

重庆市 2023 年初中学业水平暨高中招生考试数学试题 (B 卷)

一、选择题：(本大题 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分) 在每个小题的下面，都给出了代号为 A 、 B 、 C 、 D 的四个答案，其中只有一个是正确的，请将答题卡上题号右侧正确答案所对应的方框涂黑.

1. 4 的相反数是 ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{4}$

C. 4

D. -4

【答案】D

【解析】

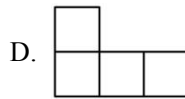
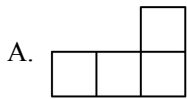
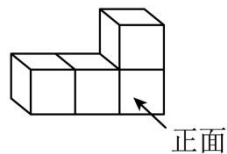
【分析】只有符号不同的两个数叫做互为相反数，由此即可得到答案.

【详解】解：4 的相反数是 -4，

故选：D.

【点睛】本题考查相反数的概念，关键是掌握相反数的定义.

2. 四个大小相同的正方体搭成的几何体如图所示，从正面看到的视图是 ()

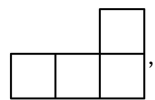


【答案】A

【解析】

【分析】从正面看到的有三列，从左到右正方形的个数依次是 1，1，2，据此判断即可.

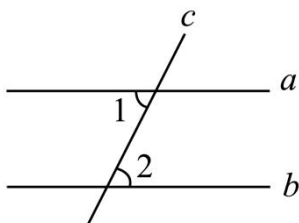
【详解】解：从正面看到的视图是：



故选：A.

【点睛】本题考查了几何体的视图，明确从正面看到的视图是解题关键.

3. 如图，直线 a 、 b 被直线 c 所截，若 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 63^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为().



- A. 27° B. 53° C. 63° D. 117°

【答案】C

【解析】

【分析】求 $\angle 2$ 的度数，根据平行线的性质求解即可.

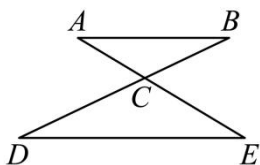
【详解】 $\because a \parallel b$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 63^\circ,$$

故选：C.

【点睛】此题考查了平行线的性质，解题的关键熟练掌握两直线平行，内错角相等的性质.

4. 如图，已知 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ ， $AC:EC = 2:3$ ，若 AB 的长度为6，则 DE 的长度为（ ）



- A. 4 B. 9 C. 12 D. 13.5

【答案】B

【解析】

【分析】根据相似三角形的性质即可求出.

【详解】解： $\because \triangle ABC \sim \triangle EDC$,

$$\therefore AC:EC = AB:DE,$$

$$\because AC:EC = 2:3, \quad AB = 6,$$

$$\therefore 2:3 = 6:DE,$$

$$\therefore DE = 9,$$

故选：B.

【点睛】此题考查的是相似三角形的性质,掌握相似三角形的边长比等于相似比是解决此题的关键.

5. 反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象一定经过的点是（ ）

- A. $(-3, 2)$ B. $(2, -3)$ C. $(-2, -4)$ D. $(2, 3)$

【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数的定义，只要点的横纵坐标之积等于 k 即可判断该点在函数图象上，据此求解.

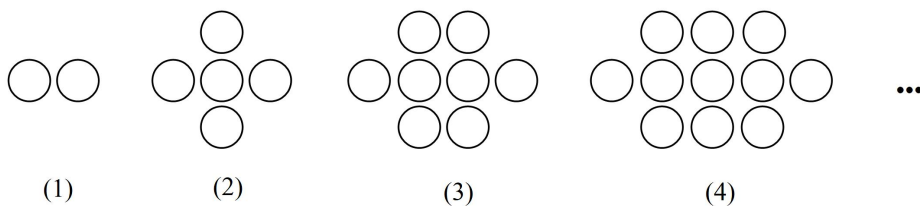
【详解】解： $\because -3 \times 2 = -6, 2 \times (-3) = -6, -2 \times (-4) = 8, 2 \times 3 = 6,$

$\therefore$ 点 $(2, 3)$ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x}$ 的图象上,

故选：D.

【点睛】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特点，熟知点的横纵坐标满足函数解析式是解题关键.

6. 用圆圈按如图所示的规律拼图案，其中第①个图案中有 2 个圆圈，第②个图案中有 5 个圆圈，第③个图案中有 8 个圆圈，第④个图案中有 11 个圆圈， $\dots$ ，按此规律排列下去，则第⑦个图案中圆圈的个数为 ()



- A. 14 B. 20 C. 23 D. 26

【答案】B

【解析】

【分析】根据前四个图案圆圈的个数找到规律，即可求解.

【详解】解：因为第①个图案中有 2 个圆圈， $2 = 3 \times 1 - 1$ ；

第②个图案中有 5 个圆圈， $5 = 3 \times 2 - 1$ ；

第③个图案中有 8 个圆圈， $8 = 3 \times 3 - 1$ ；

第④个图案中有 11 个圆圈， $11 = 3 \times 4 - 1$ ；

$\dots$,

所以第⑦个图案中圆圈的个数为 $3 \times 7 - 1 = 20$ ；

故选：B.

【点睛】本题考查了图形类规律探究，根据前四个图案圆圈的个数找到第 n 个图案的规律为 $3n - 1$ 是解题的关键.

7. 估计 $\sqrt{5} \times \left(\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ 的值应在 ()

- A. 4 和 5 之间 B. 5 和 6 之间 C. 6 和 7 之间 D. 7 和 8 之间

【答案】A

【解析】

【分析】先计算二次根式的乘法，再根据无理数的估算即可得.

【详解】解： $\sqrt{5} \times \left(\sqrt{6} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{30} - 1$,

$$\because 25 < 30 < 36,$$

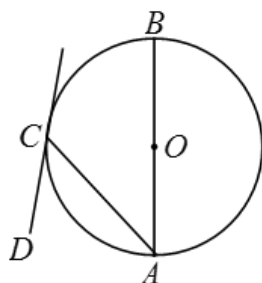
$$\therefore \sqrt{25} < \sqrt{30} < \sqrt{36}, \text{ 即 } 5 < \sqrt{30} < 6,$$

$$\therefore 4 < \sqrt{30} - 1 < 5,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了二次根式的乘法、无理数的估算，熟练掌握二次根式的乘法法则是解题关键.

8. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，直线 CD 与 $\odot O$ 相切于点 C ，连接 AC ，若 $\angle ACD = 50^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数为 ()



A. 30°

B. 40°

C. 50°

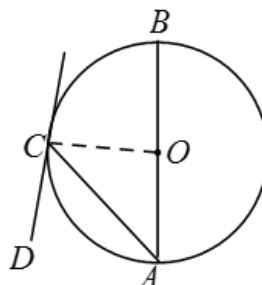
D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】连接 OC ，先根据圆的切线的性质可得 $\angle OCD = 90^\circ$ ，从而可得 $\angle OCA = 40^\circ$ ，再根据等腰三角形的性质即可得.

【详解】解：如图，连接 OC ，



$\because$ 直线 CD 与 $\odot O$ 相切,

$$\therefore OC \perp CD,$$

$$\therefore \angle OCD = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACD = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle OCA = 40^\circ,$$

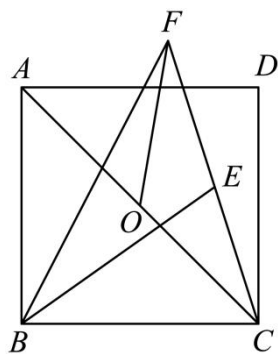
$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle OCA = 40^\circ,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了圆的切线的性质、等腰三角形的性质，熟练掌握圆的切线的性质是解题关键.

9. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， O 为对角线 AC 的中点， E 为正方形内一点，连接 BE ， $BE = BA$ ，连接 CE 并延长，与 $\angle ABE$ 的平分线交于点 F ，连接 OF ，若 $AB = 2$ ，则 OF 的长度为（ ）



A. 2

B. $\sqrt{3}$

C. 1

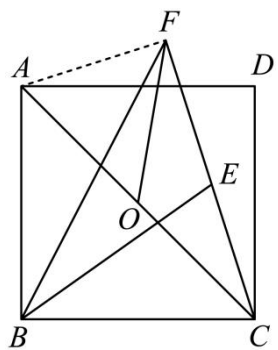
D. $\sqrt{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】连接 AF ，根据正方形 $ABCD$ 得到 $AB = BC = BE$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，根据角平分线的性质和等腰三角形的性质，求得 $\angle BFE = 45^\circ$ ，再证明 $\triangle ABF \cong \triangle EBF$ ，求得 $\angle AFC = 90^\circ$ ，最后根据直角三角形斜边上的中点等于斜边的一半，即可求出 OF 的长度.

【详解】解：如图，连接 AF ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = BE = BC, \angle ABC = 90^\circ, AC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \angle BEC = \angle BCE,$$

$$\therefore \angle EBC = 180^\circ - 2\angle BEC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC - \angle EBC = 2\angle BEC - 90^\circ,$$

$$\because BF \text{ 平分 } \angle ABE,$$

$$\therefore \angle ABF = \angle EBF = \frac{1}{2}\angle ABE = \angle BEC - 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BEC - \angle EBF = 45^\circ,$$

在 $\triangle BAF$ 与 $\triangle BEF$,

$$\begin{cases} AB = EB \\ \angle ABF = \angle EBF, \\ BF = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAF \cong \triangle BEF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BFE = \angle BFA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle BAF + \angle BFE = 90^\circ,$$

$\because O$ 为对角线 AC 的中点,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2},$$

故选: D.

【点睛】本题考查了等腰三角形的判定和性质, 三角形内角和定理, 正方形的性质, 直角三角形特征, 作出正确的辅助线, 求得 $\angle BFE = 45^\circ$ 是解题的关键.

10. 在多项式 $x - y - z - m - n$ (其中 $x > y > z > m > n$) 中, 对相邻的两个字母间任意添加绝对值符号, 添加绝对值符号后仍只有减法运算, 然后进行去绝对值运算, 称此为“绝对操作”. 例如:

$$x - y - |z - m| - n = x - y - z + m - n, \quad |x - y| - z - |m - n| = x - y - z - m + n, \quad \dots\dots$$

下列说法:

- ①存在“绝对操作”, 使其运算结果与原多项式相等;
- ②不存在“绝对操作”, 使其运算结果与原多项式之和为 0;
- ③所有的“绝对操作”共有 7 种不同运算结果.

其中正确的个数是 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【答案】C

【解析】

【分析】根据“绝对操作”的定义及绝对值的性质对每一项判断即可解答.

【详解】解： $\because x > y > z > m > n$,

$$\therefore |x-y|-z-m-n = x-y-z-m-n,$$

$\therefore$ 存在“绝对操作”，使其运算结果与原多项式相等，

故①正确；

根据绝对操作的定义可知：在多项式 $x-y-z-m-n$ （其中 $x > y > z > m > n$ ）中，经过绝对操作后， z 、 n 、 m 的符号都有可能改变，但是 x 、 y 的符号不会改变，

$\therefore$ 不存在“绝对操作”，使其运算结果与原多项式之和为 0，

故②正确；

$\therefore$ 在多项式 $x-y-z-m-n$ （其中 $x > y > z > m > n$ ）中，经过“绝对操作”可能产生的结果如下：

$$\therefore |x-y|-z-m-n = x-y-z-m-n,$$

$$x-|y-z|-m-n = x-y+z-m-n,$$

$$x-y-|z-m|-n = |x-y|-|z-m|-n = x-y-z+m-n,$$

$$x-y-z-|m-n| = |x-y|-z-|m-n| = x-y-z-m+n,$$

$$x-|y-z|-|m-n| = x-y+z-m+n,$$

共有 5 种不同运算结果，

故③错误；

故选 C.

【点睛】本题考查了新定义“绝对操作”，绝对值的性质，整式的加减运算，掌握绝对值的性质是解题的关键.

二、填空题：（本大题 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分）请将每小题的答案直接填在答题卡中对应的横线上.

11. 计算： $|-5| + (2 - \sqrt{3})^0 =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】根据绝对值、零指数幂法则计算即可.

【详解】解： $|-5| + (2 - \sqrt{3})^0 = 5 + 1 = 6$.

故答案为： 6.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，熟练掌握相关运算法则是解决本题的关键.

12. 有四张完全一样正面分别写有汉字“清”“风”“朗”“月”的卡片，将其背面朝上并洗匀，从中随机抽取一张，记下卡片正面上的汉字后放回，洗匀后再从中随机抽取一张，则抽取的两张卡片上的汉字相同的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 根据列表法求概率即可求解.

【详解】 解：列表如下，

	清	风	朗	月
清	清清	清风	清朗	清月
风	风清	风风	风朗	风月
朗	朗清	朗风	朗朗	朗月
月	月清	月风	月朗	月月

共有 16 中等可能结果，其中，抽取的两张卡片上的汉字相同的情形有 4 种，

$\therefore$ 抽取的两张卡片上的汉字相同的概率是 $\frac{1}{4}$ ，

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【点睛】 本题考查了列表法求概率，熟练掌握列表法求概率是解题的关键.

13. 若七边形的内角中有一个角为 100° ，则其余六个内角之和为_____.

【答案】 800° 或 800 度

【解析】

【分析】 根据多边形的内角和公式 $180^\circ(n-2)$ 即可得.

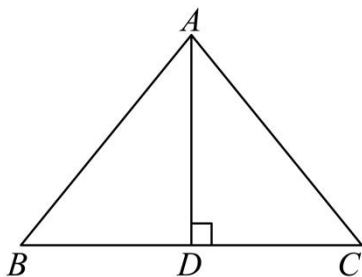
【详解】 解： $\because$ 七边形的内角中有一个角为 100° ，

$\therefore$ 其余六个内角之和为 $180^\circ \times (7-2) - 100^\circ = 800^\circ$ ，

故答案为： 800° .

【点睛】 本题考查了多边形的内角和，熟记多边形的内角和公式是解题关键.

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边的中线，若 $AB = 5$ ， $BC = 6$ ，则 AD 的长度为_____.



【答案】4

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质和勾股定理求解即可.

【详解】解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AD 是 BC 边的中线,

$$\therefore AD \perp BC, \quad BD = \frac{1}{2}BC,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中, } AB = 5, \quad BD = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

故答案为: 4.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质、勾股定理, 熟练掌握等腰三角形的三线合一性质是解答的关键.

15. 为了加快数字化城市建设, 某市计划新建一批智能充电桩, 第一个月新建了 301 个充电桩, 第三个月新建了 500 个充电桩, 设该市新建智能充电桩个数的月平均增长率为 x , 根据题意, 请列出方程_____.

【答案】 $301(1+x)^2 = 500$

【解析】

【分析】根据变化前数量 $\times (1+x)^2 =$ 变化后数量, 即可列出方程.

【详解】 $\because$ 第一个月新建了 301 个充电桩, 该市新建智能充电桩个数的月平均增长率为 x .

$\therefore$ 第二个月新建了 $301(1+x)$ 个充电桩,

$\therefore$ 第三个月新建了 $301(1+x)^2$ 个充电桩,

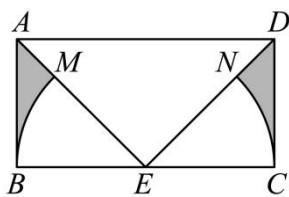
$\because$ 第三个月新建了 500 个充电桩,

$$\text{于是有 } 301(1+x)^2 = 500,$$

$$\text{故答案为 } 301(1+x)^2 = 500.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程的实际应用中的增长率问题, 若设平均增长率为 x , 则有 $a(1+x)^n = b$, 其中 a 表示变化前数量, b 表示变化后数量, n 表示增长次数. 解决增长率问题时要注意区分变化前数量和变化后数量, 同时也要注意变化前后经过了几次增长.

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， E 为 BC 的中点，连接 AE ， DE ，以 E 为圆心， EB 长为半径画弧，分别与 AE ， DE 交于点 M ， N ，则图中阴影部分的面积为_____。（结果保留 π ）



【答案】 $4 - \pi$

【解析】

【分析】 利用矩形的性质求得 $AB = CD = 2$ ， $BE = CE = 2$ ，进而可得 $\angle BAE = \angle AEB = \angle DEC = \angle CDE = 45^\circ$ ，然后根据 $S_{\text{阴影}} = 2(S_{\triangle ABE} - S_{\text{扇形}BEM})$ 解答即可。

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， E 为 BC 的中点，

$$\therefore AB = CD = 2, BE = CE = \frac{1}{2}BC = 2, \angle ABC = \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB = \angle DEC = \angle CDE = 45^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = 2(S_{\triangle ABE} - S_{\text{扇形}BEM}) = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{45\pi \times 2^2}{360} \right) = 2 \times \left(2 - \frac{1}{2}\pi \right) = 4 - \pi;$$

故答案为： $4 - \pi$.

【点睛】 本题考查了矩形的性质和不规则面积的计算，熟练掌握矩形的性质、明确阴影面积为两个全等的等腰直角三角形的面积减去两个圆心角为 45° 的扇形面积是解题关键。

17. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x+2}{3} > \frac{x}{2} + 1 \\ 4x + a < x - 1 \end{cases}$ 的解集为 $x < -2$ ，且关于 y 的分式方程 $\frac{a+2}{y-1} + \frac{y+2}{1-y} = 2$ 的解为正

数，则所有满足条件的整数 a 的值之和为_____.

【答案】 13

【解析】

【分析】 先求出一元一次不等式组中两个不等式的解集，从而可得 $a \leq 5$ ，再解分式方程可得 $a > -2$ 且 $a \neq 1$ ，从而可得 $-2 < a \leq 5$ 且 $a \neq 1$ ，然后将所有满足条件的整数 a 的值相加即可得。

【详解】 解： $\begin{cases} \frac{x+2}{3} > \frac{x}{2} + 1 \text{ ①} \\ 4x + a < x - 1 \text{ ②} \end{cases},$

解不等式①得： $x < -2$,

解不等式②得： $x < -\frac{a+1}{3}$ ，

$\therefore$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x+2}{3} > \frac{x}{2} + 1 \\ 4x+a < x-1 \end{cases}$ 的解集为 $x < -2$ ，

$$\therefore -\frac{a+1}{3} \geq -2,$$

解得 $a \leq 5$ ，

方程 $\frac{a+2}{y-1} + \frac{y+2}{1-y} = 2$ 可化为 $a+2-y-2 = 2(y-1)$ ，

$$\text{解得 } y = \frac{a+2}{3},$$

$\therefore$ 关于 y 的分式方程 $\frac{a+2}{y-1} + \frac{y+2}{1-y} = 2$ 的解为正数，

$$\therefore \frac{a+2}{3} > 0 \text{ 且 } \frac{a+2}{3} - 1 \neq 0,$$

解得 $a > -2$ 且 $a \neq 1$ ，

$$\therefore -2 < a \leq 5 \text{ 且 } a \neq 1,$$

则所有满足条件的整数 a 的值之和为 $-1+0+2+3+4+5=13$ ，

故答案为：13.

【点睛】 本题考查了一元一次不等式组、分式方程，熟练掌握不等式组和分式方程的解法是解题关键.

18. 对于一个四位自然数 M ，若它的千位数字比个位数字多 6，百位数字比十位数字多 2，则称 M 为“天真数”. 如：四位数 7311， $\because 7-1=6$ ， $3-1=2$ ， $\therefore$ 7311 是“天真数”；四位数 8421， $\because 8-1 \neq 6$ ， $\therefore$ 8421 不是“天真数”，则最小的“天真数”为_____；一个“天真数” M 的千位数字为 a ，百位数字为 b ，十

位数字为 c ，个位数字为 d ，记 $P(M) = 3(a+b) + c + d$ ， $Q(M) = a - 5$ ，若 $\frac{P(M)}{Q(M)}$ 能被 10 整除，则满

足条件的 M 的最大值为_____.

【答案】 ①. 6200 ②. 9313

【解析】

【分析】 根据题中“天真数”可求得最小的“天真数”；先根据题中新定义得到 $c+d = (a+b) - 8$ ，进而

$\frac{P(M)}{Q(M)} = \frac{4(a+b)-8}{a-5}$ ，若 M 最大，只需千位数字 a 取最大，即 $a=9$ ，再根据 $\frac{P(M)}{Q(M)}$ 能被 10 整除求得 $b=3$ ，

进而可求解.

【详解】解：根据题意，只需千位数字和百位数字尽可能的小，所以最小的“天真数”为 6200；

根据题意， $a-d=6$ ， $b-c=2$ ， $6 \leq a \leq 9$ ， $2 \leq b \leq 9$ ，则 $c+d=(a+b)-8$ ，

$$\therefore P(M) = 3(a+b) + c + d = 4(a+b) - 8,$$

$$\therefore \frac{P(M)}{Q(M)} = \frac{4(a+b)-8}{a-5},$$

若 M 最大，只需千位数字 a 取最大，即 $a=9$ ，

$$\therefore \frac{P(M)}{Q(M)} = \frac{4(9+b)-8}{9-5} = 7+b,$$

$$\therefore \frac{P(M)}{Q(M)} \text{ 能被 } 10 \text{ 整除},$$

$$\therefore b=3,$$

$\therefore$ 满足条件的 M 的最大值为 9313，

故答案为：6200，9313.

【点睛】本题是一道新定义题，涉及有理数的运算、整式的加减、数的整除等知识，理解新定义是解答的关键.

三、解答题：（本大题 8 个小题，第 19 题 8 分，其余每题各 10 分，共 78 分）解答时每小题必须给出必要的演算过程或推理步骤，画出必要的图形（包括辅助线），请将解答过程书写在答题卡中对应的位置上.

19. 计算：

$$(1) \quad x(x+6) + (x-3)^2;$$

$$(2) \quad \left(3 + \frac{n}{m}\right) \div \frac{9m^2 - n^2}{m}.$$

【答案】(1) $2x^2 + 9$

$$(2) \quad \frac{1}{3m-n}$$

【解析】

【分析】(1) 先根据单项式乘以多项式的法则、完全平方公式计算，再合并同类项；

(2) 根据分式混合运算的法则解答即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解：} \quad x(x+6) + (x-3)^2$$

$$= x^2 + 6x + x^2 - 6x + 9$$

$$= 2x^2 + 9;$$

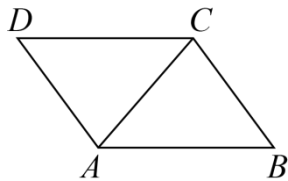
【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & \left(3 + \frac{n}{m}\right) \div \frac{9m^2 - n^2}{m} \\ &= \frac{3m + n}{m} \cdot \frac{m}{(3m + n)(3m - n)} \\ &= \frac{1}{3m - n}. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了整式和分式的运算，属于基本计算题型，熟练掌握整式和分式混合运算的法则是解题的关键.

20. 学习了平行四边形后，小虹进行了拓展性研究. 她发现，如果作平行四边形一条对角线的垂直平分线，那么这个平行四边形的一组对边截垂直平分线所得的线段被垂足平分. 她的解决思路是通过证明对应线段所在的两个三角形全等得出结论. 请根据她的思路完成以下作图与填空:

用直尺和圆规，作 AC 的垂直平分线交 DC 于点 E ，交 AB 于点 F ，垂足为点 O . (只保留作图痕迹)



已知：如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形， AC 是对角线， EF 垂直平分 AC ，垂足为点 O .

求证： $OE = OF$.

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB.$$

$$\therefore \angle ECO = \underline{\hspace{1cm}} \text{①} \hspace{1cm}.$$

$$\because EF \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore \underline{\hspace{1cm}} \text{②} \hspace{1cm}.$$

$$\text{又 } \angle EOC = \underline{\hspace{1cm}} \text{③} \hspace{1cm}.$$

$$\therefore \triangle COE \cong \triangle AOF \text{ (ASA)}.$$

$$\therefore OE = OF.$$

小虹再进一步研究发现，过平行四边形对角线 AC 中点的直线与平行四边形一组对边相交形成的线段均有此特征. 请你依照题意完成下面命题:

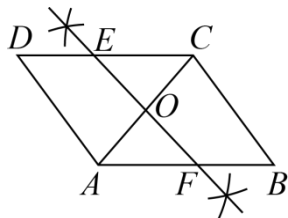
过平行四边形对角线中点的直线_____④_____.

【答案】作图：见解析； $\angle FAO$ ； $AO = CO$ ； $\angle FOA$ ；被平行四边形一组对边所截，截得的线段被对角线中点平分

【解析】

【分析】根据线段垂直平分线的画法作图，再推理证明即可并得到结论.

【详解】解：如图，即为所求；



证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB.$$

$$\therefore \angle ECO = \angle FAO.$$

$\because EF$ 垂直平分 AC ,

$$\therefore AO = CO.$$

又 $\angle EOC = \angle FOA$.

$$\therefore \triangle COE \cong \triangle AOF (ASA).$$

$$\therefore OE = OF.$$

故答案为： $\angle FAO$ ； $AO = CO$ ； $\angle FOA$ ；

由此得到命题：过平行四边形对角线中点的直线被平行四边形一组对边所截，截得的线段被对角线中点平分，

故答案为：被平行四边形一组对边所截，截得的线段被对角线中点平分.

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，作线段的垂直平分线，全等三角形的判定和性质，熟练掌握平行四边形的性质及线段垂直平分线的作图方法是解题的关键.

21. 某洗车公司安装了 A, B 两款自动洗车设备, 工作人员从消费者对 A, B 两款设备的满意度评分中各随机抽取 20 份, 并对数据进行整理、描述和分析 (评分分数用 x 表示, 分为四个等级, 不满意 $x < 70$, 比较满意 $70 \leq x < 80$, 满意 $80 \leq x < 90$, 非常满意 $x \geq 90$), 下面给出了部分信息.

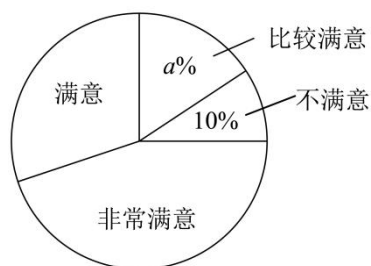
抽取的对 A 款设备的评分数据中“满意”包含的所有数据:

83, 85, 85, 87, 87, 89;

抽取的对 B 款设备的评分数据:

68, 69, 76, 78, 81, 84, 85, 86, 87, 87, 87, 89, 95, 97, 98, 98, 98, 98, 99, 100.

抽取的对A款设备的
评分扇形统计图



抽取的对A, B款设备的评分统计表

设备	平均数	中位数	众数	“非常满意”所占百分比
A	88	m	96	45%
B	88	87	n	40%

根据以上信息，解答下列问题：

(1) 填空： $a =$ _____, $m =$ _____, $n =$ _____;

(2) 5月份，有600名消费者对A款自动洗车设备进行评分，估计其中对A款自动洗车设备“比较满意”的人数；

(3) 根据以上数据，你认为哪一款自动洗车设备更受消费者欢迎？请说明理由（写出一条理由即可）。

【答案】(1) 15, 88, 98

(2) 90 (3) A款，理由：评分数据中A款的中位数比B款的中位数高（答案不唯一）

【解析】

【分析】(1) 先根据“满意”的人数除以总人数求得“满意”所占百分比，进而求得 a ，再根据中位数和众数的定义求得 m , n ；

(2) 利用样本估计总体即可；

(3) 根据平均数、中位数、众数及“非常满意”所占百分比即可得出结论.

【小问1详解】

解：∵抽取的对A款设备的评分数据中“满意”的有6份，

∴“满意”所占百分比为： $\frac{6}{20} \times 100\% = 30\%$,

∴“比较满意”所占百分比为： $1 - 30\% - 45\% - 10\% = 15\%$,

∴ $a = 15$,

抽取的对A款设备的评分数据中的中位数是第10份和第11份数据的平均数，

∴ “不满意”和“满意”的评分有 $20 \times (10\% + 15\%) = 5$ (份),

∴ 第 10 份和第 11 份数据为“满意”，评分分别为 87, 89,

$$\therefore m = \frac{87+89}{2} = 88,$$

∴ 抽取的对 B 款设备的评分数据中出现次数最多的是 98,

$$\therefore n = 98,$$

故答案为: 15, 88, 98;

【小问 2 详解】

解: 600 名消费者对 A 款自动洗车设备“比较满意”的人数为: $600 \times 15\% = 90$ (人),

答: 600 名消费者对 A 款自动洗车设备“比较满意”的人数为 90 人.

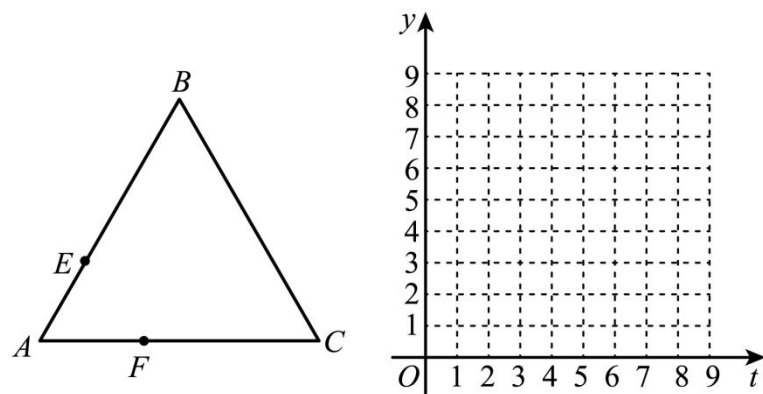
【小问 3 详解】

解: A 款自动洗车设备更受欢迎,

理由: 评分数据中 A 款的中位数比 B 款的中位数高 (答案不唯一).

【点睛】本题考查了扇形统计图, 中位数, 众数, 样本估计总体, 从统计图表中获取信息时, 认真观察、分析, 理解各个数据之间的关系是解题的关键.

22. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, 动点 E, F 分别以每秒 1 个单位长度的速度同时从点 A 出发, 点 E 沿折线 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 方向运动, 点 F 沿折线 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 方向运动, 当两者相遇时停止运动. 设运动时间为 t 秒, 点 E, F 的距离为 y .



- (1) 请直接写出 y 关于 t 的函数表达式并注明自变量 t 的取值范围;
- (2) 在给定的平面直角坐标系中画出这个函数的图象, 并写出该函数的一条性质;
- (3) 结合函数图象, 写出点 E, F 相距 3 个单位长度时 t 的值.

【答案】(1) 当 $0 < t \leq 4$ 时, $y = t$; 当 $4 < t \leq 6$ 时, $y = 12 - 2t$;

(2) 图象见解析, 当 $0 < t \leq 4$ 时, y 随 x 的增大而增大

(3) t 的值为 3 或 4.5

【解析】

【分析】(1) 分两种情况：当 $0 < t \leq 4$ 时，根据等边三角形的性质解答；当 $4 < t \leq 6$ 时，利用周长减去 $2AE$ 即可；

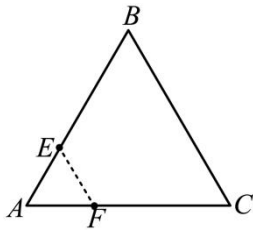
(2) 在直角坐标系中描点连线即可；

(3) 利用 $y = 3$ 分别求解即可.

【小问 1 详解】

解：当 $0 < t \leq 4$ 时，

连接 EF ，

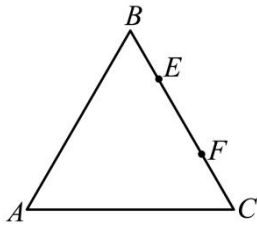


由题意得 $AE = AF$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle AEF$ 是等边三角形，

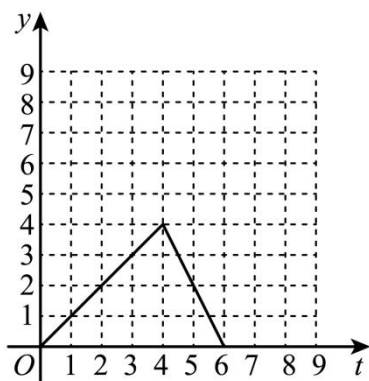
$\therefore y = t$ ；

当 $4 < t \leq 6$ 时， $y = 12 - 2t$ ；



【小问 2 详解】

函数图象如图：



当 $0 < t \leq 4$ 时， y 随 x 的增大而增大；

【小问 3 详解】

当 $0 < t \leq 4$ 时， $y = 3$ 即 $t = 3$ ；

当 $4 < t \leq 6$ 时, $y = 3$ 即 $12 - 2t = 3$, 解得 $t = 4.5$,

故 t 的值为 3 或 4.5.

【点睛】此题考查了动点问题, 一次函数的图象及性质, 解一元一次方程, 正确理解动点问题是解题的关键.

23. 某粮食生产基地为了落实在适宜地区开展双季稻中间季节再种一季油菜的号召, 积极扩大粮食生产规模, 计划用基地的甲、乙两区农田进行油菜试种. 甲区的农田比乙区的农田多 10000 亩, 甲区农田的 80% 和乙区全部农田均适宜试种, 且两区适宜试种农田的面积刚好相同.

(1) 求甲、乙两区各有农田多少亩?

(2) 在甲、乙两区适宜试种的农田全部种上油菜后, 为加强油菜的虫害治理, 基地派出一批性能相同的无人机, 对试种农田喷洒除虫药, 由于两区地势差别, 派往乙区的无人机架次是甲区的 1.2 倍 (每架次无人机喷洒时间相同), 喷洒任务完成后, 发现派往甲区的每架次无人机比乙区的平均多喷洒 $\frac{50}{3}$ 亩, 求派往甲区每架次无人机平均喷洒多少亩?

【答案】(1) 甲区有农田 50000 亩, 乙区有农田 40000 亩

(2) 100 亩

【解析】

【分析】(1) 设甲区有农田 x 亩, 则乙区有农田 $(x - 10000)$ 亩, 根据甲区农田的 80% 和乙区全部农田均适宜试种, 且两区适宜试种农田的面积刚好相同建立方程, 解方程即可得;

(2) 设派往甲区每架次无人机平均喷洒 y 亩, 派往甲区的无人机架次为 a 架次, 则派往乙区每架次无人机平均喷洒 $\left(y - \frac{50}{3}\right)$ 亩, 派往乙区的无人机架次为 $1.2a$ 架次, 根据两区喷洒的面积相同建立方程, 解方程即可得.

【小问 1 详解】

解: 设甲区有农田 x 亩, 则乙区有农田 $(x - 10000)$ 亩,

由题意得: $80\%x = x - 10000$,

解得 $x = 50000$,

则 $x - 10000 = 50000 - 10000 = 40000$,

答: 甲区有农田 50000 亩, 乙区有农田 40000 亩.

【小问 2 详解】

解: 设派往甲区每架次无人机平均喷洒 y 亩, 派往甲区的无人机架次为 a 架次, 则派往乙区每架次无人机平

均喷洒 $\left(y - \frac{50}{3}\right)$ 亩，派往乙区的无人机架次为 $1.2a$ 架次，

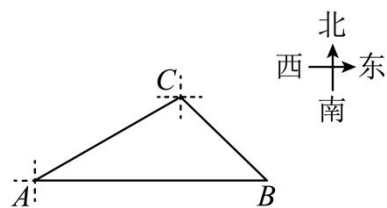
由题意得： $ay = 1.2a\left(y - \frac{50}{3}\right)$ ，即 $y = 1.2\left(y - \frac{50}{3}\right)$ ，

解得 $y = 100$ ，

答：派往甲区每架次无人机平均喷洒 100 亩。

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，找准等量关系，正确建立方程是解题关键。

24. 人工海产养殖合作社安排甲、乙两组人员分别前往海面 A ， B 养殖场捕捞海产品，经测量， A 在灯塔 C 的南偏西 60° 方向， B 在灯塔 C 的南偏东 45° 方向，且在 A 的正东方向， $AC = 3600$ 米。



(1) 求 B 养殖场与灯塔 C 的距离 (结果精确到个位)；

(2) 甲组完成捕捞后，乙组还未完成捕捞，甲组决定前往 B 处协助捕捞，若甲组航行的平均速度为 600 米/每分钟，请计算说明甲组能否在 9 分钟内到达 B 处？ (参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$)

【答案】 (1) 2545 米

(2) 能，说明过程见解析

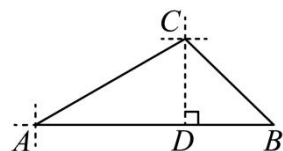
【解析】

【分析】 (1) 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，先根据含 30° 度角的直角三角形的性质、等腰三角形的判定可得 $BD = CD = \frac{1}{2}AC = 1800$ 米，再解直角三角形即可得；

(2) 先解直角三角形求出 AD 的长，从而可得 AB 的长，再根据时间等于路程除以速度即可得。

【小问 1 详解】

解：如图，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，



由题意得： $\angle ACD = 60^\circ$ ， $\angle BCD = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = \angle BCD = 45^\circ$ ，

$\therefore BD = CD = \frac{1}{2}AC = 1800$ 米，

$$\therefore BC = \frac{CD}{\sin 45^\circ} \approx 2545 \text{ 米},$$

答：B 养殖场与灯塔 C 的距离为 2545 米.

【小问 2 详解】

$$\text{解： } AD = AC \cdot \sin 60^\circ = 1800\sqrt{3} \text{ 米},$$

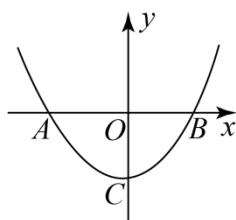
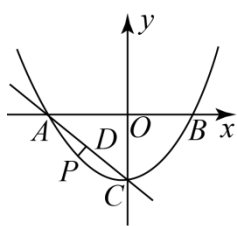
$$\therefore AB = AD + BD = (1800\sqrt{3} + 1800) \text{ 米},$$

$$\text{则甲组到达 } B \text{ 处所需时间为 } (1800\sqrt{3} + 1800) \div 600 = 3\sqrt{3} + 3 \approx 8.196 \text{ (分钟)} < 9 \text{ 分钟},$$

所以甲组能在 9 分钟内到达 B 处.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握解直角三角形的方法是解题关键.

25. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，其中 $B(3,0)$ ， $C(0,-3)$.



备用图

- (1) 求该抛物线的表达式;
- (2) 点 P 是直线 AC 下方抛物线上一动点，过点 P 作 $PD \perp AC$ 于点 D，求 PD 的最大值及此时点 P 的坐标;
- (3) 在 (2) 的条件下，将该抛物线向右平移 5 个单位，点 E 为点 P 的对应点，平移后的抛物线与 y 轴交于点 F，Q 为平移后的抛物线的对称轴上任意一点. 写出所有使得以 QF 为腰的 $\triangle QEF$ 是等腰三角形的点 Q 的坐标，并把求其中一个点 Q 的坐标的过程写出来.

【答案】(1) $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$

(2) PD 取得最大值为 $\frac{4}{5}$, $P\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$

(3) Q 点的坐标为 $\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{4}\right)$.

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求二次函数解析式即可求解；

(2) 直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x - 3$ ，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E ，交 AC 于点 Q ，设 $P\left(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - 3\right)$ ，

则 $Q\left(t, -\frac{3}{4}t - 3\right)$ ，则 $PD = \frac{4}{5}PQ$ ，进而根据二次函数的性质即可求解；

(3) 根据平移的性质得出 $y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{49}{16}$ ，对称轴为直线 $x = \frac{9}{2}$ ，点 $P\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ 向右平移 5 个单位

得到 $E\left(3, -\frac{5}{2}\right)$ ， $F(0, 2)$ ，勾股定理分别表示出 EF^2, QE^2, QF^2 ，进而分类讨论即可求解。

【小问 1 详解】

解：将点 $B(3, 0)$ ， $C(0, -3)$ 。代入 $y = \frac{1}{4}x^2 + bx + c$ 得，

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \times 3^2 + 3b + c = 0 \\ c = -3 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ c = -3 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为： $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$ ，

【小问 2 详解】

$\because y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3$ 与 x 轴交于点 A ， B ，

当 $y = 0$ 时， $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3 = 0$

解得： $x_1 = -4, x_2 = 3$ ，

$\therefore A(-4, 0)$ ，

$\therefore C(0, -3)$ 。

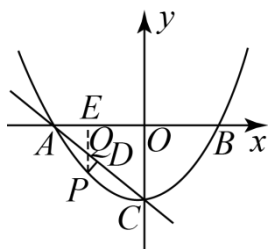
设直线 AC 的解析式为 $y = kx - 3$ ，

$\therefore -4k - 3 = 0$

解得： $k = -\frac{3}{4}$

∴ 直线 AC 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x - 3$,

如图所示，过点 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E ，交 AC 于点 Q ，



设 $P\left(t, \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - 3\right)$ ，则 $Q\left(t, -\frac{3}{4}t - 3\right)$ ，

∴ $PQ = -\frac{3}{4}t - 3 - \left(\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - 3\right) = -\frac{1}{4}t^2 - t$ ，

∵ $\angle AQE = \angle PQD$ ， $\angle AEQ = \angle QDP = 90^\circ$ ，

∴ $\angle OAC = \angle QPD$ ，

∵ $OA = 4, OC = 3$ ，

∴ $AC = 5$ ，

∴ $\cos \angle QPD = \frac{PD}{PQ} = \cos \angle OAC = \frac{AO}{AC} = \frac{4}{5}$ ，

∴ $PD = \frac{4}{5}PQ = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}t^2 - t\right) = -\frac{1}{5}t^2 - \frac{4}{5}t = -\frac{1}{5}(t+2)^2 + \frac{4}{5}$ ，

∴ 当 $t = -2$ 时， PD 取得最大值为 $\frac{4}{5}$ ， $\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t - 3 = \frac{1}{4} \times (-2)^2 + \frac{1}{4} \times (-2) - 3 = -\frac{5}{2}$ ，

∴ $P\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ ；

【小问 3 详解】

∵ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 3 = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{16}$

将该抛物线向右平移 5 个单位，得到 $y = \frac{1}{4}\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{49}{16}$ ，对称轴为直线 $x = \frac{9}{2}$ ，

点 $P\left(-2, -\frac{5}{2}\right)$ 向右平移 5 个单位得到 $E\left(3, -\frac{5}{2}\right)$

$\therefore$ 平移后的抛物线与 y 轴交于点 F ，令 $x=0$ ，则 $y = \frac{1}{4} \times \left(\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{49}{16} = 2$ ，

$\therefore F(0, 2)$ ，

$$\therefore EF^2 = 3^2 + \left(2 + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{117}{4}$$

$\therefore Q$ 为平移后的抛物线的对称轴上任意一点.

则 Q 点的横坐标为 $\frac{9}{2}$ ，

设 $Q\left(\frac{9}{2}, m\right)$ ，

$$\therefore QE^2 = \left(\frac{9}{2} - 3\right)^2 + \left(m + \frac{5}{2}\right)^2, \quad QF^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (m - 2)^2,$$

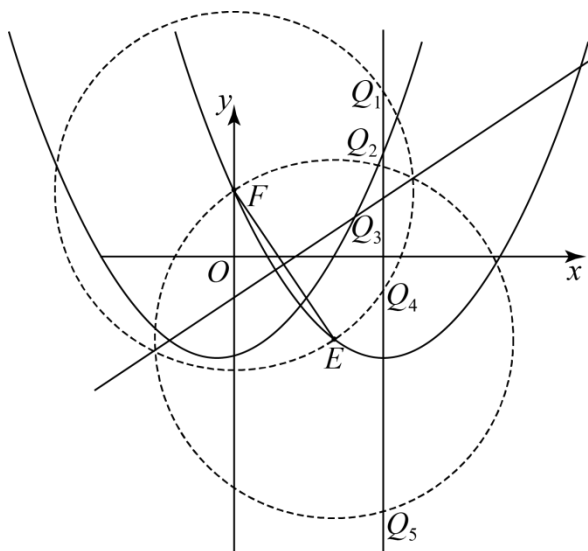
$$\text{当 } QF = EF \text{ 时, } \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (m - 2)^2 = \frac{117}{4},$$

解得: $m = -1$ 或 $m = 5$ ，

$$\text{当 } QE = QF \text{ 时, } \left(\frac{9}{2} - 3\right)^2 + \left(m + \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + (m - 2)^2,$$

解得: $m = \frac{7}{4}$

综上所述, Q 点的坐标为 $\left(\frac{9}{2}, -1\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2}, 5\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{4}\right)$.



【点睛】 本题考查了二次函数综合问题，解直角三角形，待定系数法求解析式，二次函数的平移，线段周长问题，特殊三角形问题，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

26. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于点 D ， E 为线段 AD 上一动点（不与 A ， D 重合），连接 BE ， CE ，将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到线段 CF ，连接 AF 。

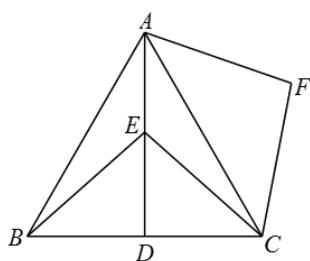


图1

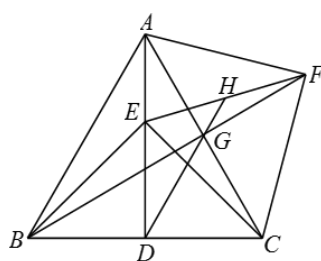


图2

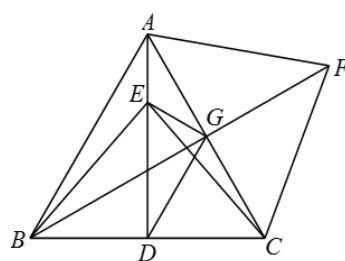


图3

- (1) 如图 1，求证： $\angle CBE = \angle CAF$ ；
- (2) 如图 2，连接 BF 交 AC 于点 G ，连接 DG ， EF ， EF 与 DG 所在直线交于点 H ，求证： $EH = FH$ ；
- (3) 如图 3，连接 BF 交 AC 于点 G ，连接 DG ， EG ，将 $\triangle AEG$ 沿 AG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内，得到 $\triangle APG$ ，将 $\triangle DEG$ 沿 DG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内，得到 $\triangle DQG$ ，连接 PQ ， QF 。若 $AB = 4$ ，直接写出 $PQ + QF$ 的最小值。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) $\sqrt{3} + 2$

【解析】

【分析】 (1) 根据旋转的性质得出 $CE = CF$ ， $\angle ECF = 60^\circ$ ，进而证明 $\triangle BCE \cong \triangle ACF$ (SAS)，即可得证；

(2) 过点 F 作 $FK \parallel AD$ ，交 DH 点的延长线于点 K ，连接 EK ， FD ，证明四边形 $EDFK$ 是平行四边形，即可得证；

(3) 如图所示，延长 AP, DQ 交于点 R ，由 (2) 可知 $\triangle DCG$ 是等边三角形，根据折叠的性质可得 $\angle PAG = \angle EAG = 30^\circ$ ， $\angle QDG = \angle EDG = 30^\circ$ ，进而得出 $\triangle ADR$ 是等边三角形，由 (2) 可得

$Rt\triangle CED \cong Rt\triangle CFG$ ，得出四边形 $GDQF$ 是平行四边形，则 $QF = DC = \frac{1}{2}AC = 2$ ，进而得出

$\angle PGQ = 360^\circ - 2\angle AGD = 120^\circ$ ，则 $PQ = \sqrt{3}PG = \sqrt{3}GQ$ ，当 GQ 取得最小值时，即 $GQ \perp DR$ 时， PQ 取得最小值，即可求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle ACB = 60^\circ, \quad AC = BC,$$

$\because$ 将 CE 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到线段 CF ，

$$\therefore CE = CF, \quad \angle ECF = 60^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ECF$$

$$\therefore \angle ACB - \angle ACE = \angle ECF - \angle ACE$$

$$\text{即 } \angle BCE = \angle ACF$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ACF$ 中

$$\begin{cases} EC = FC \\ \angle BCE = \angle ACF, \\ BC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle ACF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CAF;$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，过点 F 作 $FK \parallel AD$ ，交 DH 点的延长线于点 K ，连接 EK ， FD ，

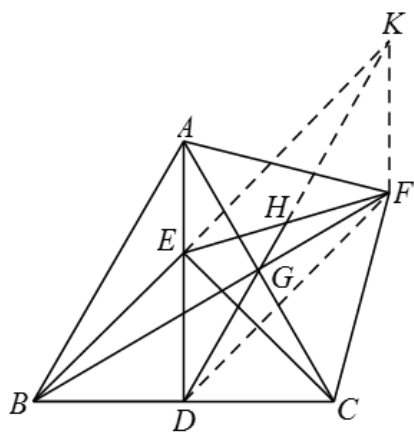


图2

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore AB = AC = BC$,

$\because AD \perp BC$

$\therefore BD = CD$

$\therefore AD$ 垂直平分 BC ,

$\therefore EB = EC$

又 $\because \triangle BCE \cong \triangle ACF$,

$\therefore AF = BE, CF = CE$,

$\therefore AF = CF$,

$\therefore F$ 在 AC 的垂直平分线上,

$\because AB = BC$

$\therefore B$ 在 AC 的垂直平分线上,

$\therefore BF$ 垂直平分 AC

$\therefore AC \perp BF$, $AG = CG = \frac{1}{2} AC$

$\therefore \angle AGF = 90^\circ$

又 $\because DG = \frac{1}{2} AC = CG$, $\angle ACD = 60^\circ$

$\therefore \triangle DCG$ 是等边三角形,

$\therefore \angle CGD = \angle CDG = 60^\circ$

$\therefore \angle AGH = \angle DGC = 60^\circ$

$\therefore \angle KGF = \angle AGF - \angle AGH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

又 $\because \angle ADK = \angle ADC - \angle GDC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $KF \parallel AD$

$$\therefore \angle HKF = \angle ADK = 30^\circ$$

$$\therefore \angle FKG = \angle KGF = 30^\circ,$$

$$\therefore FG = FK$$

在 $\text{Rt}\triangle CED$ 与 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中,

$$\begin{cases} CF = CE \\ CD = CG \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle CED \cong \text{Rt}\triangle CFG$$

$$\therefore GF = ED$$

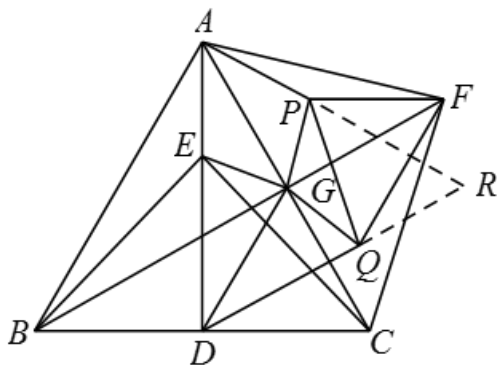
$$\therefore ED = FK$$

$\therefore$ 四边形 $EDFK$ 是平行四边形,

$$\therefore EH = HF;$$

【小问 3 详解】

解：依题意，如图所示，延长 AP, DQ 交于点 R ，



由 (2) 可知 $\triangle DCG$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle EDG = 30^\circ$$

$\therefore$ 将 $\triangle AEG$ 沿 AG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内，得到 $\triangle APG$ ，将 $\triangle DEG$ 沿 DG 所在直线翻折至 $\triangle ABC$ 所在平面内，得到 $\triangle DQG$ ，

$$\therefore \angle PAG = \angle EAG = 30^\circ, \quad \angle QDG = \angle EDG = 30^\circ$$

$$\therefore \angle PAE = \angle QDE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ADR$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle QDC = \angle ADC - \angle ADQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

由 (2) 可得 $\text{Rt}\triangle CED \cong \text{Rt}\triangle CFG$

$$\therefore DE = GF,$$

$$\therefore DE = DQ,$$

$$\therefore GF = DQ,$$

$$\therefore \angle GBC = \angle QDC = 30^\circ,$$

$$\therefore GF \parallel DQ$$

$\therefore$ 四边形 $GDQF$ 是平行四边形,

$$\therefore QF = DG = \frac{1}{2}AC = 2$$

由 (2) 可知 G 是 AC 的中点, 则 $GA = GD$

$$\therefore \angle GAD = \angle GDA = 30^\circ$$

$$\therefore \angle AGD = 120^\circ$$

$\therefore$ 折叠,

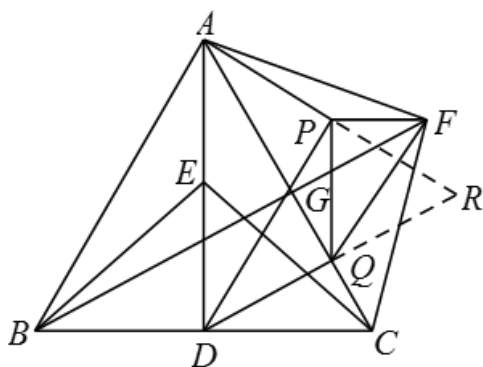
$$\therefore \angle AGP + \angle DGQ = \angle AGE + \angle DGE = \angle AGD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle PGQ = 360^\circ - 2\angle AGD = 120^\circ,$$

又 $PG = GE = GQ$,

$$\therefore PQ = \sqrt{3}PG = \sqrt{3}GQ,$$

$\therefore$ 当 GQ 取得最小值时, 即 $GQ \perp DR$ 时, PQ 取得最小值, 此时如图所示,



$$\therefore GQ = \frac{1}{2}GC = \frac{1}{2}DC = 1,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{3},$$

$$\therefore PQ + QF = \sqrt{3} + 2.$$

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质，旋转的性质，轴对称的性质，勾股定理，平行四边形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】