

2023 年本溪铁岭辽阳市初中毕业生学业考试

数学试卷

※ 考试时间 120 分钟 试卷满分 150 分

考生注意：请在答题卡各题目规定答题区域内作答，答在本试卷上无效.

第一部分 选择题

一、选择题（本题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 2 的绝对值是（ ）

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

【答案】D

【解析】

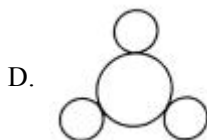
【分析】根据绝对值的意义即可求解.

【详解】解：2 的绝对值是 2，

故选：D.

【点睛】本题考查了绝对值的计算，掌握正数的绝对值是它本身，零的绝对值是零，负数的绝对值是它的相反数，是解题的关键.

2. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义判断即可. 如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形. 把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形.

【详解】解：A、是轴对称图形，也是中心对称图形，符合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

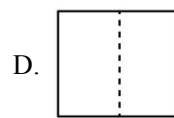
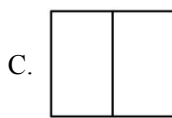
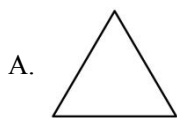
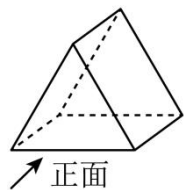
C、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了轴对称图形和中心对称图形的识别，解题的关键是利用轴对称图形和中心对称图形的定义进行判断.

3. 如图所示，该几何体的俯视图是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据俯视图定义直接判断即可得到答案.

【详解】解：从上面看该几何体，所看到的图形是长方形，中间有一条实线，

故选：C.

【点睛】本题考查几何体俯视图，解题的关键是掌握俯视图定义及熟练掌握三视图中直接看到的是实线，遮挡的是虚线.

4. 下列运算正确的是（ ）

A. $a + 2a^2 = 3a^3$

B. $a^7 \div a^4 = a^3$

C. $(a-2)^2 = a^2 - 4$

D. $(3b)^2 = 6b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】按照整式的加减，同底数幂的除法，完全平方公式和积的乘方运算法则进行求解即可.

【详解】解：A、 $a + 2a^2 \neq 3a^3$ ，故本选项不符合题意；

B、 $a^7 \div a^4 = a^3$ ，故本选项符合题意；

C、 $(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4 \neq a^2 - 4$ ，故本选项不符合题意；

D、 $(3b)^2 = 9b^2 \neq 6b^2$ ，故本选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】此题考查了整式的加减，同底数幂的除法，完全平方公式和积的乘方运算，解答本题的关键是熟练掌握各运算法则.

5. 在一次中学生田径运动会上，参加男子跳高的 10 名运动员的成绩如下表所示：

成绩/m	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80
人数/名	1	3	2	3	1

则这 10 名运动员成绩的中位数是 ()

- A. 1.50m B. 1.55m C. 1.60m D. 1.65m

【答案】C

【解析】

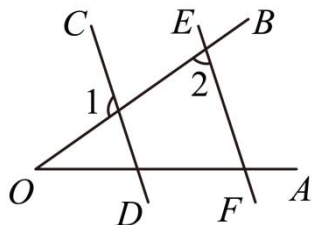
【分析】按照求中位数的方法进行即可.

【详解】解：把数据按从小到大排列，最中间的两个数为第 5、6 两个数据，它们分别是 1.60，1.60，则中位数为： $\frac{1.60+1.60}{2}=1.60(\text{m})$

故选：C.

【点睛】本题考查了求数据的中位数，熟悉中位数的概念是解题的关键.

6. 如图，直线 CD, EF 被射线 OA, OB 所截， $CD \parallel EF$ ，若 $\angle 1 = 108^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



- A. 52° B. 62° C. 72° D. 82°

【答案】C

【解析】

【分析】由对顶角相等及平行线的性质即可求得结果.

【详解】解： $\because \angle 1 = 108^\circ$,

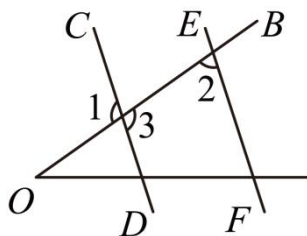
$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 108^\circ;$$

$$\because CD \parallel EF,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 180^\circ - \angle 3 = 72^\circ,$$

故选：C.



【点睛】本题考查了平行线的性质、对顶角的性质，掌握这两个性质是关键.

7. 下列调查中，适宜采用全面调查方式的是（ ）

- A. 了解某种灯泡的使用寿命
- B. 了解一批冷饮的质量是否合格
- C. 了解全国八年级学生的视力情况
- D. 了解某班同学中哪个月份出生的人数最多

【答案】D

【解析】

【分析】根据全面调查的特点，结合抽样调查特点，逐项分析即可.

【详解】解：A、适合抽样调查，故不符合题意；

B、适合抽样调查，故不符合题意；

C、适合抽样调查，故不符合题意；

D、适合全面调查，故符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了全面调查即普查，对总体中的每个个体都进行的调查称为全面调查，对于总体中个体数量比较大、具有破坏性或不可能也没必要时，不适宜采用全面调查，把握这一特点是解题的关键.

8. 某校八年级学生去距离学校120km的游览区游览，一部分学生乘慢车先行，出发1h后，另一部分学生乘快车前往，结果他们同时到达. 已知快车的速度是慢车速度的1.5倍，求慢车的速度，设慢车的速度是 x km/h，所列方程正确的是（ ）

- A. $\frac{120}{x} + 1 = \frac{120}{1.5x}$ B. $\frac{120}{x} - 1 = \frac{120}{1.5x}$ C. $\frac{120}{1.5x} = \frac{120}{x-1}$ D. $\frac{120}{1.5x} = \frac{120}{x+1}$

【答案】B

【解析】

【分析】设出慢车的速度，再利用慢车的速度表示出快车的速度，根据所用时间差为1小时列方程即可.

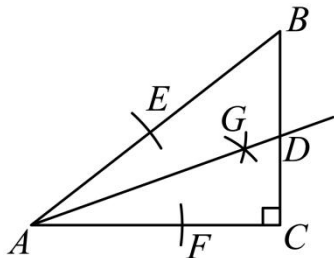
【详解】解：设慢车的速度是 x km/h，则快车的速度为 $1.5x$ km/h，

依题意得 $\frac{120}{x} - 1 = \frac{120}{1.5x}$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出分式方程，找到关键描述语，找到等量关系是解决问题的关键.

9. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AB = 5$ ， $BC = 3$ ，以点 A 为圆心，适当长为半径作弧，分别交 AB ， AC 于点 E ， F ，分别以点 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle BAC$ 的内部相交于点 G ，作射线 AG ，交 BC 于点 D ，则 BD 的长为 ()



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M ，由勾股定理可求得 $AC = 4$ ，由题意可证明 $\triangle ADC \cong \triangle ADM$ ，则可得 $AM = AC = 4$ ，从而有 $BM = 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle DMB$ 中，由勾股定理建立方程即可求得结果.

【详解】解：过点 D 作 $DM \perp AB$ 于 M ，如图，

由勾股定理可求得 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 4$ ，

由题中作图知， AD 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore DM \perp AB$ ， $AC \perp BC$ ，

$\therefore DC = DM$ ，

$\therefore AD = AD$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle ADM$ ，

$\therefore AM = AC = 4$ ，

$\therefore BM = AB - AM = 1$ ；

设 $BD = x$ ，则 $MD = CD = BC - BD = 3 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DMB$ 中，由勾股定理得： $1^2 + (3 - x)^2 = x^2$ ，

解得： $x = \frac{5}{3}$ ，

即 BD 的长为 $\frac{5}{3}$ ；

故选：D.

由题意得 $AP = x$, $AQ = \sqrt{3}x$,

$$\therefore AD = AP \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

$$\therefore AD = DQ = \frac{1}{2}AQ,$$

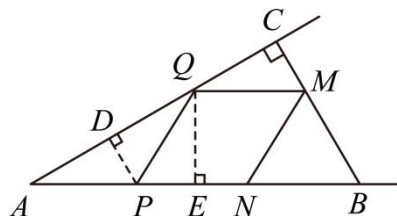
$\therefore PD$ 是线段 AQ 的垂直平分线,

$$\therefore \angle PQA = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle QPE = 60^\circ, \quad PQ = AP = x,$$

$$\therefore QE = \frac{1}{2}AQ = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad PQ = PN = MN = QM = x,$$

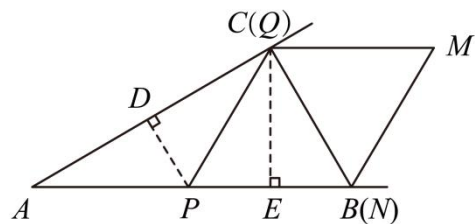
当点 M 运动到直线 BC 上时,



此时, $\triangle BMN$ 是等边三角形,

$$\therefore AP = PN = BN = \frac{1}{3}AB = 1, \quad x = 1;$$

当点 Q 、 N 运动到与点 C 、 B 重合时,



$$\therefore AP = PN = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{3}{2};$$

当点 P 运动到与点 B 重合时,

$$\therefore AP = AB = 3, \quad x = 3;$$

$$\therefore \text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } y = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2,$$

当 $1 < x \leq \frac{3}{2}$ 时, 如图, 作 $FG \perp AB$ 于点 G , 交 QM 于点 R ,

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，根据此形式表示即可.

【详解】解： $634000000 = 6.34 \times 10^8$ ；

故答案为： 6.34×10^8

【点睛】本题考查了把绝对值大于 1 的数用科学记数法表示，关键是确定 n 与 a 的值.

12. 分解因式： $a^3 - 4a^2 + 4a = \underline{\hspace{1cm}}$.

【答案】 $a(a-2)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式，再利用完全平方公式进行因式分解即可.

【详解】解： $a^3 - 4a^2 + 4a$ ，

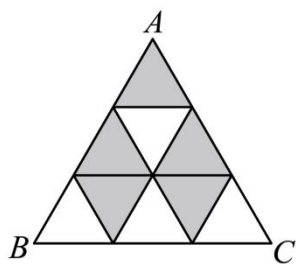
$$= a(a^2 - 4a + 4),$$

$$= a(a-2)^2.$$

故答案为： $a(a-2)^2$.

【点睛】本题考查了因式分解，熟练掌握提公因式法和公式法进行因式分解是解题的关键.

13. 如图，等边三角形 ABC 是由 9 个大小相等的等边三角形构成，随机地往 $\triangle ABC$ 内投一粒米，落在阴影区域的概率为 $\underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $\frac{5}{9}$

【解析】

【分析】根据概率的计算方法即可求解.

【详解】解： $\because$ 一粒米可落在 9 个等边三角形内的任一个三角形内，而落在阴影区域的只有 5 种可能，

$\therefore$ 一粒米落在阴影区域的概率为 $\frac{5}{9}$ ；

故答案为： $\frac{5}{9}$.

【点睛】本题考查了简单事件的概率，关键是求得所有事件的可能结果数，某个事件发生时的可能结果数.

14. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - x + k + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < -\frac{3}{4}$

【解析】

【分析】根据一元二次方程根的判别式，可得关于 k 的一元一次不等式进行求解即可.

【详解】根据题意得，

$$b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(k+1) > 0,$$

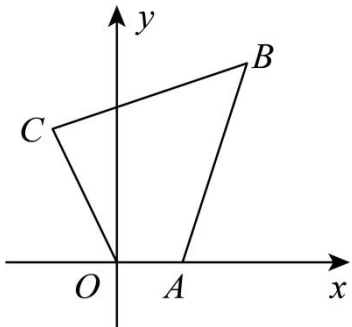
$$\text{解得：} k < -\frac{3}{4},$$

$$\text{故答案为：} k < -\frac{3}{4}.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程根的判别式，熟记 $b^2 - 4ac > 0$ 方程有两个不相等的实数根，

$b^2 - 4ac = 0$ 方程有两个相等的实数根， $b^2 - 4ac < 0$ 方程没有实数根， $b^2 - 4ac \geq 0$ 方程有实数根是解题的关键.

15. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 的顶点坐标分别是 $O(0,0)$ ， $A(1,0)$ ， $B(2,3)$ ， $C(-1,2)$ ，若四边形 $OA'B'C'$ 与四边形 $OABC$ 关于原点 O 位似，且四边形 $OA'B'C'$ 的面积是四边形 $OABC$ 面积的 4 倍，则第一象限内点 B' 的坐标为_____.



【答案】 $(4,6)$

【解析】

【分析】根据位似图形的概念得到四边形 $OA'B'C'$ 和四边形 $OABC$ 相似，根据相似多边形的面积比等于相似比的平方求出相似比，再根据位似变换的性质计算即可.

【详解】解：∵ 四边形 $OA'B'C'$ 的面积是四边形 $OABC$ 面积的 4 倍，

∴ 四边形 $OA'B'C'$ 和四边形 $OABC$ 的相似比为 $2:1$ ，

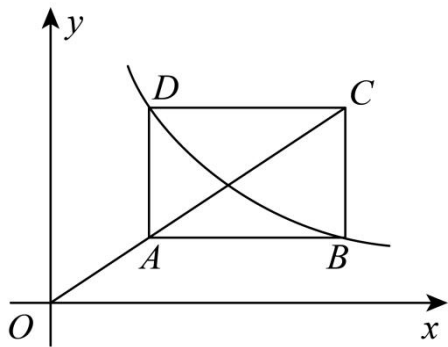
∴ $B(2,3)$ ，

∴ 第一象限内点 $B'(2 \times 2, 3 \times 2)$ ，即 $B'(4, 6)$ ，

故答案为：(4, 6)。

【点睛】 本题考查的是位似变换的概念和性质，掌握相似多边形的面积比等于相似比的平方是解题的关键。

16. 如图，矩形 $ABCD$ 的边 AB 平行于 x 轴，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象经过点 B, D ，对角线 CA 的延长线经过原点 O ，且 $AC = 2AO$ ，若矩形 $ABCD$ 的面积是 8，则 k 的值为_____。



【答案】 6

【解析】

【分析】 延长 CD 交 x 轴于点 F ，设 $D\left(a, \frac{k}{a}\right)$ ，利用相似三角形的判定与性质可求得矩形的长与宽，再由矩形的面积即可求和 k 的值。

【详解】 解： 延长 CD 交 x 轴于点 F ，如图，

由点 D 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上，则设 $D\left(a, \frac{k}{a}\right)$ ，

∵ 矩形 $ABCD$ 的边 AB 平行于 x 轴， $AB \parallel CD$ ， $AD \perp CD$ ，

∴ $CD \perp y$ 轴， $AD \parallel OF$ ，

则 $DF = a$ ， $OF = \frac{k}{a}$ ，

∴ $AD \parallel OF$ ，

∴ $\triangle CDA \sim \triangle CFO$ ，

∴ $\frac{CD}{CF} = \frac{AD}{OF} = \frac{AC}{OC}$ ，

∵ $AC = 2AO$ ，

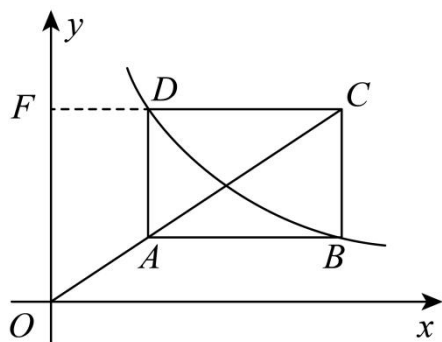
∴ $\frac{AC}{OC} = \frac{2}{3}$ ，

∴ $CD = \frac{2}{3}CF = 2DF = 2a$ ， $AD = \frac{2}{3}OF = \frac{2k}{3a}$ ，

$$\therefore AD \cdot CD = 8, \text{ 即 } 2a \times \frac{2k}{3a} = 8,$$

$$\therefore k = 6,$$

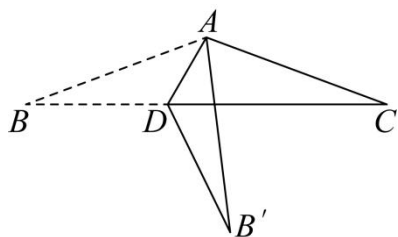
故答案为：6.



【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，反比例函数图象上点的坐标特征，其中相似三角形的判定与性质是关键.

的坐标特征，其中相似三角形的判定与性质是关键.

17. 如图，在三角形纸片 ABC 中， $AB = AC$, $\angle B = 20^\circ$ ，点 D 是边 BC 上的动点，将三角形纸片沿 AD 对折，使点 B 落在点 B' 处，当 $B'D \perp BC$ 时， $\angle BAD$ 的度数为_____.



【答案】 25° 或 115°

【解析】

【分析】分两种情况考虑，利用对称的性质及三角形内角和等知识即可完成求解.

【详解】解：由折叠的性质得： $\angle ADB' = \angle ADB$ ；

$$\therefore B'D \perp BC,$$

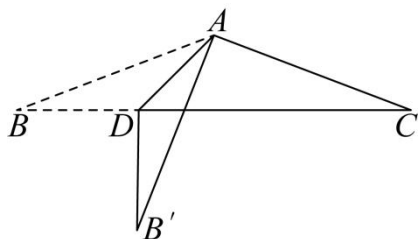
$$\therefore \angle BDB' = 90^\circ;$$

①当 B' 在 BC 下方时，如图，

$$\therefore \angle ADB + \angle ADB' + \angle BDB' = 360^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \times (360^\circ - 90^\circ) = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle B - \angle ADB = 25^\circ;$$

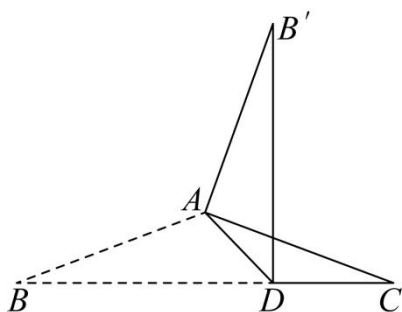


②当 B' 在 BC 上方时，如图，

$$\because \angle ADB + \angle ADB' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle B - \angle ADB = 115^\circ;$$

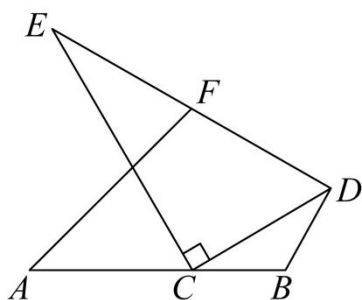


综上， $\angle BAD$ 的度数为 25° 或 115° ；

故答案为： 25° 或 115° .

【点睛】 本题考查了折叠的性质，三角形内角和，注意分类讨论.

18. 如图，线段 $AB = 8$ ，点 C 是线段 AB 上的动点，将线段 BC 绕点 B 顺时针旋转 120° 得到线段 BD ，连接 CD ，在 AB 的上方作 $\text{Rt}\triangle DCE$ ，使 $\angle DCE = 90^\circ$ ， $\angle E = 30^\circ$ ，点 F 为 DE 的中点，连接 AF ，当 AF 最小时， $\triangle BCD$ 的面积为_____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 连接 CF ， BF ， BF ， CD 交于点 P ，由直角三角形的性质及等腰三角形的性质可得 BF 垂直平分 CF ， $\angle ABF = 60^\circ$ 为定角，可得点 F 在射线 BF 上运动，当 $AF \perp BF$ 时， AF 最小，由含 30° 度角直角三角形的性质即可求解.

故答案为： $\sqrt{3}$ ．

【点睛】本题考查了等腰三角形性质，含 30 度直角三角形的性质，斜边中线性质的判定，勾股定理，旋转的性质，确定点 F 的运动路径是关键与难点．

三、解答题（第 19 题 10 分，第 20 题 12 分，共 22 分）

19. 先化简，再求值： $\left(\frac{2x-1}{x-2}-1\right) \div \frac{x+1}{x^2-4}$ ，其中 $x=3$ ．

【答案】 $x+2$ ，5．

【解析】

【分析】原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题．

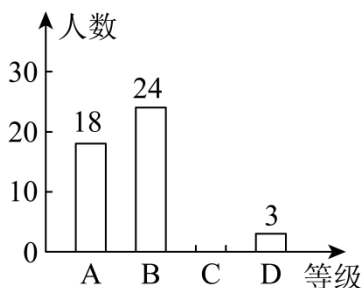
$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \left(\frac{2x-1}{x-2}-1\right) \div \frac{x+1}{x^2-4} \\ & = \left(\frac{2x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-2}\right) \div \frac{x+1}{(x+2)(x-2)} \\ & = \frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{x+1} \\ & = x+2, \end{aligned}$$

当 $x=3$ 时，原式 $= 3+2=5$ ．

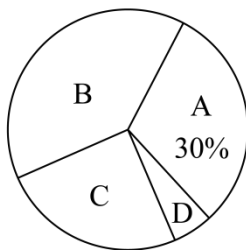
【点睛】本题考查分式的化简求值，解答本题的关键是明确分式化简求值的方法．

20. 6 月 5 日是世界环境日，为提高学生的环保意识，某校举行了环保知识竞赛，从全校学生的成绩中随机抽取了部分学生的成绩进行分析，把结果划分为 4 个等级：A（优秀）；B（良好）；C（中）；D（合格）．并将统计结果绘制成如下两幅统计图．

环保知识竞赛学生成绩
条形统计图



环保知识竞赛学生成绩
扇形统计图



(1) 本次抽样调查的学生共有_____名；

(2) 补全条形统计图；

(3) 该校共有 1200 名学生，请你估计本次竞赛获得 B 等级的学生有多少名？

(4) 在这次竞赛中，九年级一班共有 4 人获得了优秀，4 人中有两名男同学，两名女同学，班主任决定从这 4 人中随机选出 2 人在班级为其他同学做培训，请你用列表法或画树状图法，求所选 2 人恰好是一男一女的概率。

【答案】(1) 60 (2) 见解析

(3) 估计本次竞赛获得 B 等级的学生有 480 名；

(4) 所选 2 人恰好是一男一女的概率为 $\frac{2}{3}$ 。

【解析】

【分析】(1) 根据 A 组人数以及百分比计算即可解决问题；

(2) 求出 C 组人数，画出条形图即可解决问题；

(3) 利用样本估计总体即可；

(4) 先画出树状图，继而根据概率公式可求出两位参赛选手恰好是一男一女的概率。

【小问 1 详解】

解： $18 \div 30\% = 60$ (名)

答：本次抽样调查的学生共有 60 名；

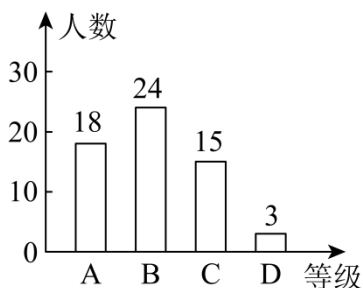
故答案为：60；

【小问 2 详解】

解：C 组人数为： $60 - 18 - 24 - 3 = 15$ (名)，

补全条形图如图所示：

环保知识竞赛学生成绩
条形统计图



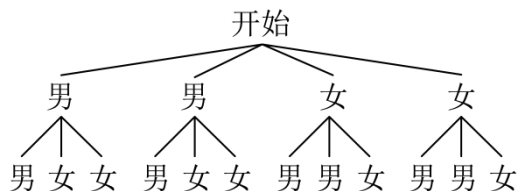
【小问 3 详解】

解：估计本次竞赛获得 B 等级的学生有： $1200 \times \frac{24}{60} = 480$ (名)，

答：估计本次竞赛获得 B 等级的学生有 480 名；

【小问 4 详解】

解：画树状图如下：



机会均等的可能有 12 种，其中一男一女的有 8 种，

故被选中的两人恰好是一男一女的概率是： $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

【点睛】此题考查条形统计图和扇形统计图相关联，由样本估计总体，用列表法或树状图法求概率。列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件。

四、解答题（第 21 题 12 分，第 22 题 12 分，共 24 分）

21. 某礼品店经销 A , B 两种礼品盒，第一次购进 A 种礼品盒 10 盒， B 种礼品盒 15 盒，共花费 2800 元；第二次购进 A 种礼品盒 6 盒， B 种礼品盒 5 盒，共花费 1200 元

- (1) 求购进 A , B 两种礼品盒的单价分别是多少元；
- (2) 若该礼品店准备再次购进两种礼品盒共 40 盒，总费用不超过 4500 元，那么至少购进 A 种礼品盒多少盒？

【答案】(1) A 礼品盒的单价是 100 元， B 礼品盒的单价是 120 元；

(2) 至少购进 A 种礼品盒 15 盒.

【解析】

【分析】(1) 设 A 礼品盒的单价是 a 元， B 礼品盒的单价是 b 元，根据题意列方程组即可得到结论；

(2) 设购进 A 礼品盒 x 盒，则购进 B 礼品盒 $(40-x)$ 盒，根据题意列不等式即可得到结论.

【小问 1 详解】

解：设 A 礼品盒的单价是 a 元， B 礼品盒的单价是 b 元，

$$\text{根据题意得：} \begin{cases} 10a + 15b = 2800 \\ 6a + 5b = 1200 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = 100 \\ b = 120 \end{cases},$$

答： A 礼品盒的单价是 100 元， B 礼品盒的单价是 120 元；

【小问 2 详解】

解：设购进 A 礼品盒 x 盒，则购进 B 礼品盒 $(40-x)$ 盒，

根据题意得： $100x + 120(40-x) \leq 4500$,

解得： $x \geq 15$,

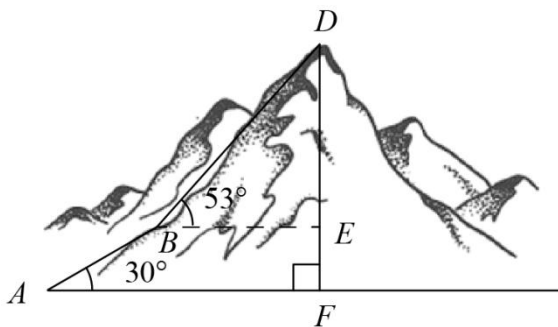
$\therefore x$ 为整数,

$\therefore x$ 的最小整数解为 15,

$\therefore$ 至少购进 A 种礼品盒 15 盒.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，正确的理解题意是解题的关键.

22. 暑假期间，小明与小亮相约到某旅游风景区登山，需要登顶 600m 高的山峰，由山底 A 处先步行 300m 到达 B 处，再由 B 处乘坐登山缆车到达山顶 D 处. 已知点 A, B, D, E, F 在同一平面内，山坡 AB 的坡角为 30° ，缆车行驶路线 BD 与水平面的夹角为 53° （换乘登山缆车的时间忽略不计）



(1) 求登山缆车上升的高度 DE ；

(2) 若步行速度为 30m/min ，登山缆车的速度为 60m/min ，求从山底 A 处到达山顶 D 处大约需要多少分钟（结果精确到 0.1min ）

(参考数据: $\sin 53^\circ \approx 0.80$, $\cos 53^\circ \approx 0.60$, $\tan 53^\circ \approx 1.33$)

【答案】(1) 登山缆车上升的高度 $DE = 450\text{m}$ ；

(2) 从山底 A 处到达山顶 D 处大约需要 19.4min .

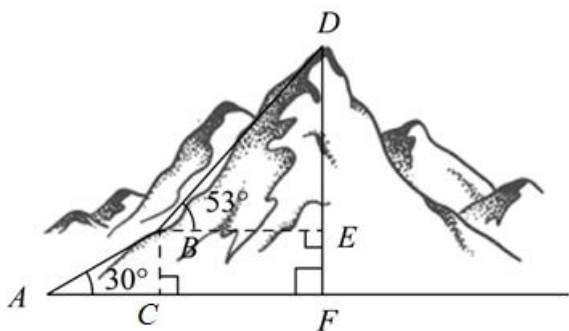
【解析】

【分析】(1) 过 B 点作 $BC \perp AF$ 于 C, $BE \perp DF$ 于 E, 则四边形 BEFC 是矩形, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 利用含 30° 的直角三角形的性质求得 BC 的长, 据此求解即可;

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, 求得 BD 的长, 再计算得出答案.

【小问 1 详解】

解: 如图, 过 B 点作 $BC \perp AF$ 于 C, $BE \perp DF$ 于 E, 则四边形 BEFC 是矩形,



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 300\text{m}$,

$$\therefore EF = BC = \frac{1}{2}AB = 150\text{m},$$

$$\therefore DE = DF - EF = 600 - 150 = 450(\text{m}),$$

答: 登山缆车上升的高度 $DE = 450\text{m}$;

【小问 2 详解】

解: 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中, $\angle DEB = 90^\circ$, $\angle DBE = 53^\circ$, $DE = 450\text{m}$,

$$\therefore BD = \frac{DE}{\sin 53^\circ} = \frac{450}{0.8} = 562.5(\text{m}),$$

$\therefore$ 从山底 A 处到达山顶 D 处大约需要:

$$\frac{300}{30} + \frac{562.5}{60} = 19.375 \approx 19.4(\text{min}),$$

答: 从山底 A 处到达山顶 D 处大约需要 19.4min .

【点睛】此题主要考查了解直角三角形的应用, 正确掌握直角三角形的边角关系是解题关键.

五、解答题 (满分 12 分)

23. 商店出售某品牌护眼灯, 每台进价为 40 元, 在销售过程中发现, 月销量 y (台) 与销售单价 x (元) 之间满足一次函数关系, 规定销售单价不低于进价, 且不高于进价的 2 倍, 其部分对应数据如下表所示:

销售单价 x (元)	...	50	60	70	...
月销量 y (台)	...	90	80	70	...

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 当护眼灯销售单价定为多少元时, 商店每月出售这种护眼灯所获的利润最大? 最大月利润为多少元?

【答案】(1) $y = -x + 140$

(2) 护眼灯销售单价定为 80 元时, 商店每月出售这种护眼灯所获的利润最大, 最大月利润为 2400 元

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求解即可;

(2) 设销售利润为 W 元, 列出 W 关于 x 的函数关系式, 即可求得最大利润.

【小问 1 详解】

解: 由题意设 $y = kx + b (k \neq 0)$,

由表知, 当 $x = 50$ 时, $y = 90$; 当 $x = 60$ 时, $y = 80$;

以上值代入函数解析式中得：
$$\begin{cases} 50k + b = 90 \\ 60k + b = 80 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} k = -1 \\ b = 140 \end{cases},$$

所以 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = -x + 140$;

【小问 2 详解】

解：设销售利润为 W 元，

则 $W = (x - 40)y = (x - 40)(-x + 140)$,

整理得： $W = -x^2 + 180x - 5600$,

由于销售单价不低于进价，且不低于进价的 2 倍，则 $40 \leq x \leq 80$,

$\because -1 < 0$, $W = -(x - 90)^2 + 2500$,

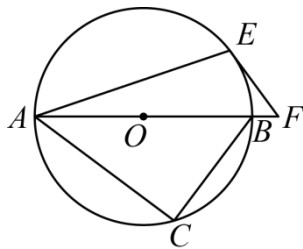
$\therefore$ 当 $x \leq 90$ 时， W 随 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x = 80$ 时， W 有最大值，且最大值为 2400；

答：当护眼灯销售单价定为 80 元时，商店每月出售这种护眼灯所获的利润最大，最大月利润为 2400 元。

六、解答题（满分 12 分）

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C, E 在 $\odot O$ 上， $\angle CAB = 2\angle EAB$ ，点 F 在线段 AB 的延长线上，且 $\angle AFE = \angle ABC$ 。



(1) 求证： EF 与 $\odot O$ 相切；

(2) 若 $BF = 1$, $\sin \angle AFE = \frac{4}{5}$, 求 BC 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $BC = \frac{24}{5}$ 。

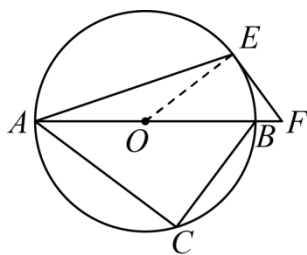
【解析】

【分析】(1) 利用圆周角定理得到 $\angle EOB = 2\angle EAB$ ，结合已知推出 $\angle CAB = \angle EOB$ ，再证明 $\triangle OFE \sim \triangle ABC$ ，推出 $\angle OEF = \angle C = 90^\circ$ ，即可证明结论成立；

(2) 设 $\odot O$ 半径为 x ，则 $OF = x + 1$ ，在 $\text{Rt}\triangle OFE$ 中，利用正弦函数求得半径的长，再在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，解直角三角形即可求解。

【小问 1 详解】

证明：连接 OE ，



$$\because \widehat{BE} = \widehat{BE}, \therefore \angle EOB = 2\angle EAB,$$

$$\because \angle CAB = 2\angle EAB,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle EOB,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle C = 90^\circ,$$

$$\because \angle AFE = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle OFE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle OEF = \angle C = 90^\circ,$$

$\because OE$ 为 $\odot O$ 半径,

$\therefore EF$ 与 $\odot O$ 相切;

【小问 2 详解】

解：设 $\odot O$ 半径为 x ，则 $OF = x + 1$ ，

$$\because \angle AFE = \angle ABC, \sin \angle AFE = \frac{4}{5},$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \frac{4}{5},$$

在 $\text{Rt}\triangle OEF$ 中， $\angle OEF = 90^\circ$ ， $\sin \angle AFE = \frac{4}{5}$ ，

$$\therefore \frac{OE}{OF} = \frac{4}{5}, \text{ 即 } \frac{x}{x+1} = \frac{4}{5},$$

解得 $x = 4$ ，

经检验， $x = 4$ 是所列方程的解，

$\therefore \odot O$ 半径为 4，则 $AB = 8$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\sin \angle ABC = \frac{4}{5}$ ， $AB = 8$ ，

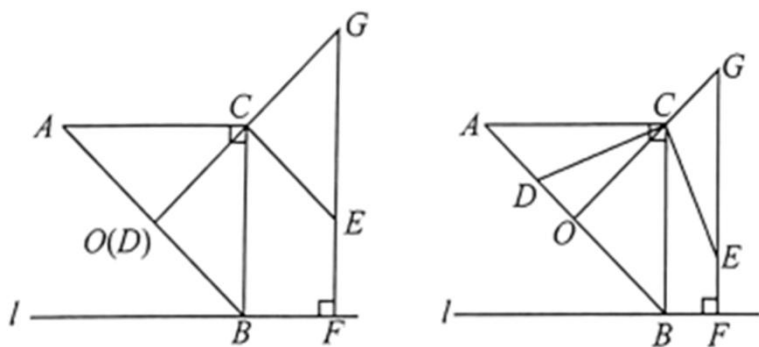
$$\therefore AC = AB \cdot \sin \angle ABC = \frac{32}{5},$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \frac{24}{5}.$$

【点睛】本题考查了圆的切线的判定、圆周角定理、解直角三角形以及相似三角形的判定和性质等知识，熟练掌握圆的相关知识和相似三角形的判定和性质是解题的关键.

七、解答题 (满分 12 分)

25. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$, 点 O 为 AB 的中点, 点 D 在直线 AB 上 (不与点 A, B 重合), 连接 CD , 线段 CD 绕点 C 逆时针旋转 90° , 得到线段 CE , 过点 B 作直线 $l \perp BC$, 过点 E 作 $EF \perp l$, 垂足为点 F , 直线 EF 交直线 OC 于点 G .



(1) 如图, 当点 D 与点 O 重合时, 请直接写出线段 AD 与线段 EF 的数量关系;

(2) 如图, 当点 D 在线段 AB 上时, 求证: $CG + BD = \sqrt{2}BC$;

(3) 连接 DE , $\triangle CDE$ 的面积记为 S_1 , $\triangle ABC$ 的面积记为 S_2 , 当 $EF : BC = 1 : 3$ 时, 请直接写出 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值.

【答案】(1) $EF = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$.

(2) 见解析. (3) $\frac{5}{9}$ 或 $\frac{17}{9}$.

【解析】

【分析】(1) 可先证 $\triangle BCD \cong \triangle BCE$, 得到 $BD = BE$, 根据锐角三角函数, 可得到 BE 和 EF 的数量关系, 进而得到线段 AD 与线段 EF 的数量关系.

(2) 可先证 $\triangle ACD \cong \triangle GEC$, 得到 $DA = CG$, 进而得到 $CG + BD = DA + BD = AB$, 问题即可得证.

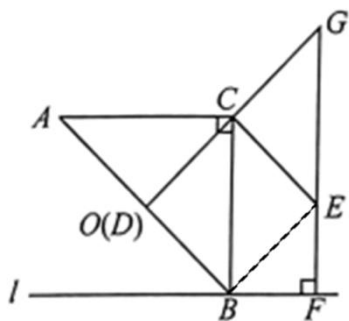
(3) 分两种情况: ①点 D 在线段 AB 上, 过点 C 作 CN 垂直于 FG , 交 FG 于点 N , 过点 E 作 EM 垂直于 BC , 交 BC 于点 M , 设 $EF = a$, 利用勾股定理, 可用含 a 的代数式表示 EC , 根据三角形面积公式, 即可得到答案. ②点 D 在线段 BA 的延长线上, 过点 E 作 EJ 垂直于 BC , 交 BC 延长线于点 J , 令 EF 交 AC 于点 I , 连接 BE , 设 $EF = b$, 可证 $\triangle CDA \cong \triangle CEB$, 进一步证得 $\triangle EBJ$ 是等腰直角三角形, $EJ = BJ$, 利用勾股定理, 可用含 b 的代数式表示 EC , 根据三角形面积公式, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $EF = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$.

理由如下:

如图, 连接 BE .



根据图形旋转的性质可知 $CD = CE$.

由题意可知, $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore CD$ 为等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线,

$$\therefore \angle BCD = 45^\circ, \quad AD = BD.$$

又 $\angle DCE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle BCE = 45^\circ.$$

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} CD = CE \\ \angle BCD = \angle BCE \\ BC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle BCE.$$

$$\therefore BD = BE, \quad \angle CBE = \angle CBD = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle EBF = 45^\circ.$$

$$\therefore EF = BE \cdot \sin \angle EBF = \frac{\sqrt{2}}{2} BE.$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{2}}{2} AD.$$

【小问 2 详解】

解: $\because CO$ 为等腰直角三角形 $\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线,

$$\therefore AO = BO.$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle BCE + \angle DCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE.$$

$$\therefore BC \perp l, \quad EF \perp l,$$

$$\therefore BC \parallel EF.$$

$$\therefore \angle G = \angle OCB = 45^\circ, \quad \angle GEC = \angle BCE.$$

$$\therefore \angle G = \angle A, \quad \angle ACD = \angle GEC.$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle GEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle GEC \\ \angle A = \angle G \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle GEC .$$

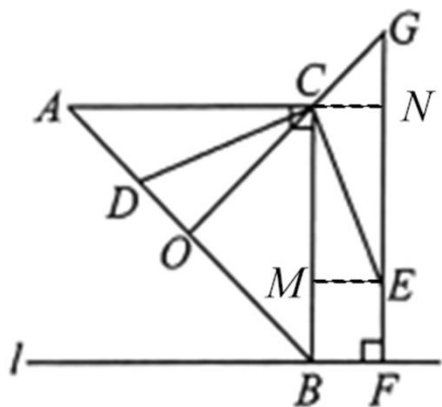
$$\therefore DA = CG.$$

$$\therefore CG + BD = DA + BD = AB = \sqrt{2}BC.$$

【小问 3 详解】

解: 当点 D 在线段 AB 延长线上时, 不满足条件 $EF:BC=1:3$, 故分两种情况:

①点 D 在线段 AB 上, 如图, 过点 C 作 CN 垂直于 FG , 交 FG 于点 N ; 过点 E 作 EM 垂直于 BC , 交 BC 于点 M .



设 $EF = a$, 则 $BC = AC = 3a$.

根据题意可知，四边形 $BFEM$ 和 $CMEN$ 为矩形， $\triangle GCN$ 为等腰直角三角形.

$$\therefore EF = BM = a, \quad CM = NE = 2a.$$

由 (2) 证明可知 $\triangle ACD \cong \triangle GEC$,

$$\therefore AC = GE = 3a.$$

$$\therefore NG = NC = a .$$

$$\therefore NC = EM = a.$$

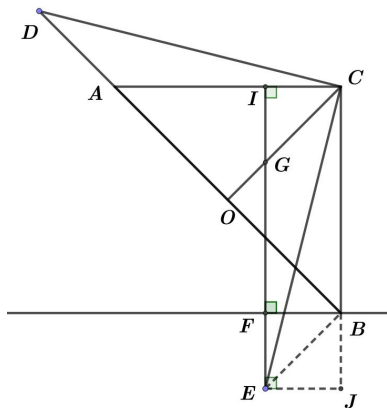
根据勾股定理可知

$$CE = \sqrt{EM^2 + CM^2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a,$$

$\triangle CDE$ 的面积 S_1 与 $\triangle ABC$ 的面积 S_2 之比

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{1}{2}BC^2} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}a)^2}{\frac{1}{2}(3a)^2} = \frac{5}{9}$$

②点 D 在线段 BA 的延长线上, 过点 E 作 EJ 垂直于 BC , 交 BC 延长线于点 J , 令 EF 交 AC 于点 I , 连接 BE , 由题意知, 四边形 $FBJE$, $FBCI$ 是矩形,



$$\therefore \angle DCE = \angle ACB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle DCE - \angle ACE = \angle ACB - \angle ACE$$

$$\text{即 } \angle DCA = \angle ECB$$

$$\text{又 } \because CD = CE, CA = CB$$

$$\therefore \triangle CDA \cong \triangle CEB$$

$$\therefore \angle DAC = \angle EBC$$

$$\text{而 } \angle DAC = 180^\circ - \angle CAB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\therefore \angle EBC = 135^\circ$$

$$\angle EBJ = 180^\circ - \angle EBC = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle EBJ \text{ 是等腰直角三角形, } EJ = BJ$$

$$\text{设 } EF = b, \text{ 则 } BC = IF = 3b, EJ = BJ = CI = b$$

$$\therefore EI = EF + IF = 4b$$

$$\text{Rt}\triangle CIE \text{ 中, } CE = \sqrt{CI^2 + EI^2} = \sqrt{b^2 + (4b)^2} = \sqrt{17}b$$

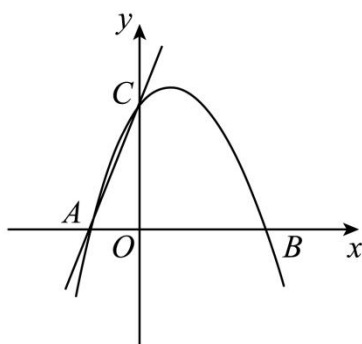
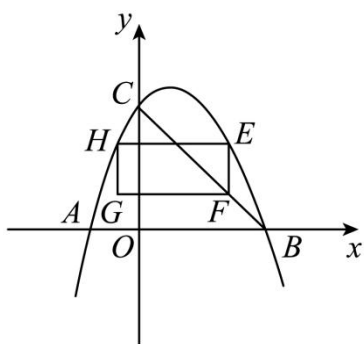
$\triangle CDE$ 的面积 S_1 与 $\triangle ABC$ 的面积 S_2 之比

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}CE^2}{\frac{1}{2}BC^2} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{17}b)^2}{\frac{1}{2}(3b)^2} = \frac{17}{9}$$

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定及性质、勾股定理以及图形旋转的性质，灵活利用全等三角形的判定及性质是解题的关键.

八、解答题 (满分 14 分)

26. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 $B(4,0)$ ，与 y 轴交于点 $C(0,4)$ ，点 E 在抛物线上.



备用图

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 点 E 在第一象限内，过点 E 作 $EF \parallel y$ 轴，交 BC 于点 F ，作 $EH \parallel x$ 轴，交抛物线于点 H ，点 H 在点 E 的左侧，以线段 EF, EH 为邻边作矩形 $EFGH$ ，当矩形 $EFGH$ 的周长为 11 时，求线段 EH 的长;
- (3) 点 M 在直线 AC 上，点 N 在平面内，当四边形 $OENM$ 是正方形时，请直接写出点 N 的坐标.

【答案】(1) 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$;

(2) $EH = 4$;

(3) 点 N 的坐标为 $(4,4)$ 或 $(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$.

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法即可求解;

(2) 先求得直线 BC 的解析式为 $y = -x + 4$ ，设 $E(x, -\frac{1}{2}x^2 + x + 4)$ ，则 $F(x, -x + 4)$ ，利用对称性质求得 $H(2-x, -\frac{1}{2}x^2 + x + 4)$ ，推出 $GH - EF = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$ ， $GF - EH = 2x - 2$ ，利用矩形周长公式列

一元二次方程计算即可求解；

(3) 先求得直线 AC 的解析式为 $y = 2x + 4$ ，分别过点 M 、 E 作 y 的垂线，垂足分别为 P 、 Q ，证明

$$\triangle OEP \cong \triangle MOQ, \text{ 推出 } PE = OQ, PO = MQ, \text{ 设 } E\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + 4\right), \text{ 则 } M\left(\frac{1}{2}m^2 - m - 4, m\right),$$

由点 M 在直线 AC 上，列式计算，可求得 m 的值，利用平移的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $B(4, 0)$ 和 $C(0, 4)$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2} \times 4^2 + 4b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} b = 1 \\ c = 4 \end{cases},$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$;

【小问 2 详解】

解：∵ 点 $B(4, 0)$ 和 $C(0, 4)$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + 4$ ，则 $0 = 4k + 4$ ，

解得 $k = -1$ ，

∴ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 4$ ，

设 $E\left(x, -\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right)$ ，且 $0 < x < 4$ ，则 $F(x, -x + 4)$ ，

$$\therefore GH - EF = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 - (-x + 4) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x,$$

$$\therefore \text{解析式的对称轴为 } -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1,$$

$$\therefore H\left(2 - x, -\frac{1}{2}x^2 + x + 4\right),$$

$$\therefore GF - EH = x - (4 - x) = 2x - 2,$$

$$\text{依题意得 } 2\left(-\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2x - 2\right) = 11,$$

解得 $x=5$ (舍去) 或 $x=3$,

$$\therefore EH = 4 ;$$

【小问 3 详解】

解: 令 $y=0$, 则 $-\frac{1}{2}x^2+x+4=0$,

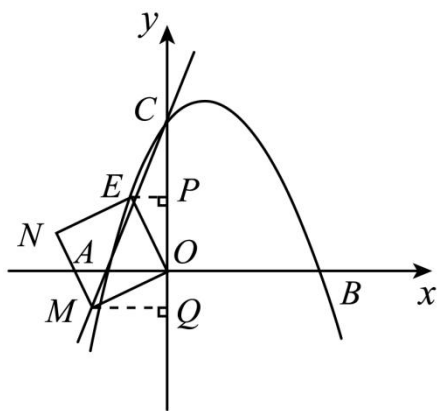
解得 $x = -2$ 或 $x = 4$.

$$\therefore A(-2,0),$$

同理，直线 AC 的解析式为 $y = 2x + 4$ ，

∴ 四边形 $OENM$ 是正方形,

$\therefore OE = OM$, $\angle EOM = 90^\circ$, 分别过点 M 、 E 作 y 的垂线, 垂足分别为 P 、 Q , 如图,



$$\angle OPE = \angle MQO = 90^\circ, \quad \angle OEP = 90^\circ - \angle EOP = \angle MOQ,$$

$$\therefore \triangle OEP \cong \triangle MOQ,$$

$$\therefore PE = OQ, \quad PO = MQ,$$

设 $E\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + m + 4\right)$,

$$\therefore PE = OQ = -m, \quad PO = MQ = -\frac{1}{2}m^2 + m + 4,$$

则 $M\left(\frac{1}{2}m^2 - m - 4, m\right)$,

$\therefore$ 点 M 在直线 AC 上,

$$\therefore m = 2\left(\frac{1}{2}m^2 - m - 4\right) + 4,$$

解得 $m = 4$ 或 $m = -1$,

当 $m = 4$ 时, $M(0,4)$, $E(4,0)$,

即点 M 与点 C 重合, 点 E 与点 B 重合时, 四边形 $OENM$ 是正方形, 此时 $N(4,4)$;

当 $m = -1$ 时, $M\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$, $E\left(-1, \frac{5}{2}\right)$,

点 O 向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位, 再向下平移 1 个单位, 得到点 M ,

则点 E 向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位, 再向下平移 1 个单位, 得到点 N ,

$\therefore N\left(-1-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}-1\right)$, 即 $N\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

综上, 点 N 的坐标为 $(4,4)$ 或 $\left(-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

【点睛】 本题考查的是待定系数法求二次函数解析式, 二次函数图象上点的坐标特征, 待定系数法求一次函数解析式, 一次函数图象上点的坐标特征, 两点之间的距离公式和正方形的性质, 是一道综合性较强的题, 解题的关键是求出二次函数和一次函数解析式以及分情况讨论.

