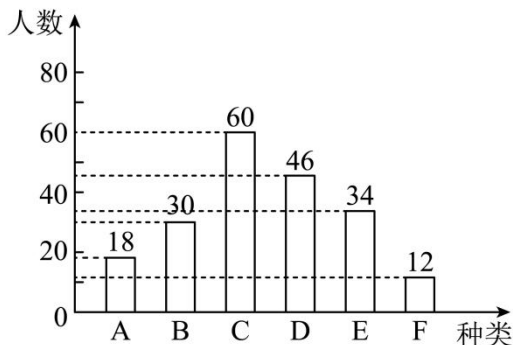
∴ *B* 项关注的人数为 $200 \times 15\% = 30$ (人)，

∴ *C* 项关注的人数为 $200 - 30 - 18 - 46 - 34 - 12 = 60$ (人)，

$\therefore C$ 项所占百分数为 $\frac{60}{200} \times 100\% = 30\%$;

$\therefore$ 如图所示,

关注绿色优质农产品人数的条形统计图



故答案为 30%;

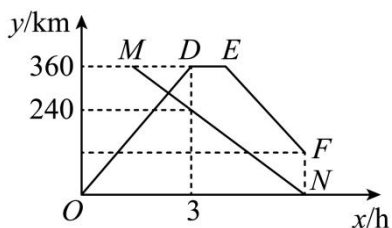
【小问 3 详解】

解: $\because D$ 项关注人数为 46 人, 本次调查的总人数为 200 人,

$\therefore$ 该社区关注关注“龙江杂粮”的居民有 $4000 \times \frac{46}{200} = 920$ (人);

【点睛】 本题考查了条形统计图和扇形统计图, 样本估计整体, 读懂条形统计图和扇形统计图的信息是解题的关键.

25. 在一条高速公路上依次有 A, B, C 三地, 甲车从 A 地出发匀速驶向 C 地, 到达 C 地休息 1h 后调头 (调头时间忽略不计) 按原路原速驶向 B 地, 甲车从 A 地出发 1.5h 后, 乙车从 C 地出发匀速驶向 A 地, 两车同时到达目的地. 两车距 A 地路程 y km 与甲车行驶时间 x h 之间的函数关系如图所示. 请结合图象信息, 解答下列问题:



- (1) 甲车行驶的速度是 _____ km/h, 乙车行驶的速度是 _____ km/h.
- (2) 求图中线段 MN 所表示的 y 与 x 之间的函数解析式, 并直接写出自变量 x 的取值范围;
- (3) 乙车出发多少小时, 两车距各自出发地路程的差是 160km? 请直接写出答案.

【答案】 (1) 120, 80

(2) $y = -80x + 480 (1.5 \leq x \leq 6)$

(3) 2.5h 或 4.1h

【解析】

【分析】(1) 结合函数图象中点的坐标的实际意义求速度；

(2) 利用待定系数法求函数解析式；

(3) 先求得点 E 、 F 坐标，然后分情况列方程求解.

【小问 1 详解】

解：由图可得 $D(3, 360)$ ，即甲出发 3 时后与 A 地相距 360km，

$$\therefore \text{甲车行驶速度为 } \frac{360}{3} = 120 \text{ km/h} ;$$

由题意可得 $M(1.5, 360)$ ， $G(3, 240)$ ，即乙车出发 $3 - 1.5 = 1.5$ h 行驶 $360 - 240 = 120$ km，

$$\therefore \text{乙车行驶速度为 } \frac{120}{1.5} = 80 \text{ km/h} ,$$

故答案为：120，80；

【小问 2 详解】

解：设线段 MN 所在直线的解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

$$\text{将 } (1.5, 360), (3, 240) \text{ 代入 } y = kx + b, \text{ 得 } \begin{cases} 1.5k + b = 360 \\ 3k + b = 240 \end{cases} .$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -80 \\ b = 480 \end{cases} .$$

$\therefore$ 线段 MN 所在直线的解析式为 $y = -80x + 480 (1.5 \leq x \leq 6)$.

【小问 3 详解】

解：在 $y = -80x + 480 (1.5 \leq x \leq 6)$ 中，当 $y = 0$ 时， $x = 6$ ，

$$\therefore N(6, 0),$$

由 (1) 可得乙车行驶速度为 80km/h，甲车行驶速度为 120km/h 且两车同时到达目的地，

则乙到达目的地时，甲距离 A 地的距离为 $360 - 120 \times (6 - 3 - 1) = 120$ (km)，

$$\therefore F(6, 120), E(4, 360),$$

设乙车出发 t 时，两车距各自出发地路程的差是 160km，

当 $0 < t \leq 1.5$ 时，此时甲在到达 C 地前，

$$\text{由 } |80t - 120(t + 1.5)| = 160,$$

解得 $t_1 = -0.5$ ， $t_2 = -8.5$ (不合题意，舍去)；

当 $1.5 < t \leq 2.5$ 时，此时甲在 C 地休息，则 $|80t - 360| = 160$ ，

解得 $t_1 = 2.5$ ， $t_2 = 6.5$ （不合题意，舍去）；

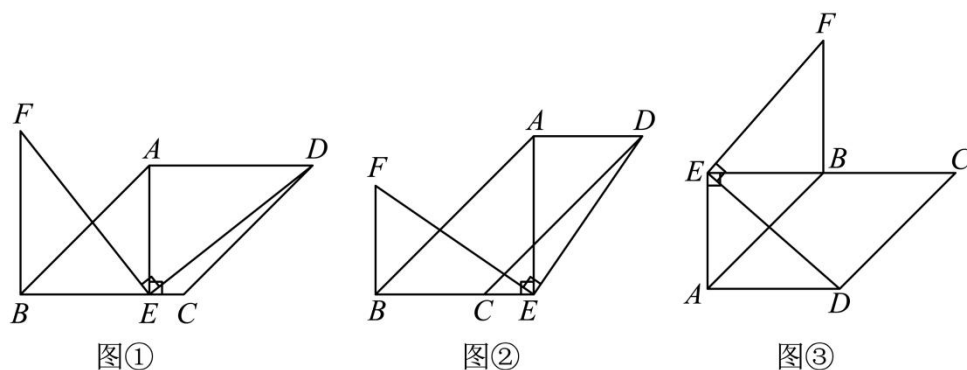
当 $2.5 < t \leq 4.5$ 时，此时甲在返回 B 地中，则 $|80t - [2 \times 360 - 120 \times (t + 1.5 - 1)]| = 160$

解得 $t_1 = 4.1$ ， $t_2 = 2.5$ （不合题意，舍去）

综上，乙车出发 2.5h 或 4.1h，两车距各自出发地路程的差是 160km.

【点睛】 本题考查了一次函数的实际应用-行程问题、一元一次方程的应用，解题的关键是结合函数图象分析运动过程，理解各个节点的实际意义.

26. $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ ，垂足为 E ，连接 DE ，将 ED 绕点 E 逆时针旋转 90° ，得到 EF ，连接 BF .



(1) 当点 E 在线段 BC 上， $\angle ABC = 45^\circ$ 时，如图①，求证： $AE + EC = BF$ ；

(2) 当点 E 在线段 BC 延长线上， $\angle ABC = 45^\circ$ 时，如图②；当点 E 在线段 CB 延长线上， $\angle ABC = 135^\circ$ 时，如图③，请猜想并直接写出线段 AE ， EC ， BF 的数量关系；

(3) 在 (1)、(2) 的条件下，若 $BE = 3$ ， $DE = 5$ ，则 $CE = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】(1) 见解析 (2) 图②： $AE - EC = BF$ ，图③： $EC - AE = BF$

(3) 1 或 7

【解析】

【分析】(1) 求证 $\angle BEF = \angle AED$ ， $AE = BE$ ，得 $\triangle BEF \cong \triangle AED (SAS)$ ，所以 $BF = AD$ ，进而 $AD = BC = BF$ ，所以 $AE + CE = BE + CE = BC = BF$ ；

(2) 如图②，当点 E 在线段 BC 延长线上， $\angle ABC = 45^\circ$ 时，同 (1)， $\triangle BEF \cong \triangle AED (SAS)$ ，得 $AD = BF$ ，结合平行四边形性质，得 $AD = BC = BF$ ，所以 $AE - EC = BF$ ；如图③，当点 E 在线段 CB 延长线上， $\angle ABC = 135^\circ$ 时，求证 $\angle BAE = \angle ABE$ ，得 $AE = BE$ ，同 (1) 可证 $\triangle BEF \cong \triangle AED (SAS)$ ， $BF = AD$ ，结合平行四边形性质，得 $AD = BC = BF$ ，所以 $EC - AE = BF$ ；

(3) 如图①， $\text{Rt}\triangle EBF$ 中，勾股定理，得 $BF = \sqrt{EF^2 - BE^2} = 4$ ，求得 $EC = BF - AE = 1$ ；如图②， $BE = 3$ ，

则 $AE = 3$, $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD = \sqrt{DE^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, 可得图②中, 不存在 $BE = 3$, $DE = 5$ 的情况; 如图③, $\text{Rt}\triangle AED$ 中, 勾股定理, 得 $AD = \sqrt{DE^2 - AE^2} = 4$, 求得 $EC = AE + BF = 7$.

【小问 1 详解】

证明: $\because AE \perp BC$,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ.$$

$$\because \angle FED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle FED$$

$$\therefore \angle AEB - \angle AEF = \angle FED - \angle AEF$$

$$\therefore \angle BEF = \angle AED.$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAE = 45^\circ.$$

$$\therefore AE = BE.$$

$$\because EF = ED,$$

$$\therefore \triangle BEF \cong \triangle AED (SAS).$$

$$\therefore BF = AD.$$

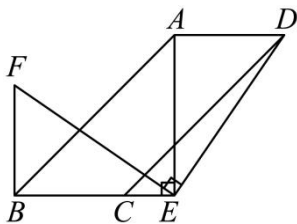
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = BF.$$

$$\therefore AE + CE = BE + CE = BC = BF;$$

【小问 2 详解】

如图②, 当点 E 在线段 BC 延长线上, $\angle ABC = 45^\circ$ 时,



图②

同 (1), $AE = BE$, $\triangle BEF \cong \triangle AED (SAS)$

$$\therefore AD = BF$$

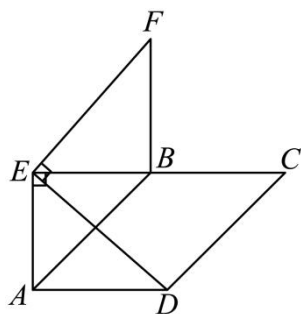
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = BF.$$

$$\therefore AE - EC = BE - EC = BC = BF$$

即 $AE - EC = BF$;

如图③, 当点 E 在线段 CB 延长线上, $\angle ABC = 135^\circ$ 时,



图③

$$\because \angle ABC = 135^\circ$$

$$\therefore \angle ABE = 180^\circ - \angle ABC = 45^\circ$$

$$\because AE \perp BC$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = 180^\circ - \angle AEB - \angle ABE = 45^\circ$$

$$\therefore \angle BAE = \angle ABE$$

$$\therefore AE = BE$$

同 (1) 可证, $\triangle BEF \cong \triangle AED$ (SAS)

$$\therefore BF = AD$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD = BC = BF.$$

$$\therefore EC - AE = EC - EB = BC = BF$$

$$\text{即 } EC - AE = BF$$

【小问 3 详解】

如图①, $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle AEB = 90^\circ$$

$$\because \triangle BEF \cong \triangle AED$$

$$\therefore \angle EAD = \angle EBF = 90^\circ$$

$$\text{Rt}\triangle EBF \text{ 中, } EF = DE = 5, BE = AE = 3, BF = \sqrt{EF^2 - BE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

由 $AE + EC = BF$, 得 $EC = BF - AE = 4 - 3 = 1$;

如图②, $BE = 3$, 则 $AE = 3$, $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD = \sqrt{DE^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore BC = AD = 4$, 与 $BE = 3$ 矛盾, 故图②中, 不存在 $BE = 3$, $DE = 5$ 的情况;

如图③,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore \angle EAD + \angle AEB = 180^\circ$

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$

$\therefore \angle EAD = 90^\circ$

Rt $\triangle AED$ 中, $AE = BE = 3$, $AD = \sqrt{DE^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\therefore BF = AD = 4$

由 $EC - AE = BF$ 知, $EC = AE + BF = 3 + 4 = 7$.

综上, $CE = 1$ 或 7 .

【点睛】本题考查平行四边形的性质, 全等三角形的判定和性质, 根据条件选用恰当的方法作全等的判定是解题的关键.

27. 某商场欲购进 A 和 B 两种家电, 已知 B 种家电的进价比 A 种家电的进价每件多 100 元, 经计算, 用 1 万元购进 A 种家电的件数与用 1.2 万元购进 B 种家电的件数相同. 请解答下列问题:

- (1) 这两种家电每件的进价分别是多少元?
- (2) 若该商场欲购进两种家电共 100 件, 总金额不超过 53500 元, 且 A 种家电不超过 67 件, 则该商场有哪几种购买方案?
- (3) 在 (2) 的条件下, 若 A 和 B 两种家电的售价分别是每件 600 元和 750 元, 该商场从这 100 件中拿出两种家电共 10 件奖励优秀员工, 其余家电全部售出后仍获利 5050 元, 请直接写出这 10 件家电中 B 种家电的件数.

【答案】(1) A 种家电每件的进价为 500 元, B 种家电每件的进价为 600 元

(2) 共有三种购买方案, 方案一: 购进 A 种家电 65 件, B 种家电 35 件, 方案二: 购进 A 种家电 66 件, B 种家电 34 件, 方案三: 购进 A 种家电 67 件, B 种家电 33 件

(3) 这 10 件家电中 B 种家电的件数 4 件

【解析】

【分析】(1) 根据题意设 A 种家电每件进价为 x 元, B 种家电每件进价为 $(x+100)$ 元, 建立分式方程求解即可;

(2) 设购进 A 种家电 a 件, 购进 B 种家电 $(100-a)$ 件, 建立不等式, 求解不等式, 选择符合实际的解即可;

(3) 设 A 种家电拿出 b 件, 则 B 种家电拿出 $(10-b)$ 件, 根据题意, 建立一元一次方程求解即可.

【小问 1 详解】

设 A 种家电每件进价为 x 元, B 种家电每件进价为 $(x+100)$ 元.

根据题意, 得

$$\frac{10000}{x} = \frac{12000}{x+100}.$$

解得 $x = 500$.

经检验 $x = 500$ 是原分式方程的解.

$$\therefore x+100 = 600.$$

答: A 种家电每件的进价为 500 元, B 种家电每件的进价为 600 元;

【小问 2 详解】

设购进 A 种家电 a 件, 购进 B 种家电 $(100-a)$ 件.

根据题意, 得 $500a + 600(100-a) \leq 53500$.

解得 $a \geq 65$.

$$\therefore a \leq 67, \therefore 65 \leq a \leq 67.$$

$\therefore a$ 为正整数, $\therefore a = 65, 66, 67$, 则 $100-a = 35, 34, 33$,

$\therefore$ 共有三种购买方案,

方案一: 购进 A 种家电 65 件, B 种家电 35 件,

方案二: 购进 A 种家电 66 件, B 种家电 34 件,

方案三: 购进 A 种家电 67 件, B 种家电 33 件;

【小问 3 详解】

解: 设 A 种家电拿出 b 件, 则 B 种家电拿出 $(10-b)$ 件,

根据 (1) 和 (2) 及题意, 当购进 A 种家电 65 件, B 种家电 35 件时, 得:

$$(600-500)(65-b) + (750-600)[35-(10-b)] - [500b + 600(10-b)] = 5050,$$

整理得: $4250 + 150b = 5050$,

解得: $b = \frac{16}{3}$, 不符合实际;

当购进 A 种家电 66 件, B 种家电 34 件时, 得:

$$(600-500)(66-b) + (750-600)[34-(10-b)] - [500b + 600(10-b)] = 5050,$$

整理得： $4200 + 150b = 5050$,

解得： $b = \frac{17}{3}$, 不符合实际；

当购进 A 种家电 67 件, B 种家电 33 件时, 得:

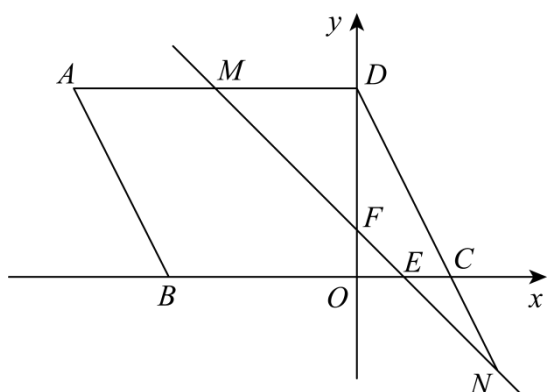
$$(600 - 500)(67 - b) + (750 - 600)[33 - (10 - b)] - [500b + 600(10 - b)] = 5050 ,$$

整理得： $4150 + 150b = 5050$,

解得： $b = 6$, 符合实际; 则 B 种家电拿出 4 件.

【点睛】 本题考查分式方程的实际问题, 一元一次方程的实际问题与一元一次不等式的实际问题, 正确理解题意, 建立正确的等量关系与不等式是解题的关键, 注意结果要符合实际及分式方程的检验.

28. 如图, 在平面直角坐标系中, $ABCD$ 的顶点 B, C 在 x 轴上, D 在 y 轴上, OB, OC 的长是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的两个根 ($OB > OC$). 请解答下列问题:



(1) 求点 B 的坐标;

(2) 若 $OD:OC = 2:1$, 直线 $y = -x + b$ 分别交 x 轴、 y 轴、 AD 于点 E, F, M , 且 M 是 AD 的中点, 直线 EF 交 DC 延长线于点 N , 求 $\tan \angle MND$ 的值;

(3) 在 (2) 的条件下, 点 P 在 y 轴上, 在直线 EF 上是否存在点 Q , 使 $\triangle NPQ$ 是腰长为 5 的等腰三角形? 若存在, 请直接写出等腰三角形的个数和其中两个点 Q 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $B(-4, 0)$

(2) $\tan \angle MND = \frac{1}{3}$

(3) 存在, 等腰三角形的个数是 8 个, $Q_1\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}-4}{2}\right)$, $Q_2\left(\frac{6+5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}+4}{2}\right)$, $Q_3(4, -3)$,

$Q_4(-4, 3)$

【解析】

【分析】 (1) 解方程得到 OB, OC 的长, 从而得到点 B 的坐标;

(2) 由 $OD:OC=2:1$, $OC=2$, 得 $OD=4$. 由 $AD=BC=6$, M 是 AD 中点, 得到点 M 的坐标, 代入直线 $y=-x+b$ 中, 求得 b 的值, 从而得到直线的解析式, 进而求得点 E , 点 F 的坐标, 由坐标特点可得 $\angle FEO=45^\circ$. 过点 C 作 $CH \perp EN$ 于 H , 过点 N 作 $NK \perp BC$ 于 K . 从而 $\triangle DOC \sim \triangle NKC$, $DO:OC=NK:CK=2:1$, 进而得到 $NK=2CK$, 易证 $\angle KEN=\angle KNE=45^\circ$, 可得 $EK=NK=2CK$, 因此 $EC=CK$, 由 $EC=OC-OE=2-1=1$ 可得 $CK=1$, $NK=2$, $EK=2$, 从而通过解直角三角形在 $\text{Rt}\triangle ENK$ 中, 得到 $EN=\frac{EK}{\cos \angle KEN}=2\sqrt{2}$, 在 $\text{Rt}\triangle ECH$ 中, $CH=EH=EC \cdot \cos \angle CEH=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

因此求得 $NH=EN-EH=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 最终可得结果 $\tan \angle MND=\frac{CH}{NH}=\frac{1}{3}$;

(3) 分 $PN=PQ$, $PN=NQ$, $PQ=NQ$ 三大类求解, 共有 8 种情况.

【小问 1 详解】

解方程 $x^2-6x+8=0$, 得 $x_1=4$, $x_2=2$.

$\because OB > OC$,

$\therefore OB=4$, $OC=2$.

$\therefore B(-4,0)$;

【小问 2 详解】

$\because OD:OC=2:1$, $OC=2$

$\therefore OD=4$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC$, $AD=BC=6$.

$\because M$ 是 AD 中点,

$\therefore MD=3$.

$\therefore M(-3,4)$.

将 $M(-3,4)$ 代入 $y=-x+b$, 得 $3+b=4$.

$\therefore b=1$.

$\therefore E(1,0)$, $F(0,1)$.

$\therefore \angle FEO=45^\circ$.

过点 C 作 $CH \perp EN$ 于 H , 过点 N 作 $NK \perp BC$ 于 K .

$\because \triangle DOC \sim \triangle NKC$, $DO:OC=NK:CK=2:1$.

$$\therefore NK = 2CK$$

$$\because \angle KEN = \angle FEO = 45^\circ$$

$$\therefore \angle KNE = 90^\circ - \angle KEN = 45^\circ$$

$$\therefore \angle KEN = \angle KNE$$

$$\therefore EK = NK = 2CK$$

$$\therefore EC = CK$$

$$\because EC = OC - OE = 2 - 1 = 1$$

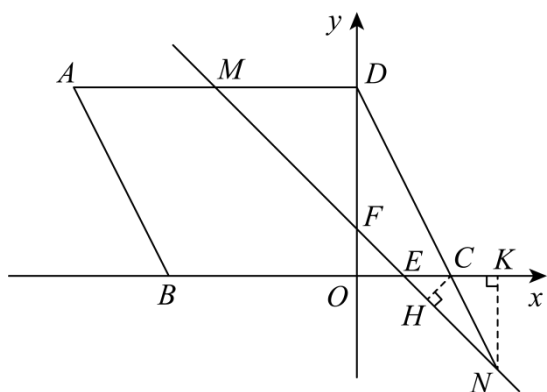
$$\therefore CK = 1, \quad NK = 2, \quad EK = 2$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ENK \text{ 中, } EN = \frac{EK}{\cos \angle KEN} = \frac{2}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{在 Rt}\triangle ECH \text{ 中, } CH = EH = EC \cdot \cos \angle CEH = 1 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore NH = EN - EH = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \tan \angle MND = \frac{CH}{NH} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{3}$$



【小问 3 详解】

解：由 (2) 知：直线 EF 解析式为 $y = -x + 1$ ， $N(3, -2)$ ，

设 $P(0, p)$ ， $Q(q, -q + 1)$ ，

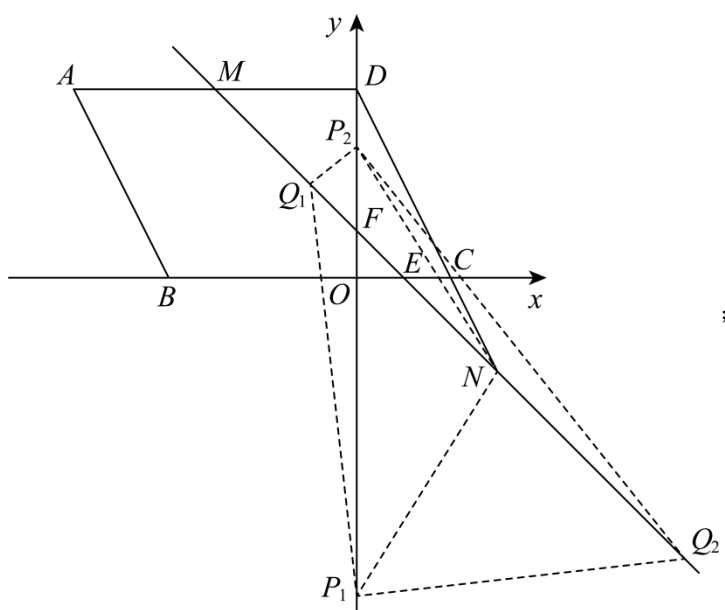
①当 $PN = QN = 5$ 时，

$$(3-0)^2 + (-2-p)^2 = 5^2, \quad (3-q)^2 + (-2+q-1)^2 = 5^2,$$

$$\text{解得 } p = -6 \text{ 或 } p = 2, \quad q = \frac{6+5\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } q = \frac{6-5\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore Q_1\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}-4}{2}\right), Q_2\left(\frac{6+5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}+4}{2}\right), P_1(0, -6), P_2(0, 2),$$

如图, $\triangle P_1Q_1N$ 、 $\triangle P_1Q_2N$ 、 $\triangle P_2Q_1N$ 、 $\triangle P_2Q_2N$ 都是以 5 为腰的等腰三角形,



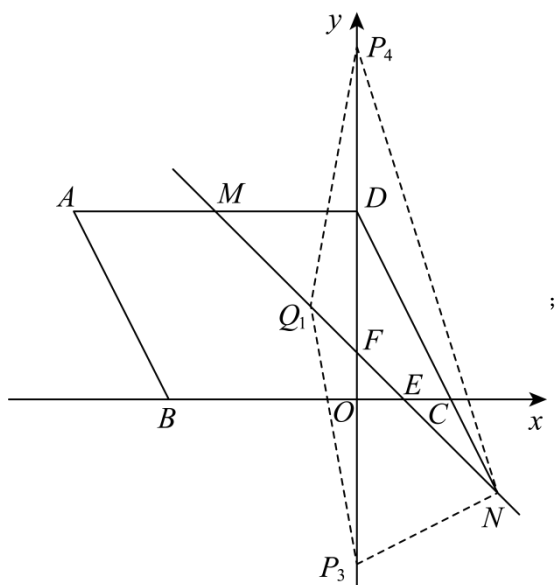
②当 $PQ = QN = 5$ 时,

由①知: $Q_1\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}-4}{2}\right), Q_2\left(\frac{6+5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}+4}{2}\right),$

$$\therefore \frac{6+5\sqrt{2}}{2} > 5,$$

$\therefore PQ_2$ 不可能等于 5,

如图, $\triangle P_3Q_1N$, $\triangle P_4Q_1N$ 都是以 5 为腰的等腰三角形,



③当 $PN = PQ = 5$ 时,

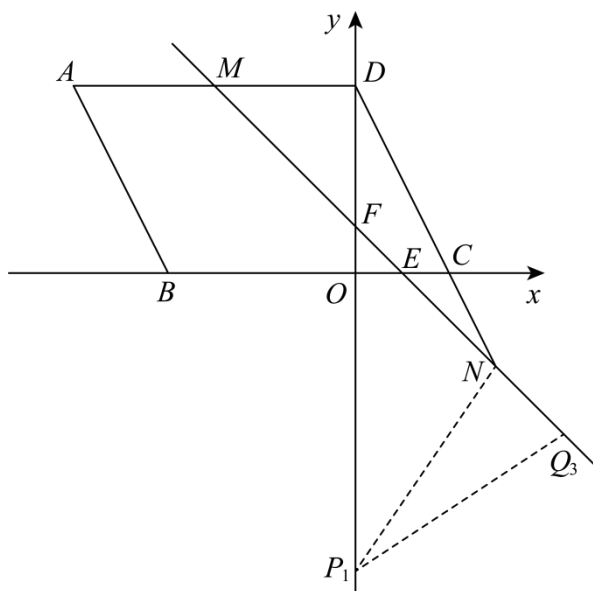
由①知: $P_1(0, -6)$, $P_2(0, 2)$,

当 $P_1(0, -6)$ 时, $(0 - q)^2 + (-6 + q - 1)^2 = 5$,

解得 $q_1 = 3$ (舍去), $q_2 = 4$,

$\therefore Q_3(4, -3)$,

如图,

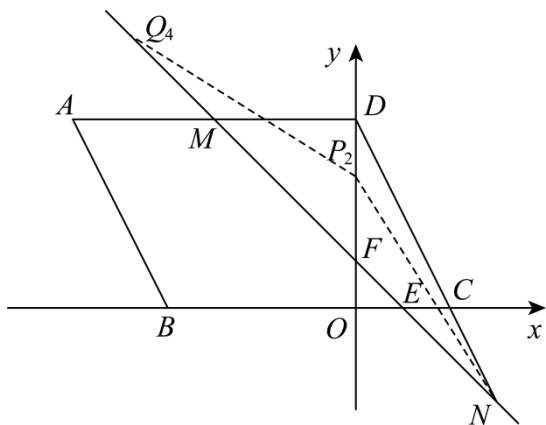


当 $P_2(0, 2)$ 时, $(0 - q)^2 + (2 + q - 1)^2 = 5$,

解得 $q_1 = 3$ (舍去), $q_2 = -4$,

$$\therefore Q_4(-4, 3),$$

如图,



综上, 等腰三角形的个数是 8 个,

$$\text{符合题意的 } Q \text{ 坐标为 } Q_1\left(\frac{6-5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}-4}{2}\right), Q_2\left(\frac{6+5\sqrt{2}}{2}, -\frac{5\sqrt{2}+4}{2}\right), Q_3(4, -3), Q_4(-4, 3)$$

【点睛】 本题考查了一次函数的图像与性质, 一次函数与平行四边形, 等腰三角形的综合问题, 数形结合思想是解题的关键.

