

2023 年初中学毕业生毕业升学考试

数学试卷

考试时间：120 分钟

试卷满分：150 分

注意事项

1. 本试卷分第一部分（选择题）和第二部分（非选择题）两部分。答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上，并在规定区域粘贴条形码。
2. 回答第一部分（选择题）时，选出每小题答案后，用 **2B** 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号框涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号框。答案写在本试卷上无效。
3. 回答第二部分（非选择题）时，必须用 **0.5 毫米黑色签字笔** 填写，字迹工整，作答时，将答案写在答题卡上，请按题号顺序在各题的答题区域内作答，超出范围的答案无效。答案写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
5. 本试卷共 8 页、如遇缺页、漏页、字迹不清等情况，考生须及时报告监考教师。

第一部分 选择题

一、选择题（下列各题的备选答案中，只有一个是正确的，每小题 3 分，共 30 分）

1. $-\frac{1}{3}$ 的绝对值是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】C

【解析】

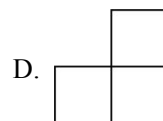
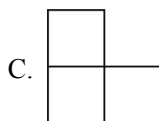
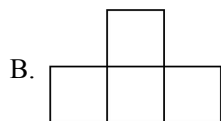
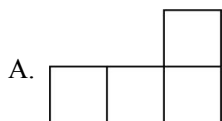
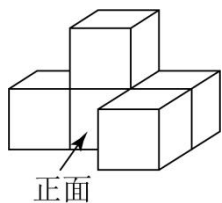
【分析】根据数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值，依据定义即可求解。

【详解】在数轴上，点 $-\frac{1}{3}$ 到原点的距离是 $\frac{1}{3}$ ，所以， $-\frac{1}{3}$ 的绝对值是 $\frac{1}{3}$ ，

故选：C。

【点睛】本题考查绝对值，掌握绝对值的定义是解题的关键。

2. 如图是由五个相同的正方体搭成的几何体，这个几何体的主视图是（ ）



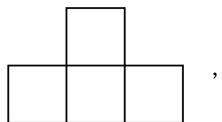
【答案】B

【解析】

【分析】根据主视图是从正面看到的图形进行求解即可.

【详解】解：从正面看，看到的图形分为上下两层，下面一层有3个小正方形并排放在一起，上面一层中间有1个小正方形，

即看到的图形为



故选 B.

【点睛】本题考查简单组合体的三视图，理解视图的定义，画出该组合体的主视图是正确判断的前提.

3. 有下列四个算式① $(-5) + (+3) = -8$ ；② $-(-2)^3 = 6$ ；③ $\left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$ ；④ $-3 \div \left(-\frac{1}{3}\right) = 9$. 其中，

正确的有 ().

A. 0 个

B. 1 个

C. 2 个

D. 3 个

【答案】C

【解析】

【分析】由有理数的加减运算法则、乘方的运算法则、除法运算法则，分别进行判断，即可得到答案.

【详解】解：① $(-5) + (+3) = -2$ ；故①错误；

② $-(-2)^3 = 8$ ；故②错误；

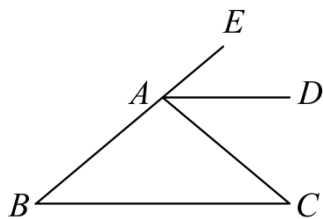
③ $\left(+\frac{5}{6}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}$ ；故③正确；

④ $-3 \div \left(-\frac{1}{3}\right) = 9$ ；故④正确；

故选：C.

【点睛】本题考查了有理数的加减乘除、乘方的运算法则，解题的关键是正确掌握运算法则进行判断.

4. 如图, AD 是 $\angle EAC$ 的平分线, $AD \parallel BC$, $\angle BAC = 100^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数是 ()



- A. 50° B. 40° C. 35° D. 45°

【答案】B

【解析】

【分析】根据邻补角求出 $\angle EAC$, 利用角平分线求出 $\angle DAC$, 再根据平行线的性质求出 $\angle C$ 的度数.

【详解】解: $\because \angle BAC = 100^\circ$,

$$\therefore \angle EAC = 180^\circ - \angle BAC = 80^\circ$$

$\because AD$ 是 $\angle EAC$ 的平分线,

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle EAC = 40^\circ,$$

$\because AD \parallel BC$,

$$\therefore \angle C = \angle DAC = 40^\circ,$$

故选: B.

【点睛】此题考查了平行线的性质, 角平分线的定义, 邻补角, 正确掌握平行线的性质是解题的关键.

5. 下列计算结果正确的是 ()

- A. $a^3 \cdot a^3 = 2a^3$ B. $8a^2 - 5a^2 = 3a^2$ C. $a^8 \div a^2 = a^4$ D. $(-3a^2)^3 = -9a^6$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法和除法, 积的乘方以及合并同类项的运算法则进行计算, 逐个判断.

【详解】解: A. $a^3 \cdot a^3 = a^6$, 原计算错误, 故此选项不符合题意;

B. $8a^2 - 5a^2 = 3a^2$, 计算正确, 故此选项符合题意;

C. $a^8 \div a^2 = a^6$, 原计算错误, 故此选项不符合题意;

D. $(-3a^2)^3 = -27a^6$, 原计算错误, 故此选项不符合题意.

故选: B.

【点睛】本题考查同底数幂的乘法和除法, 积的乘方以及合并同类项, 掌握相关运算法则正确计算是解题关键.

这是此题的易错点.

8. 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 小时共收割小麦 3.6 公顷, 3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 小时共收割小麦 8 公顷. 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦多少公顷? 设 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x 公顷和 y 公顷, 根据题意, 可列方程组为 ()

A.
$$\begin{cases} 2(5x+2y)=3.6 \\ 5(2x+3y)=8 \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 2(3x+2y)=8 \\ 5(2x+5y)=3.6 \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 2(2x+5y)=3.6 \\ 5(3x+2y)=8 \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 2(2x+5y)=8 \\ 5(3x+2y)=3.6 \end{cases}$$

【答案】C

【解析】

【分析】根据“2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 小时共收割小麦 3.6 公顷, 3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 小时共收割小麦 8 公顷”列方程组即可.

【详解】解: 设 1 台大收割机和 1 台小收割机每小时各收割小麦 x 公顷和 y 公顷,

根据 2 台大收割机和 5 台小收割机同时工作 2 小时共收割小麦 3.6 公顷, 得 $2(2x+5y)=3.6$

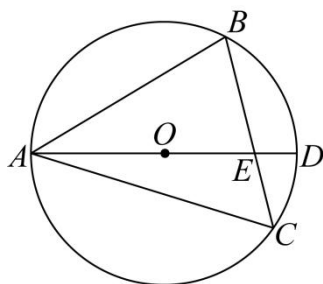
根据 3 台大收割机和 2 台小收割机同时工作 5 小时共收割小麦 8 公顷, 得 $5(3x+2y)=8$,

可列
$$\begin{cases} 2(2x+5y)=3.6 \\ 5(3x+2y)=8 \end{cases}$$

故选: C.

【点睛】此题考查了列二元一次方程组, 正确理解题意是解题的关键.

9. 如图所示, AD 是 $\odot O$ 的直径, 弦 BC 交 AD 于点 E , 连接 AB , AC , 若 $\angle BAD = 30^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数是 ()



A. 50°

B. 40°

C. 70°

D. 60°

【答案】D

【解析】

【分析】如图所示, 连接 CD , 先由同弧所对的圆周角相等得到 $\angle BCD = \angle BAD = 30^\circ$, 再由直径所对的

圆周角是直角得到 $\angle ACD=90^\circ$ ，则 $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD = 60^\circ$ 。

【详解】解：如图所示，连接 CD ，

$$\because \angle BAD = 30^\circ,$$

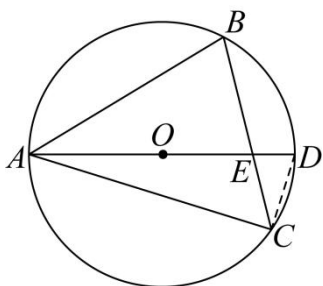
$$\therefore \angle BCD = \angle BAD = 30^\circ,$$

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACD=90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD - \angle BCD = 60^\circ,$$

故选 D.

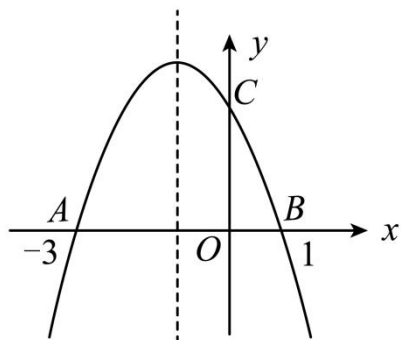


【点睛】本题主要考查了同弧所对的圆周角相等，直径所对的圆周角是直角，

正确求出 $\angle ACD$ ， $\angle BCD$ 的度数是解题的关键。

10. 如图. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-3,0)$ 和点 $B(1,0)$ ，与 y 轴交于点 C . 下列说法：

- ① $abc < 0$ ；② 抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ；③ 当 $-3 < x < 0$ 时， $ax^2 + bx + c > 0$ ；④ 当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大；⑤ $am^2 + bm \leq a - b$ (m 为任意实数) 其中正确的个数是 ()



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线开口向下，与 y 轴交于正半轴，可得 $a < 0$ ， $c > 0$ ，根据 $A(-3,0)$ 和点 $B(1,0)$ 可得抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ，即可判断②；推出 $b = 2a < 0$ ，即可判断①；根据函数图象即可判断③④；根据当 $x = -1$ 时，抛物线有最大值 $a - b + c$ ，即可得到 $am^2 + bm \leq a - b$ ，即可判断⑤。

【详解】解：∵抛物线开口向下，与 y 轴交于正半轴，

$$\therefore a < 0, c > 0,$$

∵抛物线与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$,

∴抛物线对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$ ，故②正确；

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a < 0,$$

∴ $abc > 0$ ，故①错误；

由函数图象可知，当 $-3 < x < 0$ 时，抛物线的函数图象在 x 轴上方，

∴当 $-3 < x < 0$ 时， $ax^2 + bx + c > 0$ ，故③正确；

∵抛物线对称轴为直线 $x = -1$ 且开口向下，

∴当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而减小，即当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小，故④错误；

∵抛物线对称轴为直线 $x = -1$ 且开口向下，

∴当 $x = -1$ 时，抛物线有最大值 $y = a - b + c$ ，

$$\therefore am^2 + bm + c \leq a - b + c,$$

∴ $am^2 + bm \leq a - b$ ，故⑤正确；

综上所述，正确的有②③⑤，

故选 C.

【点睛】本题主要考查了抛物线的图象与系数的关系，抛物线的性质等等，熟练掌握抛物线的相关知识是解题的关键.

第二部分 非选择题

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

11. 若二次根式 $\sqrt{1+3x}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件得到 $1+3x \geq 0$ ，解不等式即可得到答案.

【详解】解：∵二次根式 $\sqrt{1+3x}$ 有意义，

$$\therefore 1+3x \geq 0,$$

解得 $x \geq -\frac{1}{3}$,

故答案为: $x \geq -\frac{1}{3}$

【点睛】此题考查了二次根式有意义的条件, 熟知被开方式为非负数是解题的关键.

12. 在平面直角坐标系中, 将点 $M(3, -4)$ 向左平移 5 个单位长度, 得到点 M' , 则点 M' 的坐标是_____.

【答案】 $(-2, -4)$

【解析】

【分析】向左平移 5 个单位长度, 即点 M 的横坐标减 5, 纵坐标不变, 从而即可得到 M' 的坐标.

【详解】解: 点 $M(3, -4)$ 向左平移 5 个单位长度后,

坐标为 $(3-5, -4)$,

即 M' 的坐标为 $(-2, -4)$,

故答案为: $(-2, -4)$.

【点睛】本题考查了坐标系中点的平移规律, 在平面直角坐标系中, 点的平移规律变化是: 横坐标右移加, 左移减; 纵坐标上移加, 下移减.

13. 某班 35 名同学一周课外阅读时间统计如表所示

时间/小时	7	8	9	10
人数	4	12	13	6

则该班 35 名同学一周课外阅读时间的众数是_____小时.

【答案】 9

【解析】

【分析】一组数据中出现次数最多的数据即为众数, 根据定义解答.

【详解】解: 35 个数据中 7 出现 4 次, 8 出现 12 次, 9 出现 13 次, 10 出现 6 次,

$\therefore$ 9 出现的次数最多,

$\therefore$ 众数为 9 小时,

故答案为: 9.

【点睛】此题考查了众数的定义, 正确理解众数的定义是解题的关键.

14. 若关于 x 的方程 $x^2 + mx - 12 = 0$ 的一个根是 3, 则此方程的另一个根是_____.

【答案】 -4

【解析】

【分析】根据根与系数的关系 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 即可求出方程的另一个根.

【详解】设另一个根为 x_2 ,

$$\text{根据题意: } 3 \times x_2 = \frac{-12}{1},$$

$$\text{解得, } x_2 = -4,$$

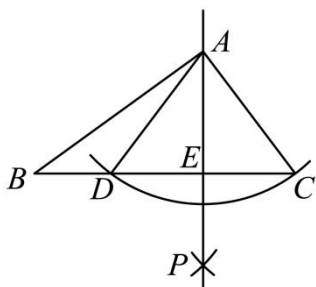
即另一个根为 -4 ,

故答案为: -4 .

【点睛】本题考查了一元二次方程的解、根与系数的关系, 在利用根与系数 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ 、 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 来计

算时, 要弄清楚 a 、 b 、 c 的意义.

15. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 以 A 为圆心, AC 长为半径作弧, 交 BC 于 C , D 两点, 分别以点 C 和点 D 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}CD$ 长为半径作弧, 两弧交于点 P , 作直线 AP , 交 CD 于点 E , 若 $AC = 5$, $CD = 6$, 则 $AE = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】4

【解析】

【分析】利用圆的性质得出 AP 垂直平分 CD 和 $AD = AC = 5$, 运用勾股定理便可解决问题.

【详解】解: 根据题意可知, 以点 C 和点 D 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}CD$ 长为半径作弧, 两弧交于点 P ,

$\therefore AP$ 垂直平分 CD , 即 $\angle AED = 90^\circ$,

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 3,$$

又 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, 以 A 为圆心, AC 长为半径作弧, 交 BC 于 C , D 两点, 其中 $AC = 5$,

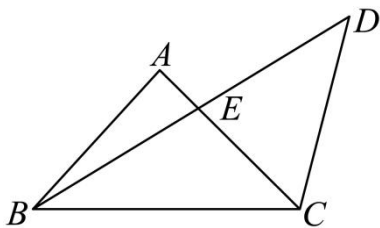
$$\therefore AD = AC = 5,$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 中, } AE = \sqrt{AD^2 - DE^2} = 4,$$

故答案为: 4.

【点睛】本题主要考查圆和三角形的相关性质，掌握相关知识点是解题的关键。

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，将 AC 绕着点 C 按顺时针旋转 60° 得到 CD ，连接 BD 交 AC 于在 E ，则 $\frac{AE}{ED} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}$

【解析】

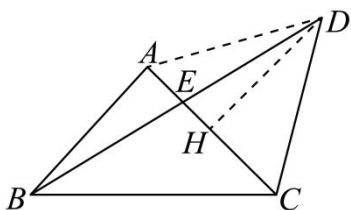
【分析】连接 AD ，证明 $\triangle ACD$ 是等边三角形，则 $AC = AD = CD$ ， $\angle ADC = \angle CAD = 60^\circ$ ，设

$AC = AD = CD = a$ ，则 $AB = AC = a$ ，取 AC 的中点 H ，连接 DH ，求出 $DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，设 $AE = x$ ，则

$EH = \frac{1}{2}a - x$ ，证明 $\triangle AEB \sim \triangle HED$ ，得到 $\frac{AE}{HE} = \frac{AB}{DH}$ ，解得 $x = (2 - \sqrt{3})a$ ，即 $AE = (2 - \sqrt{3})a$ ，再

利用勾股定理求出 $DE^2 = 3(2 - \sqrt{3})^2 a^2$ ，进一步即可得到答案。

【详解】解：连接 AD ，



$\because$ 将 AC 绕着点 C 按顺时针旋转 60° 得到 CD ，

$\therefore AC = CD$ ，

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形，

$\therefore AC = AD = CD$ ， $\angle ADC = \angle CAD = 60^\circ$ ，

设 $AC = AD = CD = a$ ，则 $AB = AC = a$ ，

取 AC 的中点 H ，连接 DH ，

$\therefore AH = CH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}a$ ， $\angle AHD = 90^\circ$ ，

$\therefore DH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，

$$\text{设 } AE = x, \text{ 则 } EH = AH - AE = \frac{1}{2}a - x,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle DHE,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle HED,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle HED,$$

$$\therefore \frac{AE}{HE} = \frac{AB}{DH},$$

$$\therefore \frac{x}{\frac{1}{2}a - x} = \frac{a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a},$$

$$\text{解得 } x = (2 - \sqrt{3})a,$$

$$\text{即 } AE = (2 - \sqrt{3})a,$$

$$\therefore EH = AH - AE = \frac{1}{2}a - x = \frac{1}{2}a - (2 - \sqrt{3})a = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2}a,$$

$$\therefore DE^2 = 3(2 - \sqrt{3})a^2,$$

$$\therefore \frac{AE}{ED} = \sqrt{\frac{AE^2}{ED^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})^2 a^2}{3(2 - \sqrt{3})a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{6 - 3\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{24 - 12\sqrt{3}}{4}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{18 - 12\sqrt{3} + 6}{4}}}{3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\frac{(3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}{4}}}{3} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{(3\sqrt{2} - \sqrt{6})^2}{4}}}{3} \\
&= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6},
\end{aligned}$$

故答案为： $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}$.

【点睛】此题考查了相似三角形的判定和性质、勾股定理、旋转的性质、等边三角形的判定和性质等知识，数形结合和准确计算是解题的关键.

三、解答题 (17 小题 8 分, 18 小题 12 分, 共 20 分)

17. 先化简, 再求值: $\left(m + 2 + \frac{5}{2-m}\right) \cdot \frac{2m-4}{3-m}$, 其中 $m = \sqrt{16} + \tan 45^\circ$.

【答案】 $-2m - 6$, 原式 $= -16$

【解析】

【分析】先根据分式的混合计算法则化简, 然后根据特殊角三角函数值和二次根式的性质求出 m 的值, 最后代值计算即可.

$$\begin{aligned}
&\text{【详解】解: } \left(m + 2 + \frac{5}{2-m}\right) \cdot \frac{2m-4}{3-m} \\
&= \left(\frac{m^2-4}{m-2} - \frac{5}{m-2}\right) \cdot \frac{2(m-2)}{3-m} \\
&= \frac{m^2-9}{m-2} \cdot \frac{2(m-2)}{3-m} \\
&= \frac{(m+3)(m-3)}{m-2} \cdot \frac{2(m-2)}{3-m} \\
&= -2(m+3) \\
&= -2m-6, \\
&\because m = \sqrt{16} + \tan 45^\circ, \\
&\therefore m = 4 + 1 = 5,
\end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = -2 \times 5 - 6 = -10 - 6 = -16.$$

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值，求特殊角三角函数值，化简二次根式等等，正确计算是解题的关键.

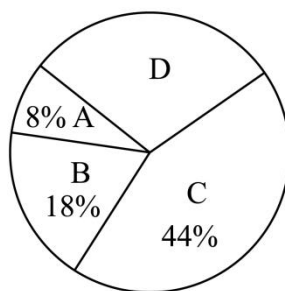
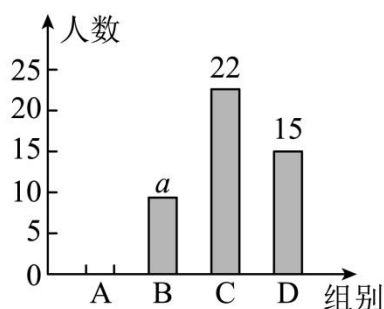
18. 某校在评选“劳动小能手”活动中，随机调查了部分学生的周末家务劳动时间，根据调查结果，将劳动时长划分为 A , B , C , D 四个组别，并绘制成如下不完整统计图表

学生周末家务劳动时长分组表

组别	A	B	C	D
t (小时)	$t < 0.5$	$0.5 \leq t < 1$	$1 \leq t < 1.5$	$t \geq 1.5$

学生周末家务劳动时长条形统计图

学生周末家务劳动时长扇形统计图



请根据图表中的信息解答下列问题:

- (1) 这次抽样调查共抽取_____名学生，条形统计图中的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， D 组所在扇形的圆心角的度数是_____;
- (2) 已知该校有 900 名学生，根据调查结果，请你估计该校周末家务劳动时长不低于 1 小时的学生共有多少人?
- (3) 班级准备从周末家务劳动时间较长的三男一女四名同学中，随机抽取两名同学参加“我劳动，我快乐”的主题演讲活动，请用列表法或画树状图法求出恰好选中两名男生的概率.

【答案】(1) 50, 9, 108°

(2) 估计该校周末家务劳动时长不低于 1 小时的学生共有 666 人;

(3) $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据数据计算即可;

(2) 根据 (1) 求出的 D 组所占的比例计算结果;

(3) 列出所有可能情况求概率.

【小问 1 详解】

解: 这次抽样调查共抽取的人数有: $22 \div 44\% = 50$ (人),

B 组的人数为： $a = 50 \times 18\% = 9$ (人)，

D 组所占的比例为： $1 - 8\% - 18\% - 44\% = 30\%$

$\therefore$ D 组所在扇形的圆心角的度数是： $360^\circ \times 30\% = 108^\circ$ ；

【小问 2 详解】

解：根据题意得， $900 \times (30\% + 44\%) = 666$ (人)

答：估计该校周末家务劳动时长不低于 1 小时的学生共有 666 人；

【小问 3 详解】

解：列表如下：

	男 1	男 2	男 3	女
男 1		(男 2, 男 1)	(男 3, 男 1)	(女, 男 1)
男 2	(男 1, 男 2)		(男 3, 男 2)	(女, 男 2)
男 3	(男 1, 男 3)	(男 2, 男 3)		(女, 男 3)
女	(男 1, 女)	(男 2, 女)	(男 3, 女)	

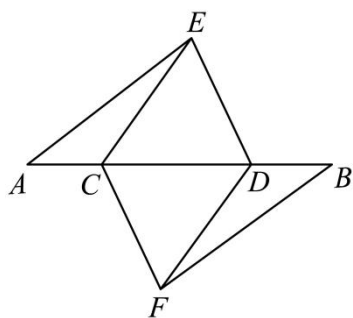
共有 12 中等可能结果，其中恰好选中两名男生的结果数为 6，

$\therefore$ 恰好选中两名男生的概率 $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ 。

【点睛】本题主要考查了统计的实际问题，涉及用样本估计总体的数量、求圆心角的度数，求概率等，属于基础题要认真读图。

四、解答题 (19 小题 10 分，20 小题 10 分，共 20 分)

19. 如图．点 A, B, C, D 在同一条直线上，点 E, F 分别在直线 AB 的两侧，且 $AE = BF$ ， $\angle A = \angle B$ ． $\angle ACE = \angle BDF$ ．



(1) 求证： $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ ；

(2) 若 $AB = 8$ ， $AC = 2$ ，求 CD 的长。

【答案】(1) 证明见解析

(2) 4

【解析】

【分析】(1) 直接利用 AAS 证明 $\triangle ACE \cong \triangle BDF$ 即可；

(2) 根据全等三角形的性质得到 $BD = AC = 2$ ，则 $CD = AB - AC - BD = 4$ 。

【小问 1 详解】

证明：在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BDF$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACE = \angle BDF \\ \angle A = \angle B \\ AE = BF \end{cases},$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF$ (AAS)；

【小问 2 详解】

解： $\because \triangle ACE \cong \triangle BDF$ ， $AC = 2$ ，

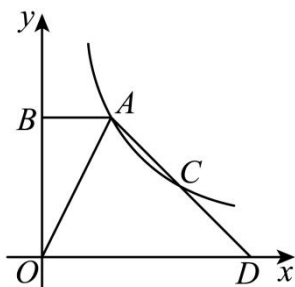
$\therefore BD = AC = 2$ ，

又 $\because AB = 8$ ，

$\therefore CD = AB - AC - BD = 4$ 。

【点睛】本题主要考查了全等三角形的性质与判定，熟知全等三角形的性质与判定条件是解题的关键。

20. 如图，点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上， $AB \perp y$ 轴于点 B ， $\tan \angle AOB = \frac{1}{2}$ ， $AB = 2$ 。



(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 点 C 在这个反比例函数图象上，连接 AC 并延长交 x 轴于点 D ，且 $\angle ADO = 45^\circ$ ，求点 C 的坐标。

【答案】(1) $y = \frac{8}{x}$

(2) $C(4, 2)$

【解析】

【分析】(1) 利用正切值，求出 $OB = 4$ ，进而得到 $A(2, 4)$ ，即可求出反比例函数的解析式；

(2) 过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ，易证四边形 $ABOE$ 是矩形，得到 $OE = 2$ ， $AE = 4$ ，再证明 $\triangle AED$ 是

等腰直角三角形，得到 $DE = 4$ ，进而得到 $D(6, 0)$ ，然后利用待定系数法求出直线 AD 的解析式为

$y = -x + 6$ ，联立反比例函数和一次函数，即可求出点 C 的坐标.

【小问 1 详解】

解：∵ $AB \perp y$ 轴，

$$\therefore \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AOB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{OB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AB = 2,$$

$$\therefore OB = 4,$$

$$\therefore A(2, 4),$$

∵ 点 A 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，

$$\therefore k = 2 \times 4 = 8,$$

∴ 反比例函数的解析式为 $y = \frac{8}{x}$;

【小问 2 详解】

解：如图，过点 A 作 $AE \perp x$ 轴于点 E ，

$$\therefore \angle ABO = \angle BOE = \angle AEO = 90^\circ,$$

∴ 四边形 $ABOE$ 是矩形，

$$\therefore OE = AB = 2, \quad OB = AE = 4,$$

$$\therefore \angle ADO = 45^\circ,$$

∴ $\triangle AED$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore DE = AE = 4,$$

$$\therefore OD = OE + DE = 2 + 4 = 6,$$

$$\therefore D(6, 0),$$

设直线 AD 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\therefore \begin{cases} 2k + b = 4 \\ 6k + b = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases},$$

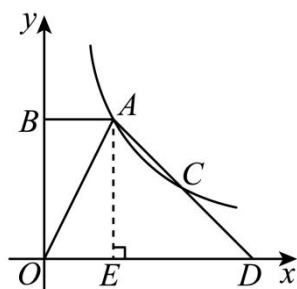
∴ 直线 AD 的解析式为 $y = -x + 6$,

∵ 点 A 、 C 是反比例函数 $y = \frac{8}{x}$ 和一次函数 $y = -x + 6$ 的交点，

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{8}{x} \\ y = -x + 6 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases},$$

∴ $A(2, 4)$,

∴ $C(4, 2)$.

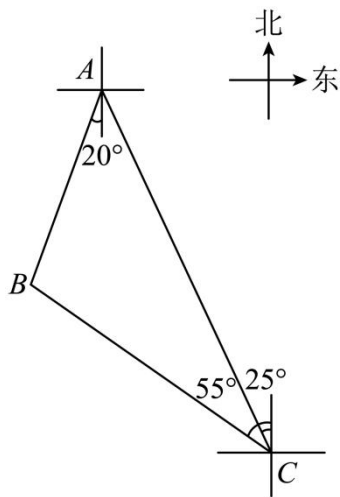


【点睛】本题是反比例函数综合题，考查了锐角三角函数值，矩形的判定和性质，

待定系数法求函数解析式，反比例函数和一次函数交点问题等知识，求出直线 AD 的解析式是解题关键。

五、解答题 (21 小题 10 分，22 小题 12 分，共 22 分)

21. 为了丰富学生的文化生活，学校利用假期组织学生到素质教育基地 A 和科技智能馆 B 参观学习，学生从学校出发，走到 C 处时，发现 A 位于 C 的北偏西 25° 方向上， B 位于 C 的北偏西 55° 方向上，老师将学生分成甲乙两组，甲组前往 A 地，乙组前往 B 地，已知 B 在 A 的南偏西 20° 方向上，且相距 1000 米，请求出甲组同学比乙组同学大约多走多远的路程（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{6} \approx 2.45$ ）



【答案】甲组同学比乙组同学大约多走 520 米的路程

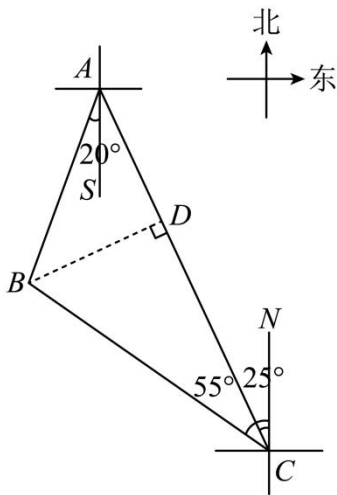
【解析】

【分析】过 B 点作 $BD \perp AC$ 于点 D ，根据题意有： $\angle BAS = 20^\circ$ ， $\angle ACN = 25^\circ$ ， $\angle BCN = 55^\circ$ ，进而可得 $\angle BCA = \angle BCN - \angle ACN = 30^\circ$ ， $\angle SAD = \angle ACN = 25^\circ$ ， $\angle BAD = \angle SAB + \angle SAD = 45^\circ$ ，结合

直角三角形的知识可得 $AD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 500\sqrt{2}$ (米), $BC = 2BD = 1000\sqrt{2}$ (米),

$DC = BC \times \cos \angle ACB = 500\sqrt{6}$ (米), 即有 $AC = AD + DC = 500\sqrt{2} + 500\sqrt{6}$ (米), 问题随之得解.

【详解】如图, 过 B 点作 $BD \perp AC$ 于点 D ,



根据题意有: $\angle BAS = 20^\circ$, $\angle ACN = 25^\circ$, $\angle BCN = 55^\circ$,

$\therefore \angle BCA = \angle BCN - \angle ACN = 30^\circ$, $\angle SAD = \angle ACN = 25^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle SAB + \angle SAD = 45^\circ$,

$\therefore BD \perp AC$,

$\therefore \angle BDA = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \angle ABD = 45^\circ$,

$\therefore AB = 1000$ (米),

$\therefore AD = BD = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 500\sqrt{2}$ (米),

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中, $\angle BCA = 30^\circ$, $BD = 500\sqrt{2}$ (米),

$\therefore BC = 2BD = 1000\sqrt{2}$ (米),

$\therefore DC = BC \times \cos \angle ACB = 500\sqrt{6}$ (米),

$\therefore AC = AD + DC = 500\sqrt{2} + 500\sqrt{6}$ (米),

$\therefore AC - BC = 500\sqrt{2} + 500\sqrt{6} - 1000\sqrt{2} = 500\sqrt{6} - 500\sqrt{2}$ (米),

即 $AC - BC = 500\sqrt{6} - 500\sqrt{2} \approx 520$ (米),

答: 甲组同学比乙组同学大约多走 520 米的路程.

【点睛】本题主要考查了解直角三角形的应用以及方位角的知识，正确理解方位角，是解答本题的关键。

22. 某大型超市购进一款热销的消毒洗衣液，由于原材料价格上涨，今年每瓶洗衣液的进价比去年每瓶洗衣液的进价上涨 4 元，今年用 1440 元购进这款洗衣液的数量与去年用 1200 元购进这款洗衣液的数量相同。当每瓶洗衣液的现售价为 36 元时，每周可卖出 600 瓶，为了能薄利多销，该超市决定降价销售，经市场调查发现，这种洗衣液的售价每降价 1 元，每周的销量可增加 100 瓶，规定这种消毒洗衣液每瓶的售价不低于进价。

(1) 求今年这款消毒洗衣液每瓶进价是多少元；

(2) 当这款消毒洗衣液每瓶的售价定为多少元时，这款洗衣液每周的销售利润最大？最大利润是多少元？

【答案】(1) 今年这款消毒洗衣液每瓶进价是 24 元；

(2) 当这款消毒洗衣液每瓶的售价定为 33 元时，这款洗衣液每周的销售利润最大，最大利润是 8100 元。

【解析】

【分析】(1) 设今年这款消毒洗衣液每瓶进价是 x 元，则去年这款消毒洗衣液每瓶进价是 $(x-4)$ 元，根据题意列出分式方程，解方程即可；

(2) 设这款消毒洗衣液每瓶的售价定为 m 元时，这款洗衣液每周的销售利润 w 最大，根据题意得出：

$w = (m-24)[100(36-m) + 600]$ ，根据二次函数的性质可得出答案。

【小问 1 详解】

解：设今年这款消毒洗衣液每瓶进价是 x 元，则去年这款消毒洗衣液每瓶进价是 $(x-4)$ 元，

根据题意可得： $\frac{1440}{x} = \frac{1200}{x-4}$ ，

解得： $x = 24$ ，

经检验： $x = 24$ 是方程的解，

$x-4 = 24-4 = 20$ 元，

答：今年这款消毒洗衣液每瓶进价是 24 元。

【小问 2 详解】

解：设这款消毒洗衣液每瓶的售价定为 m 元时，这款洗衣液每周的销售利润 w 最大，

根据题意得出： $w = (m-24)[100(36-m) + 600]$ ，

整理得： $w = -100m^2 + 6600m - 100800$ ，

根据二次函数的性质得出：当 $m = -\frac{6600}{2 \times (-100)} = 33$ 时，利润最大，

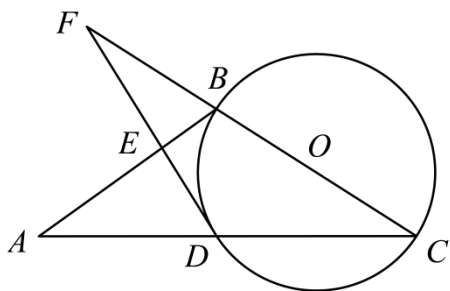
最大利润为： $w = (33 - 24)[100(36 - 33) + 600] = 8100$ ，

答：当这款消毒洗衣液每瓶的售价定为 33 元时，这款洗衣液每周的销售利润最大，最大利润是 8100 元。

【点睛】本题考查分式方程的应用，二次函数的应用，正确理解题意列出关系式是解题关键。

六、解答题（本题满分 12 分）

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，以 BC 为直径作 $\odot O$ 与 AC 交于点 D ，过点 D 作 $DE \perp AB$ ，交 CB 延长线于点 F ，垂足为点 E 。



(1) 求证： DF 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $BE = 3$ ， $\cos C = \frac{4}{5}$ ，求 BF 的长。

【答案】(1) 见详解 (2) $BF = \frac{75}{7}$

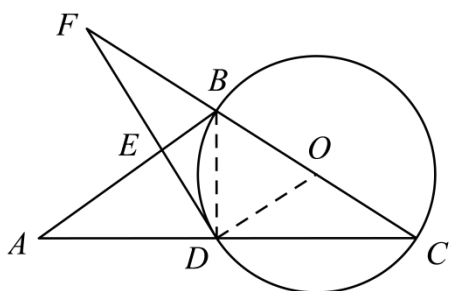
【解析】

【分析】(1) 连接 DO ， DB ，根据圆周角定理证明 $BD \perp AC$ ，再根据“三线合一”证明 BD 平分 $\angle BAC$ ，即有 $\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle BAC$ ，进而可得 $\angle BDO = \angle DBA$ ，根据 $DE \perp AB$ ，可得 $\angle EDB + \angle ODB = 90^\circ$ ，问题得证；

(2) 先证明 $\angle A = \angle ACB$ ， $\angle EDB = \angle ACB$ ，即有 $\cos \angle EDB = \cos \angle A = \cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ ，在 $\text{Rt}\triangle DBE$ 中结合勾股定理，可求出 $BD = 5$ ，即同理在 $\text{Rt}\triangle DBE$ 中，可得 $AB = \frac{25}{3}$ ，进而有 $BC = AB = \frac{25}{3}$ ， $BO = \frac{1}{2}CB = \frac{25}{6}$ ，即 $DO = BO = \frac{25}{6}$ ，证明 $\triangle DOF \sim \triangle EBF$ ，即有 $\frac{BE}{DO} = \frac{BF}{FO}$ ，即 $\frac{BE}{DO} = \frac{BF}{BF + BO}$ ，问题即可得解。

【小问 1 详解】

连接 DO ， DB ，



$\therefore BC$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \perp AC,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$,

 $\therefore BD$ 平分 $\angle BAC$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

$$\therefore BO = OD,$$

$$\therefore \angle BDO = \angle DBC,$$

$$\therefore \angle BDO = \angle DBA,$$

$$\therefore DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle EDB + \angle DBA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB + \angle ODB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 半径 $OD \perp DF$,

$\therefore DF$ 为 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC$,

$$\therefore \angle A = \angle ACB,$$

在 (1) 中, $\angle EDB + \angle DBA = 90^\circ = \angle ACB + \angle DBC$, $\angle ABD = \angle DBC$,

$$\therefore \angle EDB = \angle ACB,$$

$$\therefore \cos C = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \cos \angle EDB = \cos \angle A = \cos \angle ACB = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle DBE \text{ 中, } BE=3, \cos \angle EDB=\frac{4}{5},$$

$$\therefore DE = \frac{4}{5}BD,$$

$$\therefore BD^2 = \left(\frac{4}{5}BD\right)^2 + 3^2, \text{ 解得: } BD = 5 \text{ (负值舍去)},$$

即同理在 $\text{Rt}\triangle DBE$ 中, 可得 $AB = \frac{25}{3}$,

$$\therefore BC = AB = \frac{25}{3},$$

$$\therefore BO = \frac{1}{2}CB = \frac{25}{6}, \text{ 即 } DO = BO = \frac{25}{6},$$

$$\therefore AB \perp DF, DO \perp DF,$$

$$\therefore DO \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DOF \sim \triangle EBF,$$

$$\therefore \frac{BE}{DO} = \frac{BF}{FO}, \text{ 即 } \frac{BE}{DO} = \frac{BF}{BF + BO},$$

$$\therefore \frac{3}{\frac{25}{6}} = \frac{BF}{BF + \frac{25}{6}},$$

$$\text{解得: } BF = \frac{75}{7} \text{ (经检验, 符合题意)},$$

$$\text{即 } BF = \frac{75}{7}.$$

【点睛】本题主要考查了圆周角定理, 切线的判定, 解直角三角形, 相似三角形的判定与性质, 勾股定理等知识, 掌握切线的判定以及三角函数, 是解答本题的关键.

七、解答题 (本题满分 14 分)

24. 在 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 90^\circ$, 点 E 在 CD 上, 点 G 在 AB 上, 点 F 在 BD 的延长线上, 连接

$$EF, DG. \angle FED = \angle ADG, \frac{AD}{BD} = \frac{DG}{EF} = k.$$

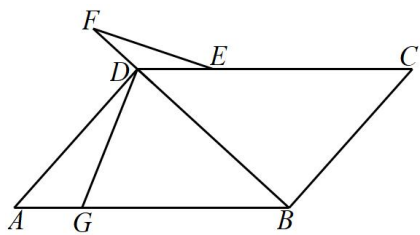


图1

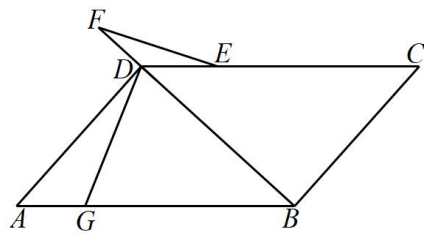
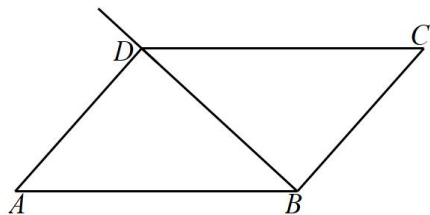


图2



备用图

(1) 如图 1, 当 $k=1$ 时, 请用等式表示线段 AG 与线段 DF 的数量关系_____;

(2) 如图 2, 当 $k = \sqrt{3}$ 时, 写出线段 AD , DE 和 DF 之间的数量关系, 并说明理由;

(3) 在 (2) 的条件下, 当点 G 是 AB 的中点时, 连接 BE , 求 $\tan \angle EBF$ 的值.

【答案】(1) $AG = DF$

(2) $AD = 2\sqrt{3}DF + \sqrt{3}DE$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 当 $k=1$ 时, $AD = BD, DG = EF$, 在 AD 上截取 $DH = DE$, 连接 HG , 证明 $\triangle DHG \cong \triangle EDF$ (SAS), 推出 $\angle DHG = \angle EDF = 135^\circ$, $DF = HG$, 得到 $AG = GH = DF$;

(2) 当 $k = \sqrt{3}$ 时, 得到 $\angle A = 30^\circ$, $\angle CDB = \angle DBA = 60^\circ$, 过点 G 作 $GM \perp AB$ 交 AD 于点 M , 证明 $\triangle DMG \sim \triangle EDF$, 推出 $\frac{MG}{DF} = \frac{DM}{DE} = \frac{DG}{EF} = \sqrt{3}$, 得到 $MG = \sqrt{3}DF, DM = \sqrt{3}DE$, 由此得到 $AM = 2MG = 2\sqrt{3}DF$, 进而推出 $AD = 2\sqrt{3}DF + \sqrt{3}DE$;

(3) 由 (2) 得 $DB = 2DF + DE$, 设 $DE = x$, 由点 G 是 AB 的中点, 得到 $\angle ADG = 30^\circ$, 推出 $DE = DF = x$, $DB = 3x$, 过点 E 作 $EN \perp BD$ 于 N , 根据 30° 角的性质及勾股定理求出 $DN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}x$, $EN = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, 即可得到 $BN = \frac{5}{2}x$, 根据公式计算即可.

【小问 1 详解】

解: 当 $k=1$ 时, $AD = BD, DG = EF$,

$\therefore$ 在 $ABCD$ 中, $\angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle ABD = 45^\circ$, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CDB = 45^\circ$

$\therefore \angle CDF = 135^\circ$,

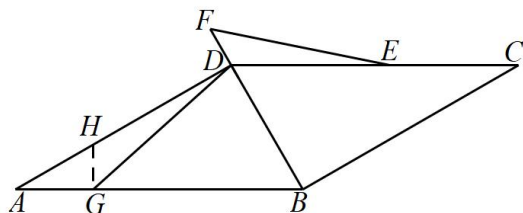


图1

在 AD 上截取 $DH = DE$, 连接 HG ,

$\therefore \angle FED = \angle ADG$,

$$\therefore \triangle DHG \cong \triangle EDF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DHG = \angle EDF = 135^\circ, \quad DF = HG,$$

$$\therefore \angle AHG = 45^\circ, \quad \angle AGH = 90^\circ,$$

$$\therefore AG = GH = DF,$$

故答案为： $AG = DF$ ；

【小问 2 详解】

$$AD = 2\sqrt{3}DF + \sqrt{3}DE, \quad \text{理由如下:}$$

$$\text{当 } k = \sqrt{3} \text{ 时, } \frac{AD}{BD} = \frac{DG}{EF} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ, \quad \angle CDB = \angle DBA = 60^\circ,$$

过点 G 作 $GM \perp AB$ 交 AD 于点 M ,

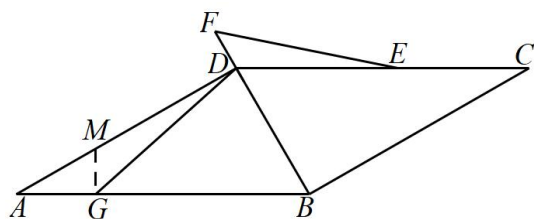


图2

$$\therefore \angle DMG = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FDE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle DMG,$$

$$\text{又} \because \angle FED = \angle ADG,$$

$$\therefore \triangle DMG \sim \triangle EDF,$$

$$\therefore \frac{MG}{DF} = \frac{DM}{DE} = \frac{DG}{EF} = \sqrt{3},$$

$$\therefore MG = \sqrt{3}DF, \quad DM = \sqrt{3}DE,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore AM = 2MG = 2\sqrt{3}DF,$$

$$\therefore AD = AM + DM,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{3}DF + \sqrt{3}DE$$

【小问 3 详解】

$$\therefore AD = \sqrt{3}DB, \quad AD = 2\sqrt{3}DF + \sqrt{3}DE,$$

$$\therefore DB = 2DF + DE,$$

设 $DE = x$,

$\therefore$ 点 G 是 AB 的中点,

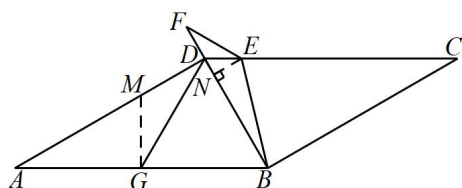
$$\therefore AG = DG = BG,$$

$$\therefore \angle ADG = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DFE = 30^\circ = \angle FED,$$

$$\therefore DE = DF = x, \quad DB = 3x,$$

过点 E 作 $EN \perp BD$ 于 N ,



$$\therefore \angle BDE = \angle ABD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DEN = 30^\circ,$$

$$\therefore DN = \frac{1}{2}DE = \frac{1}{2}x, \quad EN = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

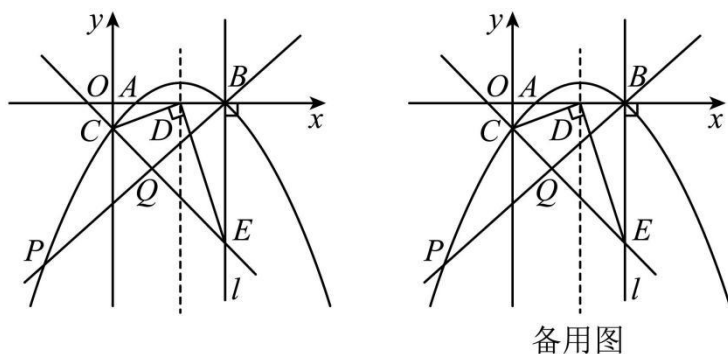
$$\therefore BN = BD - DN = 3x - \frac{1}{2}x = \frac{5}{2}x,$$

$$\therefore \tan \angle EBF = \frac{EN}{BN} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}x}{\frac{5}{2}x} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

【点睛】此题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，直角三角形 30 度角的性质，求角的正切值，熟练掌握各知识点是解题的关键。

八、解答题 (本题满分 14 分)

25. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ 和点 B , 与 y 轴交于点 C , 抛物线的对称轴交 x 轴于点 $D(3, 0)$, 过点 B 作直线 $l \perp x$ 轴, 过点 D 作 $DE \perp CD$, 交直线 l 于点 E .



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图，点 P 为第三象限内抛物线上的点，连接 CE 和 BP 交于点 Q ，当 $\frac{BQ}{PQ} = \frac{5}{7}$ 时，求点 P 的坐标；

(3) 在 (2) 的条件下，连接 AC ，在直线 BP 上是否存在点 F ，使得 $\angle DEF = \angle ACD + \angle BED$ ？若存在，请直接写出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1$

(2) $P\left(-3, -\frac{32}{5}\right)$

(3) $F\left(\frac{5}{13}, -\frac{48}{13}\right)$ 或 $F(10, 4)$.

【解析】

【分析】(1) 根据抛物线过点 $A(1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 3$ ，待定系数法求解析式即可求解；

(2) 根据题意求得 $B(5, 0)$ ， $\tan \angle CDO = \tan \angle DEB$ ，求得 $BE = 6$ ，则 $E(5, -6)$ ，进而求得直线 EC 的解析式为 $y = -x - 1$ ，过点 P 作 $PT \perp x$ 轴，交 EC 于点 T ，证明 $\triangle PTQ \sim \triangle BEQ$ ，根据已知条件得出

$PT = \frac{42}{5}$ 设 $T(t, -t - 1)$ ，则 $P\left(t, -t - \frac{47}{5}\right)$ ，将点 P 代入 $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1$ ，即可求解。

(3) 根据题意可得 $\angle DEF = 45^\circ$ ，以 DE 为对角线作正方形 $DMEN$ ，则 $\angle DEM = \angle DEN = 45^\circ$ ，进而求得 M, N 的坐标，待定系数法求得 EM, EN 的解析式，联立 BP 解析式，即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx - 1 (a \neq 0)$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ ，抛物线的对称轴交 x 轴于点 $D(3, 0)$ ，则对称轴为直线 $x = 3$ ，

$$\therefore \begin{cases} a + b - 1 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{5} \\ b = \frac{6}{5} \end{cases}$$

∴ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1$ ；

将点 $P\left(t, -t - \frac{47}{5}\right)$ 代入 $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x - 1$

$$\text{即 } -t - \frac{47}{5} = -\frac{1}{5}t^2 + \frac{6}{5}t - 1$$

解得： $t = -3$ 或 $t = 14$ (舍去)

$$\text{当 } t = -3 \text{ 时, } -t - \frac{47}{5} = -\frac{32}{5},$$

$$\therefore P\left(-3, -\frac{32}{5}\right);$$

【小问 3 详解】

$$\because A(1, 0), C(0, -1),$$

则 $OA = OC = 1$, $\triangle AOC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle OAC = 45^\circ, \text{ 由 (2) 可得 } \angle BED = \angle ADC,$$

$$\because \angle DEF = \angle ACD + \angle BED$$

$$\therefore \angle DEF = \angle ACD + \angle ADC = \angle OAC = 45^\circ,$$

$$\text{由 (2) 可得 } P\left(-3, -\frac{32}{5}\right),$$

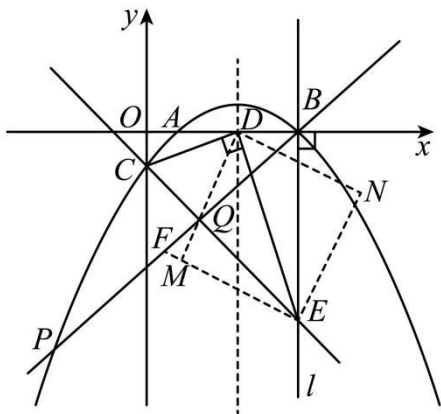
设直线 BP 的解析式为 $y = ex + f$, 则

$$\begin{cases} 5e + f = 0 \\ -3e + f = -\frac{32}{5} \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} e = \frac{4}{5} \\ f = -4 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BP \text{ 的解析式为 } y = \frac{4}{5}x - 4$$

如图所示, 以 DE 为对角线作正方形 $DMEN$, 则 $\angle DEM = \angle DEN = 45^\circ$,


$$\therefore DB=2, BE=6, \text{ 则 } DE=2\sqrt{10}, \text{ 则 } DM=\frac{\sqrt{2}}{2}DE=2\sqrt{5}, \quad E(5,-6),$$

$$\text{设 } M(m, n), \text{ 则 } \begin{cases} (m-3)^2 + n^2 = (2\sqrt{5})^2 \\ (m-5)^2 + (n+6)^2 = (2\sqrt{5})^2 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} m=1 \\ n=-4 \end{cases}, \begin{cases} m=7 \\ n=-2 \end{cases}$

则 $M(1, -4)$, $N(7, -2)$,

设直线 EM 的解析式为 $y = sx + t$, 直线 EN 的解析式为 $y = s_1x + t_1$.

$$\text{则} \begin{cases} 5s+t=-6 \\ s+t=-4 \end{cases}, \begin{cases} 5s_1+t_1=-6 \\ 7s_1+t_1=-2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} s = -\frac{1}{2} \\ t = -\frac{7}{2} \end{cases}, \begin{cases} s = 2 \\ t = -16 \end{cases},$$

设直线 EM 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$, 直线 EN 的解析式为 $y = 2x - 16$,

$$\therefore \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2} \\ y = \frac{4}{5}x - 4 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = \frac{5}{13} \\ y = -\frac{48}{13} \end{cases}, \text{ 则 } F\left(\frac{5}{13}, -\frac{48}{13}\right),$$

$$\begin{cases} y = 2x - 16 \\ y = \frac{4}{5}x - 4 \end{cases} \text{ 解得: } \begin{cases} x = 10 \\ y = 4 \end{cases}, \text{ 则 } F(10, 4),$$

综上所述, $F\left(\frac{5}{13}, -\frac{48}{13}\right)$ 或 $F(10, 4)$.

【点睛】 本题考查了二次函数综合运用，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

