

重庆市 2023 年初中学业水平暨高中招生考试

数学试题 (A 卷)

(全卷共三个大题, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 试题的答案书写在答题卡上, 不得在试题卷上直接作答
2. 作答前认真阅读答题卡上的注意事项;
3. 作图 (包括作辅助线) 请一律用黑色 **2B** 铅笔完成;
4. 考试结束, 由监考人员将试题卷和答题卡一并收回参考公式: 抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$,

的顶点坐标为 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$, 对称轴为 $x = -\frac{b}{2a}$

一、选择题: (本大题 10 个小题, 每小题 4 分, 共 40 分) 在每个小题的下面, 都给出了代号为 *A*、*B*、*C*、*D* 的四个答案, 其中只有一个是正确的, 请将答题卡上题号右侧正确答案所对应的方框涂黑.

1. 8 的相反数是 ()

- A. -8 B. 8 C. $\frac{1}{8}$ D. $-\frac{1}{8}$

【答案】A

【解析】

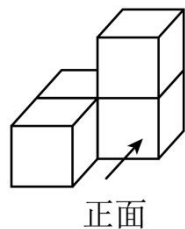
【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数进行解答即可得.

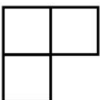
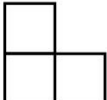
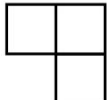
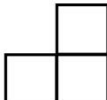
【详解】解: 8 的相反数是 -8,

故选 A.

【点睛】本题考查了相反数的定义, 掌握相反数的定义是解题的关键.

2. 四个大小相同的正方体搭成的几何体如图所示, 从正面得到的视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【答案】D

【解析】

【分析】根据从正面看得到的图形是主视图，可得答案.

【详解】从正面看第一层是2个小正方形，第二层右边1个小正方形，

故选：D.

【点睛】考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的图形是主视图.

3. 反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象一定经过的点是 ()

- A. (1,4) B. (-1,-4) C. (-2,2) D. (2,2)

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意将各项的坐标代入反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 即可解答.

【详解】解：A、将 $x=1$ 代入反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 得到 $y = -1 \neq 4$ ，故A项不符合题意；

B、项将 $x=-1$ 代入反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 得到 $y = 4 \neq -4$ ，故B项不符合题意；

C、项将 $x=-2$ 代入反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 得到 $y = 2 = 2$ ，故C项符合题意；

D、项将 $x=2$ 代入反比例函数 $y = -\frac{4}{x}$ 得到 $y = -2 \neq 2$ ，故D项不符合题意；

故选C.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，只要点在函数图象上则其坐标一定满足函数解析式，掌握反比例函数图象上点的坐标特征是解题的关键.

4. 若两个相似三角形周长的比为1:4，则这两个三角形对应边的比是 ()

- A. 1:2 B. 1:4 C. 1:8 D. 1:16

【答案】B

【解析】

【分析】根据相似三角形的周长比等于相似三角形的对应边比即可解答.

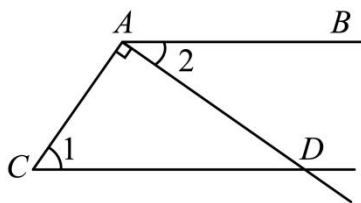
【详解】解： $\because$ 两个相似三角形周长的比为1:4，

$\therefore$ 相似三角形的对应边比为1:4，

故选B.

【点睛】本题考查了相似三角形的周长比等于相似三角形的对应边比，掌握相似三角形的性质是解题的关键.

5. 如图， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp AC$ ，若 $\angle 1 = 55^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



A. 35°

B. 45°

C. 50°

D. 55°

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据两直线平行，同旁内角互补可得 $\angle CAB$ 的度数，根据垂直的定义可得 $\angle CAD = 90^\circ$ ，然后根据 $\angle 2 = \angle CAB - \angle CAD$ 即可得出答案.

【详解】 解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 55^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAB = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ,$$

$$\because AD \perp AC,$$

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle CAB - \angle CAD = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ,$$

故选： A.

【点睛】 本题考查了平行线的性质以及垂线的定义，熟知两直线平行同旁内角互补是解本题的关键.

6. 估计 $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{10})$ 的值应在 ()

A. 7 和 8 之间

B. 8 和 9 之间

C. 9 和 10 之间

D. 10 和 11 之间

【答案】 B

【解析】

【分析】 先计算二次根式的混合运算，再估算结果的大小即可判断.

【详解】 解： $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{10})$

$$= \sqrt{16} + \sqrt{20}$$

$$= 4 + 2\sqrt{5}$$

$$\because 2 < \sqrt{5} < 2.5,$$

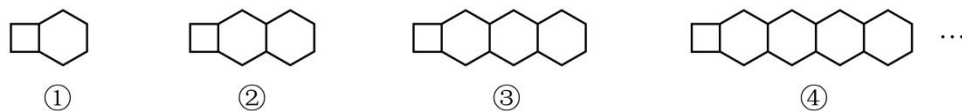
$$\therefore 4 < 2\sqrt{5} < 5,$$

$$\therefore 8 < 4 + 2\sqrt{5} < 9,$$

故选： B.

【点睛】此题考查了二次根式的混合运算，无理数的估算，正确掌握二次根式的混合运算是解题的关键.

7. 用长度相同的木棍按如图所示的规律拼图案, 其中第①个图案用了 9 根木棍, 第②个图案用了 14 根木棍, 第③个图案用了 19 根木棍, 第④个图案用了 24 根木棍, ……，按此规律排列下去, 则第⑧个图案用的木棍根数是 ()



- A. 39 B. 44 C. 49 D. 54

【答案】B

【解析】

【分析】根据各图形中木棍的根数发现计算的规律, 由此即可得到答案.

【详解】解: 第①个图案用了 $4+5=9$ 根木棍,

第②个图案用了 $4+5\times 2=14$ 根木棍,

第③个图案用了 $4+5\times 3=19$ 根木棍,

第④个图案用了 $4+5\times 4=24$ 根木棍,

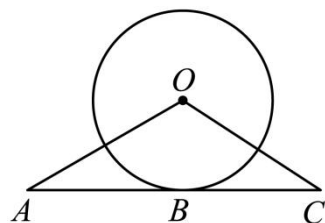
……,

第⑧个图案用的木棍根数是 $4+5\times 8=44$ 根,

故选: B.

【点睛】此题考查了图形类规律的探究, 正确理解图形中木棍根数的变化规律由此得到计算的规律是解题的关键.

8. 如图, AC 是 $\odot O$ 的切线, B 为切点, 连接 OA , OC . 若 $\angle A=30^\circ$, $AB=2\sqrt{3}$, $BC=3$, 则 OC 的长度是 ()



- A. 3 B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{13}$ D. 6

【答案】C

【解析】

【分析】根据切线的性质及正切的定义得到 $OB=2$, 再根据勾股定理得到 $OC=\sqrt{13}$.

【详解】解：连接 OB ，

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的切线， B 为切点，

$\therefore OB \perp AC$ ，

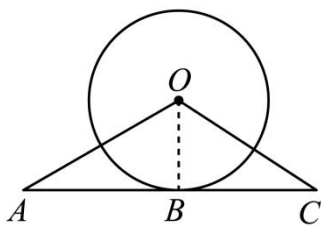
$\because \angle A = 30^\circ$ ， $AB = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle OAB$ 中， $OB = AB \cdot \tan \angle A = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$ ，

$\therefore BC = 3$ ，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle OBC$ 中， $OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{13}$ ，

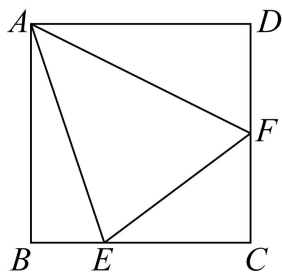
故选 C 。



【点睛】本题考查了切线的性质，锐角三角函数，勾股定理，掌握切线的性质

是解题的关键。

9. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E ， F 分别在 BC ， CD 上，连接 AE ， AF ， EF ， $\angle EAF = 45^\circ$ 。若 $\angle BAE = \alpha$ ，则 $\angle FEC$ 一定等于（ ）



A. 2α

B. $90^\circ - 2\alpha$

C. $45^\circ - \alpha$

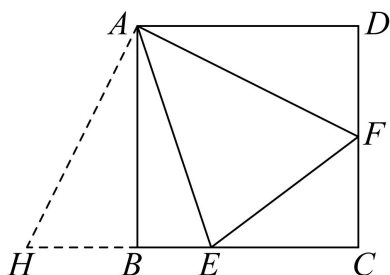
D. $90^\circ - \alpha$

【答案】A

【解析】

【分析】利用三角形逆时针旋转 90° 后，再证明三角形全等，最后根据性质和三角形内角和定理即可求解。

【详解】将 $\triangle ADF$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 至 $\triangle ABH$ ，



∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D = \angle BAD = \angle C = 90^\circ,$$

由旋转性质可知: $\angle DAF = \angle BAH$, $\angle D = \angle ABH = 90^\circ$, $AF = AH$,

$$\therefore \angle AHB + \angle ABC = 180^\circ,$$

∴ 点 H, B, C 三点共线,

$$\therefore \angle BAE = \alpha, \angle EAF = 45^\circ, \angle BAD = \angle HAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle BAH = 45^\circ - \alpha, \angle EAF = \angle EAH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AHB + \angle BAH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AHB = 45^\circ + \alpha,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AEH$ 中

$$\begin{cases} AF = AH \\ \angle FAE = \angle HAE, \\ AE = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFE \cong \triangle AHE (SAS),$$

$$\therefore \angle AHE = \angle AFE = 45^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle AHE = \angle AFD = \angle AFE = 45^\circ + \alpha,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle AFD + \angle AFE = 90^\circ + 2\alpha,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle FEC + \angle C = \angle FEC + 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = 2\alpha,$$

故选: A.

【点睛】此题考查了正方形的性质, 全等三角形的判定和性质, 旋转的性质, 解题的关键是能正确作出旋转, 再证明三角形全等, 熟练利用性质求出角度.

10. 在多项式 $x - y - z - m - n$ (其中 $x > y > z > m > n$) 中, 对相邻的两个字母间任意添加绝对值符号, 添加绝对值符号后仍只有减法运算, 然后进行去绝对值运算, 称此为“绝对操作”. 例如:

$$x - y - |z - m| - n = x - y - z + m - n, \quad |x - y| - z - |m - n| = x - y - z - m + n, \quad \dots\dots$$

下列说法:

- ①存在“绝对操作”, 使其运算结果与原多项式相等;
- ②不存在“绝对操作”, 使其运算结果与原多项式之和为0;
- ③所有的“绝对操作”共有7种不同运算结果.

其中正确的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据“绝对操作”的定义及绝对值的性质对每一项判断即可解答.

【详解】 解: $\because x > y > z > m > n$,

$$\therefore |x-y|-z-m-n=x-y-z-m-n,$$

$\therefore$ 存在“绝对操作”, 使其运算结果与原多项式相等,

故①正确;

根据绝对操作的定义可知: 在多项式 $x-y-z-m-n$ (其中 $x > y > z > m > n$) 中, 经过绝对操作后,

z 、 n 、 m 的符号都有可能改变, 但是 x 、 y 的符号不会改变,

$\therefore$ 不存在“绝对操作”, 使其运算结果与原多项式之和为 0,

故②正确;

$\therefore$ 在多项式 $x-y-z-m-n$ (其中 $x > y > z > m > n$) 中, 经过“绝对操作”可能产生的结果如下:

$$\therefore |x-y|-z-m-n=x-y-z-m-n,$$

$$x-|y-z|-m-n=x-y+z-m-n,$$

$$x-y-|z-m|-n=|x-y|-|z-m|-n=x-y-z+m-n,$$

$$x-y-z-|m-n|=|x-y|-z-|m-n|=x-y-z-m+n,$$

$$x-|y-z|-|m-n|=x-y+z-m+n,$$

共有 5 种不同运算结果,

故③错误;

故选 C.

【点睛】 本题考查了新定义“绝对操作”, 绝对值的性质, 整式的加减运算, 掌握绝对值的性质是解题的关键.

二、填空题: (本大题 8 个小题, 每小题 4 分, 共 32 分) 请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上.

11. 计算 $2^{-1} + 3^0 =$ _____.

【答案】 1.5

【解析】

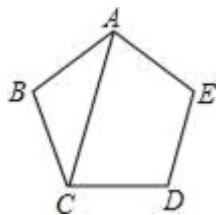
【分析】先根据负整数指数幂及零指数幂化简，再根据有理数的加法计算.

【详解】 $2^{-1} + 3^0 = \frac{1}{2} + 1 = 1.5$.

故答案为 1.5.

【点睛】 本题考查了负整数指数幂及零指数幂的意义，任何不等于 0 的数的负整数次幂，等于这个数的正整数次幂的倒数，非零数的零次幂等于 1.

12. 如图，在正五边形 $ABCDE$ 中，连接 AC ，则 $\angle BAC$ 的度数为_____.



【答案】 36°

【解析】

【分析】 首先利用多边形的内角和公式求得正五边形的内角和，再求得每个内角的度数，利用等腰三角形的性质可得 $\angle BAC$ 的度数.

【详解】 正五边形内角和： $(5 - 2) \times 180^\circ = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$

$$\therefore \angle B = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

故答案为 36° .

【点睛】 本题主要考查了正多边形的内角和，熟记多边形的内角和公式： $(n-2) \times 180^\circ$ 是解答此题的关键.

13. 一个口袋中有 1 个红色球，有 1 个白色球，有 1 个蓝色球，这些球除颜色外都相同. 从中随机摸出一个球，记下颜色后放回，摇匀后再从中随机摸出一个球，则两次都摸到红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】 列表得出所有等可能结果，从中找到符合条件的结果数，再根据概率公式求解即可.

【详解】 解： 根据题意列表如下：

	红球	白球	蓝球
红球	(红球，红球)	(白球，红球)	(蓝球，红球)

白球	(红球, 白球)	(白球, 白球)	(蓝球, 白球)
蓝球	(红球, 蓝球)	(白球, 蓝球)	(蓝球, 蓝球)

由表知, 共有 9 种等可能结果, 其中两次都摸到红球的有 1 种结果,

所以两次摸到球的颜色相同的概率为 $\frac{1}{9}$,

故答案为: $\frac{1}{9}$.

【点睛】本题考查了列表法或树状图法求概率. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

14. 某新建工业园区今年六月份提供就业岗位 1501 个, 并按计划逐月增长, 预计八月份将提供岗位 1815 个. 设七、八两个月提供就业岗位数量的月平均增长率为 x , 根据题意, 可列方程为_____.

【答案】 $1501(1+x)^2 = 1815$

【解析】

【分析】设七、八两个月提供就业岗位数量的月平均增长率为 x , 根据题意列出一元二次方程, 即可求解.

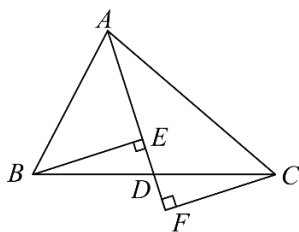
【详解】解: 设七、八两个月提供就业岗位数量的月平均增长率为 x , 根据题意得,

$$1501(1+x)^2 = 1815,$$

故答案为: $1501(1+x)^2 = 1815$.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用, 增长率问题, 根据题意列出方程是解题的关键.

15. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 点 D 为 BC 上一点, 连接 AD . 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , 过点 C 作 $CF \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 F . 若 $BE = 4$, $CF = 1$, 则 EF 的长度为_____.



【答案】 3

【解析】

【分析】证明 $\triangle AFC \cong \triangle BEA$, 得到 $BE = AF$, $CF = AE$, 即可得解.

【详解】解: $\because \angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle EAB + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\because BE \perp AD, CF \perp AD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF + \angle EAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BAE,$$

在 $\triangle AFC$ 和 $\triangle BEA$ 中:

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle CFA \\ \angle ACF = \angle BAE, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFC \cong \triangle BEA (\text{AAS}),$$

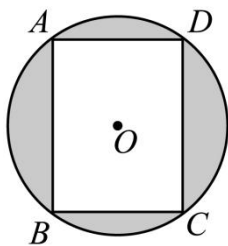
$$\therefore AF = BE = 4, AE = CF = 1,$$

$$\therefore EF = AF - AE = 4 - 1 = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查全等三角形的判定和性质. 利用同角的余角相等和等腰三角形的两腰相等证明三角形全等是解题的关键.

16. 如图, $\odot O$ 是矩形 $ABCD$ 的外接圆, 若 $AB = 4, AD = 3$, 则图中阴影部分的面积为_____. (结果保留 π)



【答案】 $\frac{25}{4}\pi - 12$

【解析】

【分析】 根据直径所对的圆周角是直角及勾股定理得到 $BD = 5$, 再根据圆的面积及矩形的性质即可解答.

【详解】 解: 连接 BD ,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore BD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\because AB = 4, AD = 3,$

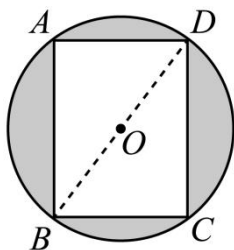
$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5,$$

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{5}{2},$

$\therefore \odot O$ 的面积为 $\frac{25}{4}\pi$, 矩形的面积为 $3 \times 4 = 12,$

∴ 阴影部分的面积为 $\frac{25}{4}\pi - 12$;

故答案为 $\frac{25}{4}\pi - 12$;



【点睛】本题考查了矩形的性质，圆的面积，矩形的面积，勾股定理，掌握矩形的

性质是解题的关键.

17. 若关于 x 的一元一次不等式组 $\begin{cases} \frac{x+3}{2} \leq 4 \\ 2x-a \geq 2 \end{cases}$ ，至少有 2 个整数解，且关于 y 的分式方程 $\frac{a-1}{y-2} + \frac{4}{2-y} = 2$

有非负整数解，则所有满足条件的整数 a 的值之和是_____.

【答案】4

【解析】

【分析】先解不等式组，确定 a 的取值范围 $a \leq 6$ ，再把分式方程去分母转化为整式方程，解得 $y = \frac{a-1}{2}$ ，由分式方程有正整数解，确定出 a 的值，相加即可得到答案.

【详解】解： $\begin{cases} \frac{x+3}{2} \leq 4 \text{ ①} \\ 2x-a \geq 2 \text{ ②} \end{cases}$

解不等式①得： $x \leq 5$,

解不等式②得： $x \geq 1 + \frac{a}{2}$,

∴ 不等式的解集为 $1 + \frac{a}{2} \leq x \leq 5$,

∴ 不等式组至少有 2 个整数解，

∴ $1 + \frac{a}{2} \leq 4$,

解得： $a \leq 6$;

∴ 关于 y 的分式方程 $\frac{a-1}{y-2} + \frac{4}{2-y} = 2$ 有非负整数解，

∴ $a-1-4 = 2(y-2)$

解得： $y = \frac{a-1}{2}$,

$$\text{即 } \frac{a-1}{2} \geq 0 \text{ 且 } \frac{a-1}{2} \neq 2,$$

$$\text{解得: } a \geq 1 \text{ 且 } a \neq 5$$

$$\therefore a \text{ 的取值范围是 } 1 \leq a \leq 6, \text{ 且 } a \neq 5$$

$$\therefore a \text{ 可以取: } 1, 3,$$

$$\therefore 1+3=4,$$

故答案为: 4.

【点睛】 本题考查了分式方程的解, 以及解一元一次不等式组, 熟练掌握运算是解题关键.

18. 如果一个四位自然数 $\overline{abcd}$ 的各数位上的数字互不相等且均不为 0, 满足 $\overline{ab} - \overline{bc} = \overline{cd}$, 那么称这个四位数为“递减数”. 例如: 四位数 4129, $\therefore 41 - 12 = 29$, $\therefore$ 4129 是“递减数”; 又如: 四位数 5324, $\therefore 53 - 32 = 21 \neq 24$, $\therefore$ 5324 不是“递减数”. 若一个“递减数”为 $\overline{a312}$, 则这个数为_____ ; 若一个“递减数”的前三个数字组成的三位数 $\overline{abc}$ 与后三个数字组成的三位数 $\overline{bcd}$ 的和能被 9 整除, 则满足条件的数的最大值是_____.

【答案】 ①. 4312 ②. 8165

【解析】

【分析】 根据递减数的定义进行求解即可.

【详解】 解: $\because \overline{a312}$ 是递减数,

$$\therefore 10a + 3 - 31 = 12,$$

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore \text{这个数为 } 4312;$$

故答案为: 4312

$\because$ 一个“递减数”的前三个数字组成的三位数 $\overline{abc}$ 与后三个数字组成的三位数 $\overline{bcd}$ 的和能被 9 整除,

$$\therefore 10a + b - 10b - c = 10c + d,$$

$$\therefore \overline{abc} + \overline{bcd} = 100a + 10b + c + 100b + 10c + d,$$

$$\therefore \overline{abc} + \overline{bcd} = 100a + 10b + c + 100b + 10a + b - 10b - c = 110a + 101b,$$

$$\therefore 110a + 101b = 99(a + b) + 11a + 2b, \text{ 能被 } 9 \text{ 整除},$$

$$\therefore 11a + 2b \text{ 能被 } 9 \text{ 整除},$$

$\because$ 各数位上的数字互不相等且均不为 0,

$$\therefore \begin{cases} a=1 \\ b=8 \end{cases}, \begin{cases} a=2 \\ b=7 \end{cases}, \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}, \begin{cases} a=4 \\ b=5 \end{cases}, \begin{cases} a=5 \\ b=4 \end{cases}, \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases}, \begin{cases} a=7 \\ b=2 \end{cases}, \begin{cases} a=8 \\ b=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 最大的递减数,

$$\therefore a=8, b=1,$$

$$\therefore 10 \times 8 - 9 \times 1 - c = 10c + d, \text{ 即: } 11c + d = 71,$$

$\therefore c$ 最大取 6, 此时 $d=5$,

$\therefore$ 这个最大的递减数为 8165.

故答案为: 8165.

【点睛】 本题考查一元一次方程和二元一次方程的应用. 理解并掌握递减数的定义, 是解题的关键.

三、解答题: (本大题 8 个小题, 第 19 题 8 分, 其余每题各 10 分, 共 78 分) 解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤, 画出必要的图形 (包括辅助线), 请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

19. 计算:

$$(1) a(2-a) + (a+1)(a-1);$$

$$(2) \frac{x^2}{x^2+2x+1} \div \left(x - \frac{x}{x+1} \right).$$

【答案】 (1) $2a-1$

$$(2) \frac{1}{x+1}$$

【解析】

【分析】 (1) 先计算单项式乘多项式, 平方差公式, 再合并同类项即可;

(2) 先通分计算括号内, 再利用分式的除法法则进行计算.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = 2a - a^2 + a^2 - 1$$

$$= 2a - 1;$$

【小问 2 详解】

$$\text{原式} = \frac{x^2}{(x+1)^2} \div \left(\frac{x^2+x-x}{x+1} \right).$$

$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \div \frac{x^2}{x+1}$$

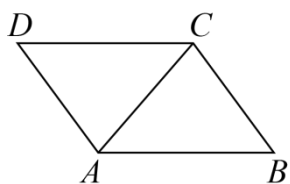
$$= \frac{x^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x^2}$$

$$= \frac{1}{x+1}.$$

【点睛】本题考查整式的混合运算，分式的混合运算．熟练掌握相关运算法则，正确的计算，是解题的关键．

20. 学习了平行四边形后，小虹进行了拓展性研究．她发现，如果作平行四边形一条对角线的垂直平分线，那么这个平行四边形的一组对边截垂直平分线所得的线段被垂足平分．她的解决思路是通过证明对应线段所在的两个三角形全等得出结论．请根据她的思路完成以下作图与填空：

用直尺和圆规，作 AC 的垂直平分线交 DC 于点 E ，交 AB 于点 F ，垂足为点 O ．（只保留作图痕迹）



已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， AC 是对角线， EF 垂直平分 AC ，垂足为点 O ．

求证： $OE = OF$ ．

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴ $DC \parallel AB$ ．

∴ $\angle ECO =$ ① _____．

∵ EF 垂直平分 AC ，

∴ ② _____．

又 $\angle EOC =$ ③ _____．

∴ $\triangle COE \cong \triangle AOF$ (ASA)．

∴ $OE = OF$ ．

小虹再进一步研究发现，过平行四边形对角线 AC 中点的直线与平行四边形一组对边相交形成的线段均有此特征．请你依照题意完成下面命题：

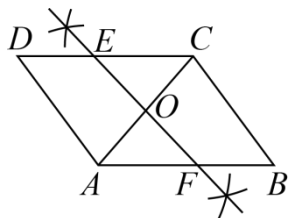
过平行四边形对角线中点的直线 ④ _____．

【答案】作图：见解析； $\angle FAO$ ； $AO = CO$ ； $\angle FOA$ ；被平行四边形一组对边所截，截得的线段被对角线中点平分

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的画法作图，再推理证明即可并得到结论．

【详解】解：如图，即为所求；



证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB.$$

$$\therefore \angle ECO = \angle FAO.$$

∵ EF 垂直平分 AC ，

$$\therefore AO = CO.$$

$$\text{又 } \angle EOC = \angle FOA.$$

$$\therefore \triangle COE \cong \triangle AOF (ASA).$$

$$\therefore OE = OF.$$

故答案为： $\angle FAO$ ； $AO = CO$ ； $\angle FOA$ ；

由此得到命题：过平行四边形对角线中点的直线被平行四边形一组对边所截，截得的线段被对角线中点平分，

故答案为：被平行四边形一组对边所截，截得的线段被对角线中点平分.

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，作线段的垂直平分线，全等三角形的判定和性质，熟练掌握平行四边形的性质及线段垂直平分线的作图方法是解题的关键.

21. 为了解 A 、 B 两款品质相近的智能玩具飞机在一次充满电后运行的最长时间，有关人员分别随机调查了 A 、 B 两款智能玩具飞机各 10 架，记录下它们运行的最长时间（分钟），并对数据进行了整理、描述和分析（运行最长时间用 x 表示，共分为三组：合格 $60 \leq x < 70$ ，中等 $70 \leq x < 80$ ，优等 $x \geq 80$ ），下面给出了部分信息：

A 款智能玩具飞机 10 架一次充满电后运行最长时间是：

60, 64, 67, 69, 71, 71, 72, 72, 72, 82

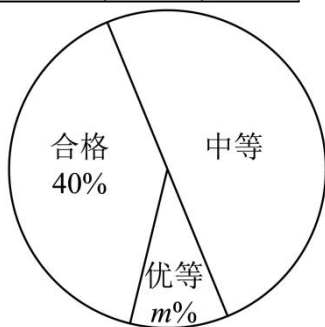
B 款智能玩具飞机 10 架一次充满电后运行最长时间属于中等的的数据是：

70, 71, 72, 72, 73

两款智能玩具飞机运行最长时间统计表， B 款智能玩具飞机运行最长时间扇形统计图

类别	A	B
----	-----	-----

平均数	70	70
中位数	71	b
众数	a	67
方差	30.4	26.6



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 上述图表中 $a =$ _____, $b =$ _____, $m =$ _____;
- (2) 根据以上数据，你认为哪款智能玩具飞机运行性能更好？请说明理由（写出一条理由即可）；
- (3) 若某玩具仓库有 A 款智能玩具飞机 200 架、 B 款智能玩具飞机 120 架，估计两款智能玩具飞机运行性能在中等及以上的共有多少架？

【答案】 (1) 72, 70.5, 10;

- (2) B 款智能玩具飞机运行性能更好；因为 B 款智能玩具飞机运行时间的方差比 A 款智能玩具飞机运行时间的方差小，运行时间比较稳定；
- (3) 两款智能玩具飞机运行性能在中等及以上的大约共有 192 架。

【解析】

【分析】 (1) 由 A 款数据可得 A 款的众数，即可求出 a ，由 B 款扇形数据可求得合格数及优秀数，从而求得中位数及优秀等次的百分比；

(2) 根据方差越小越稳定即可判断；

(3) 用样本数据估计总体，分别求出两款飞机中等及以上的架次相加即可。

【小问 1 详解】

解：由题意可知 10 架 A 款智能玩具飞机充满电后运行最长时间中，只有 72 出现了三次，且次数最多，则该组数据的众数为 72，即 $a = 72$ ；

由 B 款智能玩具飞机运行时间的扇形图可知，合格的百分比为 40%，

则 B 款智能玩具飞机运行时间合格的架次为： $10 \times 40\% = 4$ （架）

则 B 款智能玩具飞机运行时间优等的架次为： $10 - 4 - 5 = 1$ (架)

则 B 款智能玩具飞机的运行时间第五、第六个数据分别为： $70, 71$,

故 B 款智能玩具飞机运行时间的中位数为： $\frac{70+71}{2} = 70.5$

B 款智能玩具飞机运行时间优等的百分比为： $\frac{1}{10} \times 100\% = 10\%$

即 $m = 10$

故答案为： 72 , 70.5 , 10 ;

【小问 2 详解】

B 款智能玩具飞机运行性能更好；因为 B 款智能玩具飞机运行时间的方差比 A 款智能玩具飞机运行时间的方差小，运行时间比较稳定；

【小问 3 详解】

200 架 A 款智能玩具飞机运行性能在中等及以上的架次为：

$$200 \times \frac{6}{10} = 120 \text{ (架)}$$

200 架 A 款智能玩具飞机运行性能在中等及以上的架次为：

$$120 \times \frac{6}{10} = 72 \text{ (架)}$$

则两款智能玩具飞机运行性能在中等及以上的共有： $120 + 72 = 192$ 架，

答：两款智能玩具飞机运行性能在中等及以上的大约共有 192 架.

【点睛】 本题考查了扇形统计图，中位数、众数、百分比，用方差做决策，用样本估计总体；解题的关键是熟练掌握相关知识综合求解.

22. 某公司不定期为员工购买某预制食品厂生产的杂酱面、牛肉面两种食品.

(1) 该公司花费 3000 元一次性购买了杂酱面、牛肉面共 170 份，此时杂酱面、牛肉面的价格分别为 15 元、20 元，求购买两种食品各多少份？

(2) 由于公司员工人数和食品价格有所调整，现该公司分别花费 1260 元、1200 元一次性购买杂酱面、牛肉面两种食品，已知购买杂酱面的份数比牛肉面的份数多 50%，每份杂酱面比每份牛肉面的价格少 6 元，求购买牛肉面多少份？

【答案】 (1) 购买杂酱面 80 份，购买牛肉面 90 份

(2) 购买牛肉面 90 份

【解析】

【分析】 (1) 设购买杂酱面 x 份，则购买牛肉面 $(170 - x)$ 份，由题意知， $15x + 20 \times (170 - x) = 3000$, 解

方程可得 x 的值，然后代入 $170-x$ ，计算求解，进而可得结果；

(2) 设购买牛肉面 a 份，则购买杂酱面 $1.5a$ 份，由题意知， $\frac{1260}{1.5a} + 6 = \frac{1200}{a}$ ，计算求出满足要求的解即可。

【小问 1 详解】

解：设购买杂酱面 x 份，则购买牛肉面 $(170-x)$ 份，

由题意知， $15x + 20 \times (170-x) = 3000$ ，

解得， $x = 80$ ，

$\therefore 170-x = 90$ ，

$\therefore$ 购买杂酱面 80 份，购买牛肉面 90 份；

【小问 2 详解】

解：设购买牛肉面 a 份，则购买杂酱面 $1.5a$ 份，

由题意知， $\frac{1260}{1.5a} + 6 = \frac{1200}{a}$ ，

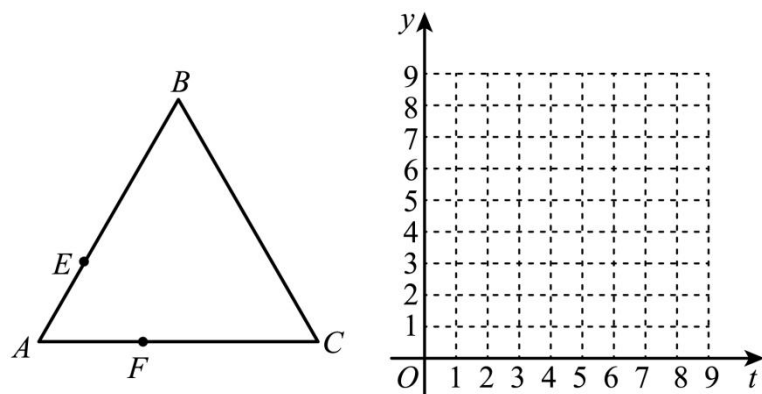
解得 $a = 90$ ，

经检验， $a = 90$ 是分式方程的解，

$\therefore$ 购买牛肉面 90 份。

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，分式方程的应用。解题的关键在于根据题意正确的列方程。

23. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形，动点 E, F 分别以每秒 1 个单位长度的速度同时从点 A 出发，点 E 沿折线 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 方向运动，点 F 沿折线 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 方向运动，当两者相遇时停止运动。设运动时间为 t 秒，点 E, F 的距离为 y 。



(1) 请直接写出 y 关于 t 的函数表达式并注明自变量 t 的取值范围；

(2) 在给定的平面直角坐标系中画出这个函数的图象，并写出该函数的一条性质；

(3) 结合函数图象，写出点 E, F 相距 3 个单位长度时 t 的值。

【答案】(1) 当 $0 < t \leq 4$ 时, $y = t$; 当 $4 < t \leq 6$ 时, $y = 12 - 2t$;

(2) 图象见解析, 当 $0 < t \leq 4$ 时, y 随 x 的增大而增大

(3) t 的值为 3 或 4.5

【解析】

【分析】(1) 分两种情况: 当 $0 < t \leq 4$ 时, 根据等边三角形的性质解答; 当 $4 < t \leq 6$ 时, 利用周长减去 $2AE$ 即可;

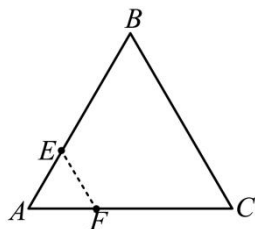
(2) 在直角坐标系中描点连线即可;

(3) 利用 $y = 3$ 分别求解即可.

【小问 1 详解】

解: 当 $0 < t \leq 4$ 时,

连接 EF ,

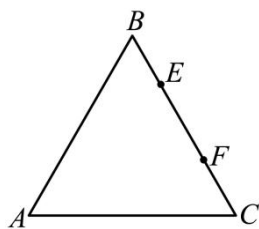


由题意得 $AE = AF$, $\angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形,

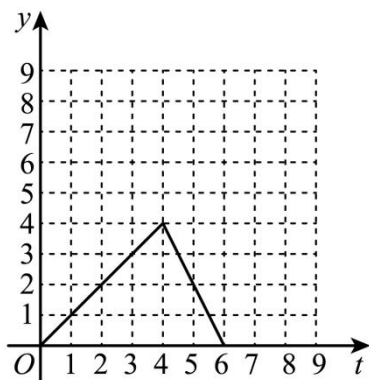
$\therefore y = t$;

当 $4 < t \leq 6$ 时, $y = 12 - 2t$;



【小问 2 详解】

函数图象如图:



当 $0 < t \leq 4$ 时, y 随 x 的增大而增大;

【小问 3 详解】

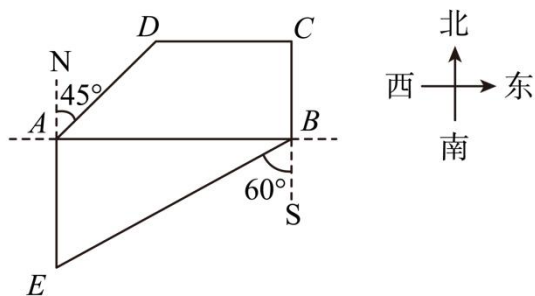
当 $0 < t \leq 4$ 时, $y = 3$ 即 $t = 3$;

当 $4 < t \leq 6$ 时, $y = 3$ 即 $12 - 2t = 3$, 解得 $t = 4.5$,

故 t 的值为 3 或 4.5.

【点睛】此题考查了动点问题, 一次函数的图象及性质, 解一元一次方程, 正确理解动点问题是解题的关键.

24. 为了满足市民的需求, 我市在一条小河 AB 两侧开辟了两条长跑锻炼线路, 如图; ① $A-D-C-B$; ② $A-E-B$. 经勘测, 点 B 在点 A 的正东方, 点 C 在点 B 的正北方 10 千米处, 点 D 在点 C 的正西方 14 千米处, 点 D 在点 A 的北偏东 45° 方向, 点 E 在点 A 的正南方, 点 E 在点 B 的南偏西 60° 方向. (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41, \sqrt{3} \approx 1.73$)



(1) 求 AD 的长度. (结果精确到 1 千米)

(2) 由于时间原因, 小明决定选择一条较短线路进行锻炼, 请计算说明他应该选择线路①还是线路②?

【答案】(1) AD 的长度约为 14 千米

(2) 小明应该选择路线①, 理由见解析

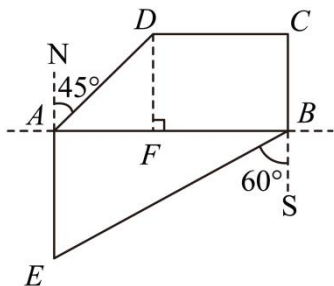
【解析】

【分析】(1) 过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F , 根据题意可得四边形 $BCDF$ 是矩形, 进而得出 $DF = BC = 10$, 然后解直角三角形即可;

(2) 分别求出线路①和线路②的总路程，比较即可.

【小问 1 详解】

解：过点 D 作 $DF \perp AB$ 于点 F ,



由题意可得：四边形 $BCDF$ 是矩形，

$$\therefore DF = BC = 10 \text{ 千米},$$

$\because$ 点 D 在点 A 的北偏东 45° 方向，

$$\therefore \angle DAF = \angle DAN = 45^\circ,$$

$$\therefore AD = \frac{DF}{\sin 45^\circ} = 10\sqrt{2} \approx 14 \text{ 千米},$$

答： AD 的长度约为 14 千米；

【小问 2 详解】

由题意可得： $BC = 10$ ， $CD = 14$ ，

$$\therefore \text{路线①的路程为： } AD + DC + BC = 10\sqrt{2} + 14 + 10 = 24 + 10\sqrt{2} \approx 38 \text{ (千米)},$$

$$\because DF = BC = 10, \angle DAF = \angle DAN = 45^\circ, \angle DFA = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle DAF$ 为等腰直角三角形，

$$\therefore AF = DF = 10,$$

$$\therefore AB = AF + BF = AF + DC = 10 + 14 = 24,$$

由题意可得 $\angle EBS = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle E = 60^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{AB}{\tan 60^\circ} = 8\sqrt{3}, \quad BE = \frac{AB}{\sin 60^\circ} = 16\sqrt{3},$$

所以路线②的路程为： $AE + BE = 8\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \approx 42$ 千米，

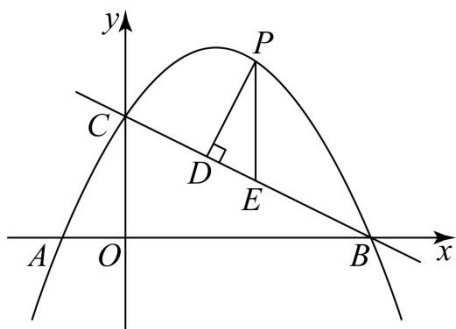
$\therefore$ 路线①的路程 $<$ 路线②的路程，

故小明应该选择路线①.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的实际应用，熟练掌握锐角三角函数的相关定义，掌握特殊角三角函数

值是解本题的关键.

25. 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 过点 $(1, 3)$, 且交 x 轴于点 $A(-1, 0)$, B 两点, 交 y 轴于点 C .



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 P 是直线 BC 上方抛物线上的一动点, 过点 P 作 $PD \perp BC$ 于点 D , 过点 P 作 y 轴的平行线交直线 BC 于点 E , 求 $\triangle PDE$ 周长的最大值及此时点 P 的坐标;

(3) 在 (2) 中 $\triangle PDE$ 周长取得最大值的条件下, 将该抛物线沿射线 CB 方向平移 $\sqrt{5}$ 个单位长度, 点 M 为平移后的抛物线的对称轴上一点. 在平面内确定一点 N , 使得以点 A, P, M, N 为顶点的四边形是菱形, 写出所有符合条件的点 N 的坐标, 并写出求解点 N 的坐标的其中一种情况的过程.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

(2) $\triangle PDE$ 周长的最大值 $\frac{6\sqrt{5}+10}{5}$, 此时点 $P(2, 3)$

(3) 以点 A, P, M, N 为顶点的四边形是菱形时 $N\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 把 $(1, 3)$ 、 $A(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$ 计算即可;

(2) 延长 PE 交 x 轴于 F , 可得 $\angle DEP = \angle BCO$, 进而得到 $\triangle DPE \sim \triangle OBC$, $\frac{\triangle DPE \text{ 周长}}{\triangle OBC \text{ 周长}} = \frac{PE}{BC}$, 求出 PE 的最大值即可;

(3) 先求出平移后的解析式, 再设出 M, N 的坐标, 最后根据菱形的性质和判定计算即可.

【小问 1 详解】

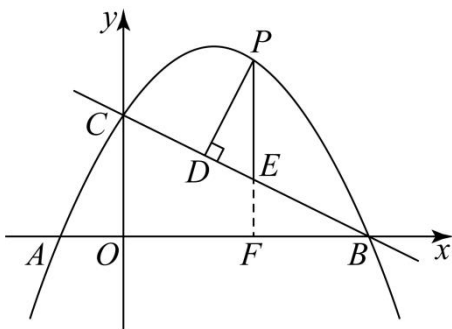
把 $(1, 3)$ 、 $A(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$ 得,
$$\begin{cases} 3 = a + b + 2 \\ 0 = a - b + 2 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{1}{2}, \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$;

【小问 2 详解】

延长 PE 交 x 轴于 F ,



$\therefore$ 过点 P 作 $PD \perp BC$ 于点 D , 过点 P 作 y 轴的平行线交直线 BC 于点 E ,

$\therefore \angle DEP = \angle BCO$, $\angle PDE = \angle COB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DPE \sim \triangle OBC$,

$$\therefore \frac{\triangle DPE \text{ 周长}}{\triangle OBC \text{ 周长}} = \frac{PE}{BC},$$

$$\therefore \triangle DPE \text{ 周长} = \frac{PE}{BC} \cdot \triangle OBC \text{ 周长},$$

$\therefore$ 当 PE 最大时 $\triangle PDE$ 周长的最大

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$,

$\therefore B(4, 0)$,

$\therefore$ 直线 BC 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = 2\sqrt{5}$

设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2\right)$, 则 $E\left(m, -\frac{1}{2}m + 2\right)$

$$\therefore PE = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 2 - \left(-\frac{1}{2}m + 2\right) = -\frac{1}{2}m^2 + 2m = -\frac{1}{2}(m-2)^2 + 2,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$ 时 $PE = 2$ 最大, 此时 $P(2, 3)$

$\therefore \triangle BOC$ 周长为 $OC + OB + BC = 6 + 2\sqrt{5}$,

$$\therefore \triangle PDE \text{ 周长的最大值为 } \frac{2}{2\sqrt{5}} \times (6+2\sqrt{5}) = \frac{6\sqrt{5}+10}{5}, \text{ 此时 } P(2,3),$$

$$\text{即 } \triangle PDE \text{ 周长的最大值 } \frac{6\sqrt{5}+10}{5}, \text{ 此时点 } P(2,3);$$

【小问 3 详解】

$\therefore$ 将该抛物线沿射线 CB 方向平移 $\sqrt{5}$ 个单位长度，可以看成是向右平移 2 个单位长度再向下平移一个单位长度，

$$\therefore \text{ 平移后的解析式为 } y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{3}{2}(x-2) + 2 - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - 4, \text{ 此抛物线对称轴为直线 } x = \frac{7}{2},$$

$$\therefore \text{ 设 } M\left(\frac{7}{2}, n\right), N(s, t)$$

$$\therefore P(2,3), A(-1,0)$$

$$\therefore PA^2 = 18, PM^2 = \left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 + (n-3)^2 = \frac{9}{4} + (n-3)^2, AM^2 = \left(\frac{7}{2} + 1\right)^2 + (n-0)^2 = \frac{81}{4} + n^2,$$

当 PA 为对角线时，此时以点 A, P, M, N 为顶点的四边形是菱形

$\therefore PA$ 与 MN 互相平分，且 $PM = AM$

$$\therefore \frac{9}{4} + (n-3)^2 = \frac{81}{4} + n^2, \text{ 解得 } n = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore PA \text{ 中点坐标为 } \left(\frac{2-1}{2}, \frac{3+0}{2}\right), MN \text{ 中点坐标为 } \left(\frac{\frac{7}{2}+s}{2}, \frac{n+t}{2}\right),$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{7}{2} + s = 1 \\ n + t = 3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} s = -\frac{5}{2} \\ t = \frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\text{此时 } N\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right);$$

当 PA 为边长且 AM 和 PN 是对角线时，此时以点 A, P, M, N 为顶点的四边形是菱形

$\therefore AM$ 与 PN 互相平分，且 $PM = PA$

$$\therefore \frac{9}{4} + (n-3)^2 = 18, \text{ 解得 } n = 3 \pm \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore PN \text{ 中点坐标为 } \left(\frac{2+s}{2}, \frac{3+t}{2} \right), AM \text{ 中点坐标为 } \left(\frac{\frac{7}{2}-1}{2}, \frac{n+0}{2} \right),$$

$$\therefore \begin{cases} 2+s = \frac{7}{2}-1 \\ 3+t = n+0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} s = \frac{1}{2} \\ t = \pm \frac{3\sqrt{7}}{2} \end{cases},$$

$$\text{此时 } N\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right) \text{ 或 } N\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right);$$

同理，当 PA 为边长且 AN 和 PM 是对角线时，此时以点 A, P, M, N 为顶点的四边形是菱形

$\therefore AN$ 和 PM 互相平分，且 $AM = PA$

$$\frac{81}{4} + n^2 = 18, \text{ 此方程无解;}$$

综上所述，以点 A, P, M, N 为顶点的四边形是菱形时 $N\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)$;

【点睛】本题是二次函数的综合题，考查了待定系数法，相似三角形的性质与判定，菱形的性质及应用，中点坐标公式等知识，解题的关键是用含字母的代数式表示相关点的坐标及相关线段的长度。

26. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，点 D 为线段 AB 上一动点，连接 CD 。

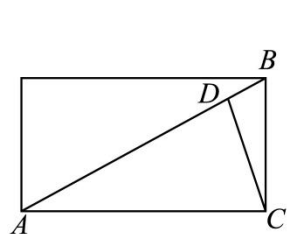


图1

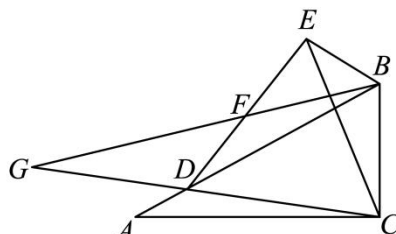
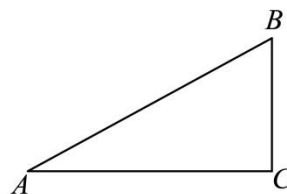


图2



备用图

- (1) 如图 1，若 $AC = 9$ ， $BD = \sqrt{3}$ ，求线段 AD 的长。
- (2) 如图 2，以 CD 为边在 CD 上方作等边 $\triangle CDE$ ，点 F 是 DE 的中点，连接 BF 并延长，交 CD 的延长线于点 G 。若 $\angle G = \angle BCE$ ，求证： $GF = BF + BE$ 。
- (3) 在 CD 取得最小值的条件下，以 CD 为边在 CD 右侧作等边 $\triangle CDE$ 。点 M 为 CD 所在直线上一点，将 $\triangle BEM$ 沿 BM 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内得到 $\triangle BNM$ 。连接 AN ，点 P 为 AN 的中点，连接 CP ，当 CP 取最大值时，连接 BP ，将 $\triangle BCP$ 沿 BC 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内得到 $\triangle BCQ$ ，请直接写出此时 $\frac{NQ}{CP}$ 的值。

【答案】(1) $5\sqrt{3}$

(2) 见解析 (3) $\frac{\sqrt{43}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 解 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，求得 AB ，根据 $AD = AB - BD$ 即可求解；

(2) 延长 FB 使得 $FH = FG$ ，连接 EH ，可得 $\triangle GFD \cong \triangle HFE$ (SAS)，根据 $\angle DEC = \angle DBC = 60^\circ$ ，得出 B, C, D, E 四点共圆，则 $\angle EDB = \angle BCE$ ， $\angle BEC = \angle BDC$ ，得出 $\angle BEH = 60^\circ - \angle BEC = 60^\circ - \angle BDC = \angle EDB$ ，结合已知条件得出 $\angle H = \angle BEH$ ，可得 $EB = BH$ ，即可得证；

(3) 在 CD 取得最小值的条件下，即 $CD \perp AB$ ，设 $AB = 4a$ ，则 $BC = 2a$ ， $AC = 2\sqrt{3}a$ ，根据题意得出点 N 在以 B 为圆心， a 为半径的圆上运动，取 AB 的中点 S ，连接 SP ，则 SP 是 $\triangle ABN$ 的中位线， P 在半径为 $\frac{1}{2}a$ 的 $\odot S$ 上运动，当 CP 取最大值时，即 P, S, C 三点共线时，此时如图，过点 P 作 $PT \perp AC$ 于点 T ，过点 N 作 $NR \perp AC$ 于点 R ，连接 PQ ，交 NR 于点 U ，则四边形 $PURT$ 是矩形，得出 PD 是 $\triangle ANR$ 的中位线，同理可得 PT 是 $\triangle ANR$ 的中位线， $\triangle BCS$ 是等边三角形，将 $\triangle BCP$ 沿 BC 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内得到 $\triangle BCQ$ ，则 $\angle QCP = 2\angle BCP = 120^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle NUQ$ 中，勾股定理求得 NQ ，进而即可求解。

【小问 1 详解】

解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，

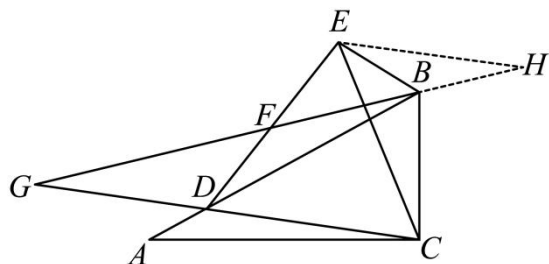
$$\therefore AB = \frac{AC}{\sin B} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = \sqrt{3},$$

$$\therefore AD = AB - BD = 5\sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，延长 FB 使得 $FH = FG$ ，连接 EH ，



$\because F$ 是 DE 的中点则 $DF = FE$, $FH = FG$, $\angle GFD = \angle HFE$,

$\therefore \triangle GFD \cong \triangle HFE$ (SAS),

$\therefore \angle H = \angle G$,

$\therefore EH \parallel GC$,

$\therefore \angle HEC = \angle ECD = 60^\circ$

$\because \triangle DEC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DEC = \angle EDC = 60^\circ$,

$\therefore \angle DEC = \angle DBC = 60^\circ$,

$\therefore B, C, D, E$ 四点共圆,

$\therefore \angle EDB = \angle BCE$, $\angle BEC = \angle BDC$,

$\therefore \angle BEH = 60^\circ - \angle BEC = 60^\circ - \angle BDC = \angle EDB$,

$\therefore \angle G = \angle BCE = \angle BDE = \angle H$,

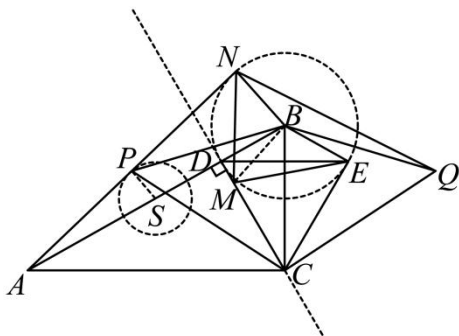
$\therefore \angle H = \angle BEH$,

$\therefore EB = BH$,

$\therefore FH = FG = BF + BH = BF + EB$;

【小问 3 详解】

解：如图所示，



在 CD 取得最小值的条件下，即 $CD \perp AB$ ，

设 $AB = 4a$ ，则 $BC = 2a$ ， $AC = 2\sqrt{3}a$ ，

$$\therefore CD = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{2\sqrt{3}a \times 2a}{4a} = \sqrt{3}a, \quad BD = \frac{1}{2}BC = a,$$

$\therefore$ 将 $\triangle BEM$ 沿 BM 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内得到 $\triangle BNM$ 。

$\therefore BE = BN$

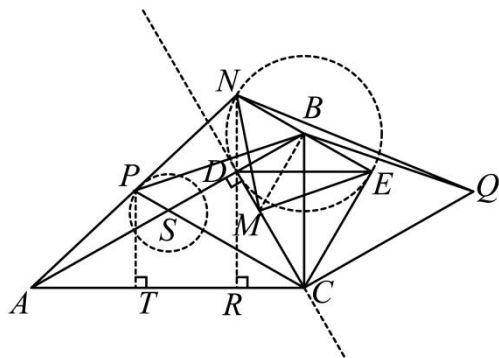
$\therefore$ 点 N 在以 B 为圆心， a 为半径的圆上运动，

取 AB 的中点 S ，连接 SP ，

则 SP 是 $\triangle ABN$ 的中位线，

$\therefore P$ 在半径为 $\frac{1}{2}a$ 的 $\odot S$ 上运动，

当 CP 取最大值时，即 P, S, C 三点共线时，此时如图，过点 P 作 $PT \perp AC$ 于点 T ，过点 N 作 $NR \perp AC$ 于点 R ，



$\because S$ 是 AB 的中点， $\angle ABC = 60^\circ$

$\therefore SC = SB = BC$ ，

$\therefore \triangle BCS$ 是等边三角形，

则 $\angle PCB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle PCA = \angle ACB - \angle BCP = 30^\circ$ ，

$\because BC = 2a$ ， $AB = 4a$ ，

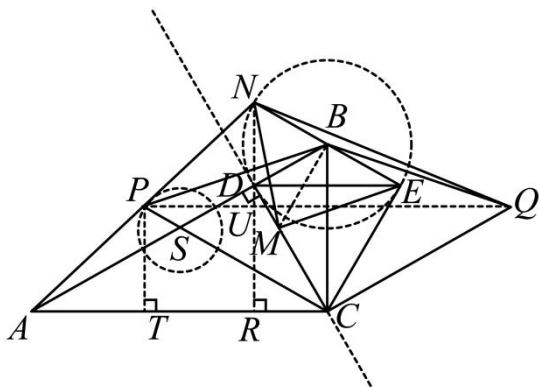
$\therefore CS = BC = 2a$ ， $PS = \frac{1}{2}a$

$\therefore PC = \frac{5}{2}a$ ， $PT = PC \times \sin \angle PCT = \frac{1}{2}PC = \frac{5}{4}a$ ， $TC = \sqrt{3}PT = \frac{5}{4}\sqrt{3}a$

$\because AC = 2\sqrt{3}a$ ，

$\therefore AT = \frac{3}{4}\sqrt{3}a$ ，

如图所示，连接 PQ ，交 NR 于点 U ，则四边形 $PURT$ 是矩形，



$\therefore PU \parallel AR$, P 是 AN 的中点,

$$\therefore \frac{NU}{UR} = \frac{NP}{PA} = 1$$

即 PD 是 $\triangle ANR$ 的中位线, 同理可得 PT 是 $\triangle ANR$ 的中位线,

$$\therefore NU = UR = PT = \frac{5}{4}a, \quad PU = \frac{1}{2}AR = AT = \frac{3}{4}\sqrt{3}a$$

$\because \triangle BCS$ 是等边三角形, 将 $\triangle BCP$ 沿 BC 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内得到 $\triangle BCQ$,

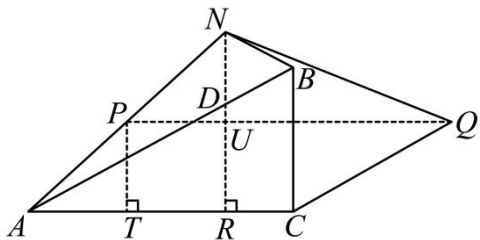
$$\therefore \angle QCP = 2\angle BCP = 120^\circ$$

$$\therefore PQ = \sqrt{3}QC = \sqrt{3}PC = \frac{5}{2}\sqrt{3}a$$

$$\text{则 } UQ = PQ - PU = \frac{5}{2}\sqrt{3}a - \frac{3}{4}\sqrt{3}a = \frac{7}{4}\sqrt{3}a$$

$$\text{在 Rt}\triangle NUQ \text{ 中, } NQ = \sqrt{NU^2 + UQ^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{4}a\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\sqrt{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{43}}{2}a$$

$$\therefore \frac{NQ}{CP} = \frac{\frac{\sqrt{43}}{2}a}{\frac{5}{2}a} = \frac{\sqrt{43}}{5}.$$



【点睛】 本题考查了解直角三角形，全等三角形的性质与判定，

等腰三角形的性质，三角形中位线的性质，折叠的性质，圆外一点到圆上距离的最值问题，垂线段最短，矩形的性质，等边三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】