

贵州省 2023 年初中学业水平考试（中考）试题卷

数学

同学你好！答题前请认真阅读以下内容：

1. 全卷共 6 页，三个大题，共 25 题，满分 150 分。考试时间为 120 分钟。考试形式闭卷。
2. 一律在答题卡相应位置作答，在试题卷上答题视为无效。
3. 不能使用计算器。

一、选择题（每小题 3 分，共 36 分。每小题均有 A、B、C、D 四个选项，其中只有一个选项正确，请用 2B 铅笔在答题卡相应位置填涂）

1. 5 的绝对值是（ ）

- A. ± 5 B. 5 C. -5 D. $\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

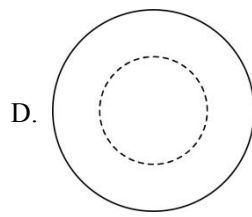
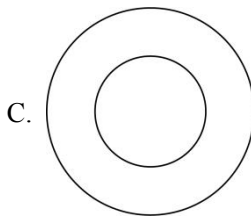
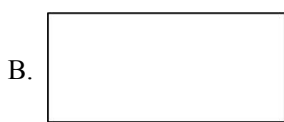
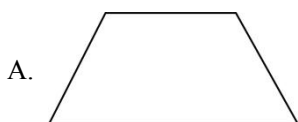
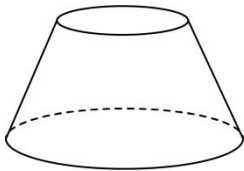
【分析】正数的绝对值是它本身，由此可解。

【详解】解：5 的绝对值是 5，

故选 B.

【点睛】本题考查绝对值，解题的关键是掌握正数的绝对值是它本身。

2. 如图所示的几何体，从正面看，得到的平面图形是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据从正面看得到的图象是主视图，可得答案。

【详解】解：从正面看，得到的平面图形是一个等腰梯形，

故选：A.

【点睛】本题考查简单几何体的三视图，解题的关键是掌握主视图的定义。

3. 据中国经济网资料显示，今年一季度全国居民人均可支配收入平稳增长，全国居民人均可支配收入为 10870 元。10870 这个数用科学记数法表示正确的是（ ）

- A. 0.1087×10^5 B. 1.087×10^4 C. 1.087×10^3 D. 10.87×10^3

【答案】B

【解析】

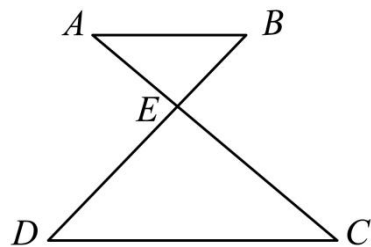
【分析】将 10870 写成 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为正整数.

【详解】解： $1087 = 1.087 \times 10^4$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查科学记数法，解题的关键是掌握 $a \times 10^n$ 中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 与小数点移动位数相同.

4. 如图， $AB \parallel CD$ ， AC 与 BD 相交于点 E . 若 $\angle C = 40^\circ$ ，则 $\angle A$ 的度数是 ()



- A. 39° B. 40° C. 41° D. 42°

【答案】B

【解析】

【分析】根据“两直线平行，内错角相等”可直接得出答案.

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle C = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle C = 40^\circ$ ，

故选 B.

【点睛】本题考查平行线的性质，解题的关键是掌握“两直线平行，内错角相等”.

5. 化简 $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a}$ 结果正确的是 ()

- A. 1 B. a C. $\frac{1}{a}$ D. $-\frac{1}{a}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同分母分式加减运算法则进行计算即可.

【详解】解： $\frac{a+1}{a} - \frac{1}{a} = \frac{a+1-1}{a} = 1$ ，故 A 正确.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了分式加减，解题的关键是熟练掌握同分母分式加减运算法则，准确计算.

6. “石阡苔茶”是贵州十大名茶之一，在我国传统节日清明节前后，某茶叶经销商对甲、乙、丙、丁四种包装的苔茶（售价、利润均相同）在一段时间内的销售情况统计如下表，最终决定增加乙种包装苔茶的进货数量，影响经销商决策的统计量是（ ）

包装	甲	乙	丙	丁
销售量（盒）	15	22	18	10

- A. 中位数 B. 平均数 C. 众数 D. 方差

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数的意义结合题意即可得到乙的销量最好，要多进即可得到答案.

【详解】解：由表格可得，

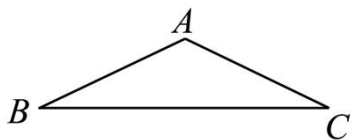
$22 > 18 > 15 > 10$ ，众数是乙，

故乙的销量最好，要多进，

故选 C.

【点睛】本题考查众数的意义，根据众数最多销量最好多进货.

7. 5月26日，“2023 中国国际大数据产业博览会”在贵阳开幕，在“自动化立体库”中有许多几何元素，其中有一个等腰三角形模型（示意图如图所示），它的顶角为 120° ，腰长为 12m ，则底边上的高是（ ）



- A. 4m B. 6m C. 10m D. 12m

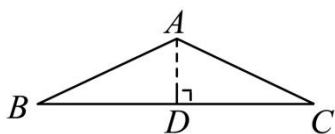
【答案】B

【解析】

【分析】作 $AD \perp BC$ 于点 D ，根据等腰三角形的性质和三角形内角和定理可得

$\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 30^\circ$ ，再根据含 30° 度角的直角三角形的性质即可得出答案.

【详解】解：如图，作 $AD \perp BC$ 于点 D ，



$\therefore \triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 120^\circ$ ， $AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) = 30^\circ,$$

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 12 = 6\text{m},$$

故选 B.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质，三角形内角和定理，含 30 度角的直角三角形的性质等，解题的关键是掌握 30 度角所对的直角边等于斜边的一半.

8. 在学校科技宣传活动中，某科技活动小组将 3 个标有“北斗”，2 个标有“天眼”，5 个标有“高铁”的小球（除标记外其它都相同）放入盒中，小红从盒中随机摸出 1 个小球，并对小球标记的内容进行介绍，下列叙述正确的是（ ）

- A. 摸出“北斗”小球的可能性最大 B. 摸出“天眼”小球的可能性最大
C. 摸出“高铁”小球的可能性最大 D. 摸出三种小球的可能性相同

【答案】C

【解析】

【分析】根据概率公式计算摸出三种小球的概率，即可得出答案.

【详解】解：盒中小球总量为： $3+2+5=10$ （个），

摸出“北斗”小球的概率为： $\frac{3}{10}$ ，

摸出“天眼”小球的概率为： $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ ，

摸出“高铁”小球的概率为： $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ ，

因此摸出“高铁”小球的可能性最大.

故选 C.

【点睛】本题考查判断事件发生可能性的大小，掌握概率公式是解题的关键.

9. 《孙子算经》中有这样一道题，大意为：今有 100 头鹿，每户分一头鹿后，还有剩余，将剩下的鹿按每 3 户共分一头，恰好分完，问：有多少户人家？若设有 x 户人家，则下列方程正确的是（ ）

- A. $x + \frac{1}{3} = 100$ B. $3x + 1 = 100$ C. $x + \frac{1}{3}x = 100$ D. $\frac{x+1}{3} = 100$

【答案】C

【解析】

【分析】每户分一头鹿需 x 头鹿，每 3 户共分一头需 $\frac{1}{3}x$ 头鹿，一共分了 100 头鹿，由此列方程即可.

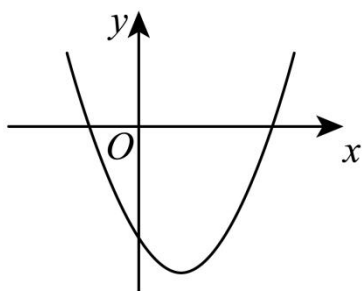
【详解】解： x 户人家，每户分一头鹿需 x 头鹿，每 3 户共分一头需 $\frac{1}{3}x$ 头鹿，

由此可知 $x + \frac{1}{3}x = 100$,

故选 C.

【点睛】本题考查列一元一次方程，解题的关键是正确理解题意.

10. 已知，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则点 $P(a, b)$ 所在的象限是 ()



- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】首先根据二次函数的图象及性质判断 a 和 b 的符号，从而得出点 $P(a, b)$ 所在象限.

【详解】解：由图可知二次函数的图象开口向上，对称轴在 y 轴右侧，

$$\therefore a > 0, -\frac{b}{2a} > 0,$$

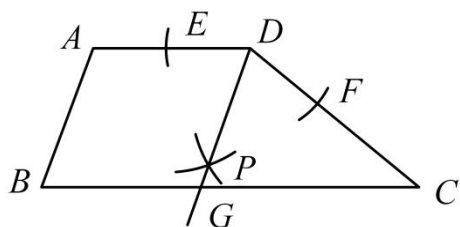
$$\therefore b < 0,$$

$$\therefore P(a, b) \text{ 在第四象限,}$$

故选 D.

【点睛】本题考查二次函数的图象与系数的关系，以及判断点所在象限，解题的关键是根据二次函数的图象判断出 a 和 b 的符号.

11. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $BC = 5$ ， $CD = 3$. 按下列步骤作图：①以点 D 为圆心，适当长度为半径画弧，分别交 DA, DC 于 E, F 两点；②分别以点 E, F 为圆心以大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P ；③连接 DP 并延长交 BC 于点 G . 则 BG 的长是 ()



A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】A

【解析】

【分析】先根据作图过程判断 DG 平分 $\angle ADC$ ，根据平行线的性质和角平分线的定义可得 $\angle CDG = \angle CGD$ ，进而可得 $CG = CD = 3$ ，由此可解.

【详解】解：由作图过程可知 DG 平分 $\angle ADC$ ，

$$\therefore \angle ADG = \angle CDG,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle CGD,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle CGD,$$

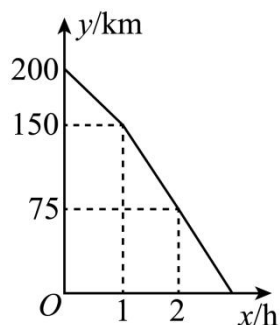
$$\therefore CG = CD = 3,$$

$$\therefore BG = BC - CG = 5 - 3 = 2,$$

故选 A.

【点睛】本题考查角平分线的作图，平行线的性质，等腰三角形的判定，解题的关键是根据作图过程判断出 DG 平分 $\angle ADC$.

12. 今年“五一”假期，小星一家驾车前往黄果树旅游，在行驶过程中，汽车离黄果树景点的路程 y (km) 与所用时间 x (h) 之间的函数关系的图象如图所示，下列说法正确的是 ()



A. 小星家离黄果树景点的路程为 50km

B. 小星从家出发第 1 小时的平均速度为 75km/h

C. 小星从家出发 2 小时离景点的路程为 125km

D. 小星从家到黄果树景点的时间共用了 3h

【答案】D

【解析】

【分析】根据路程、速度、时间的关系，结合图象提供信息逐项判断即可.

【详解】解： $x=0$ 时， $y=200$ ，因此小星家离黄果树景点的路程为 50km ，故 A 选项错误，不合题意；

$x=1$ 时， $y=150$ ，因此小星从家出发第 1 小时的平均速度为 50km/h ，故 B 选项错误，不合题意；

$x=2$ 时， $y=75$ ，因此小星从家出发 2 小时离景点的路程为 75km ，故 C 选项错误，不合题意；

小明离家 1 小时后的行驶速度为 $\frac{150-75}{2-1} = 75\text{km/h}$ ，从家出发 2 小时离景点的路程为 75km ，还需要行驶

1 小时，因此小星从家到黄果树景点的时间共用了 3h ，故 D 选项正确，符合题意；

故选 D.

【点睛】本题主要考查从函数图象获取信息，解题的关键是理解题意，看懂所给一次函数的图象.

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

13. 因式分解： $x^2 - 4 = \underline{\hspace{2cm}}$.

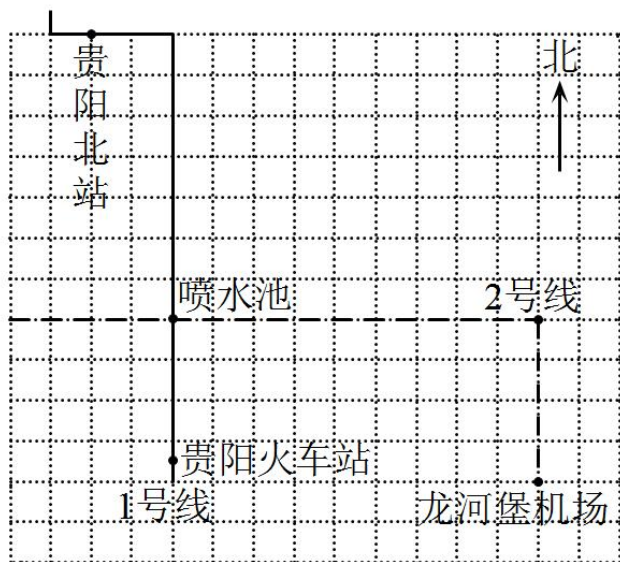
【答案】 $(x+2)(x-2)$

【解析】

【详解】解： $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$ ；

故答案为 $(x+2)(x-2)$

14. 如图，是贵阳市城市轨道交通运营部分示意图，以喷水池为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，若贵阳北站的坐标是 $(-2, 7)$ ，则龙洞堡机场的坐标是_____.



【答案】 $(9, -4)$

【解析】

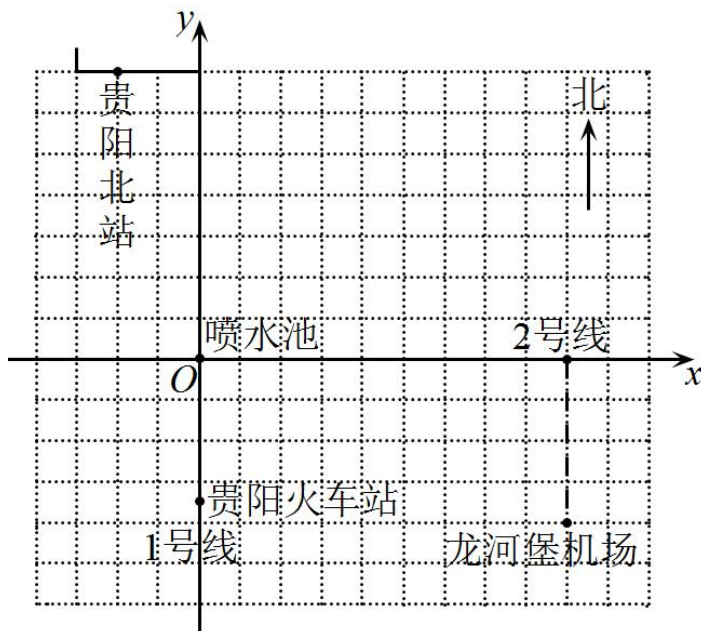
【分析】根据题意，一个方格代表一个单位，在方格中数出洞堡机场与喷水池的水平距离和垂直距离，再

根据洞堡机场在平面直角坐标系的第三象限即可求解.

【详解】解：如图，以喷水池为原点，分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向建立平面直角坐标系，

$\because$ 若贵阳北站的坐标是 $(-2, 7)$,

$\therefore$ 方格中一个小格代表一个单位,



$\because$ 洞堡机场与喷水池的水平距离又 9 个单位长度，与喷水池的垂直距离又 4 个单位长度，且在平面直角坐标系的第三象限，

$\therefore$ 龙洞堡机场的坐标是 $(9, -4)$,

故答案为： $(9, -4)$.

【点睛】 本题考查了平面直角坐标系点的坐标，掌握在平面直角坐标系中确定一个坐标需要找出距离坐标原点的水平距离和垂直距离是解题的关键.

15. 若一元二次方程 $kx^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值是_____.

【答案】 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】 利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4k = 0 \\ k \neq 0 \end{cases},$$

$$\therefore k = \frac{9}{4},$$

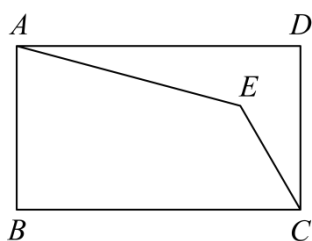
故答案为: $\frac{9}{4}$.

【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式, 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 若

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根.

16. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为矩形内一点, 且 $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$, $\angle BAE = 75^\circ$, $\angle BCE = 60^\circ$, 则四边形 $ABCE$ 的面积是_____.

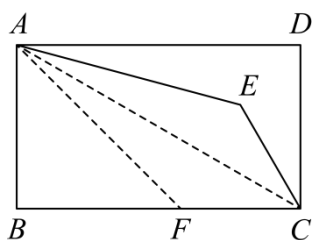


【答案】 $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$

【解析】

【分析】 连接 AC , 可得 $\angle ACE = \angle BCA = 30^\circ$, 即 AC 平分 $\angle BCE$, 在 BC 上截取 $CF = CE$, 连接 AF , 证明 $\triangle ACF \cong \triangle ACE$, 进而可得 $\triangle ABF$ 为等腰直角三角形, 则四边形 $ABCE$ 的面积 $= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACF}$, 代入数据求解即可.

【详解】 解: 如图, 连接 AC ,



$\because$ 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $AD = \sqrt{3}$,

$\therefore BC = AD = \sqrt{3}$, $\angle B = 90^\circ$,

$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\tan \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle ACB = 30^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$,

$$\because \angle BCE = 60^\circ, \angle BAE = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCA = 30^\circ, \angle CAE = \angle BAE - \angle BAC = 15^\circ,$$

在 BC 上截取 $CF = CE$ ，连接 AF ，则 $\angle ACE = \angle ACF$ ，

$$\therefore AC = AC,$$

$$\therefore \triangle ACF \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle CAF = \angle CAE = 15^\circ, S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ACF},$$

$$\therefore \angle AFB = \angle CAF + \angle ACB = 15^\circ + 30^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AFB = \angle BAF = 45^\circ,$$

$$\therefore AB = FB = 1,$$

$$\therefore FC = BC - BF = \sqrt{3} - 1,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCE$ 的面积

$$= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACE} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AB \cdot BC + \frac{1}{2} CF \cdot AB = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} + \frac{1}{2} \times (\sqrt{3} - 1) \times 1 = \frac{2\sqrt{3} - 1}{2}.$$

故答案为： $\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}$.

【点睛】 本题考查矩形的性质，根据特殊角三角函数值求角的度数，等腰三角形的判定和性质，三角形外角的性质等，综合性较强，解题的关键是正确作出辅助线，将四边形 $ABCE$ 的面积转化为 $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACF}$.

三、解答题（本大题共 9 题，共 98 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17. (1) 计算： $(-2)^2 + (\sqrt{2} - 1)^0 - 1$;

(2) 已知， $A = a - 1, B = -a + 3$. 若 $A > B$ ，求 a 的取值范围.

【答案】 (1) 4; (2) $a > 2$

【解析】

【分析】 (1) 先计算乘方和零次幂，再进行加减运算；

(2) 根据 $A > B$ 列关于 a 的不等式，求出不等式的解集即可.

【详解】 解： (1) $(-2)^2 + (\sqrt{2} - 1)^0 - 1$

$$= 4 + 1 - 1$$

$$= 4;$$

(2) 由 $A > B$ 得： $a - 1 > -a + 3$,

移项，得 $a + a > 3 + 1$,

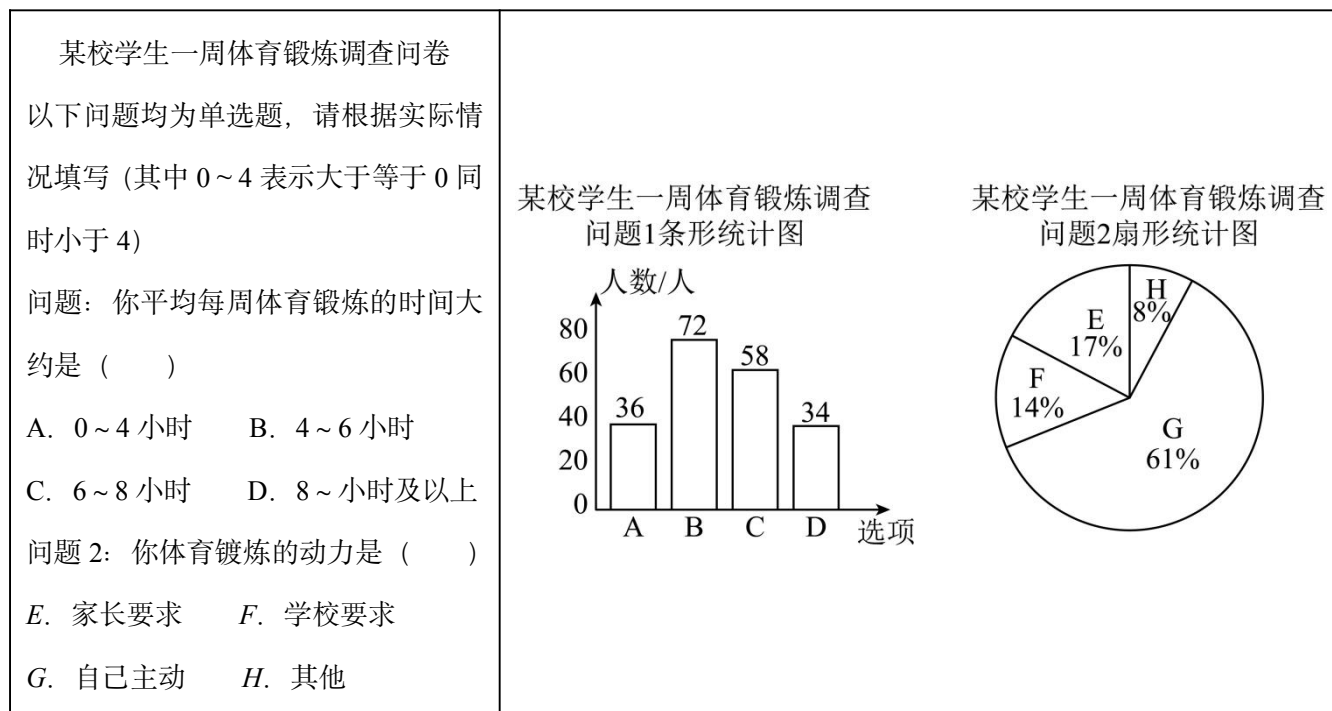
合并同类项，得 $2a > 4$ ，

系数化为 1，得 $a > 2$ ，

即 a 的取值范围为： $a > 2$.

【点睛】 本题考查实数的混合运算，解一元一次不等式，解题的关键是掌握零次幂的运算法则（任何非 0 数的零次幂等于 1），以及一元一次不等式的求解步骤.

18. 为加强体育锻炼，某校体育兴趣小组，随机抽取部分学生，对他们在一周内体育锻炼的情况进行问卷调查，根据问卷结果，绘制成如下统计图. 请根据相关信息，解答下列问题：



- (1) 参与本次调查的学生共有_____人，选择“自己主动”体育锻炼的学生有_____人；
- (2) 已知该校有 2600 名学生，若每周体育锻炼 8 小时以上（含 8 小时）可评为“运动之星”，请估计全校可评为“运动之星”的人数；
- (3) 请写出一条你对同学体育锻炼的建议.

【答案】 (1) 200, 122

(2) 442 人 (3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 先根据条形统计图求出参与调查的人数，再用参与调查的人数乘以选择“自己主动”体育锻炼的学生人数占比即可得到答案；

(2) 用 2600 乘以样本中每周体育锻炼 8 小时以上的人数占比即可得到答案；

(3) 从建议学生加强锻炼的角度出发进行描述即可.

【小问 1 详解】

解： $36 + 72 + 58 + 34 = 200$ 人，

$\therefore$ 参与本次调查的学生共有 200 人，

$\therefore$ 选择“自己主动”体育锻炼的学生有 $200 \times 61\% = 122$ 人，

故答案为：200，122；

【小问 2 详解】

解： $2600 \times \frac{34}{200} = 442$ 人，

$\therefore$ 估计全校可评为“运动之星”的人数为 442 人；

【小问 3 详解】

解：体育锻炼是强身健体的一个非常好的途径，只有有一个良好的身体状况，才能更好的把自己的精力投入到学习中，因此建议学生多多主动加强每周的体育锻炼时间。

【点睛】 本题主要考查了扇形统计图与条形统计图信息相关联，用样本估计总体，正确读懂统计图是解题的关键。

19. 为推动乡村振兴，政府大力扶持小型企业。根据市场需求，某小型企业为加快生产速度，需要更新生产设备，更新设备后生产效率比更新前提高了 25%，设更新设备前每天生产 x 件产品。解答下列问题：

(1) 更新设备后每天生产_____件产品（用含 x 的式子表示）；

(2) 更新设备前生产 5000 件产品比更新设备后生产 6000 件产品多用 2 天，求更新设备后每天生产多少件产品。

【答案】 (1) $1.25x$

(2) 125 件

【解析】

【分析】 (1) 根据“更新设备后生产效率比更新前提高了 25%”列代数式即可；

(2) 根据题意列分式方程，解方程即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 更新设备前每天生产 x 件产品，更新设备后生产效率比更新前提高了 25%，

$\therefore$ 更新设备后每天生产产品数量为： $(1 + 25\%)x = 1.25x$ （件），

故答案为： $1.25x$ ；

【小问 2 详解】

解： 由题意知： $\frac{5000}{x} - 2 = \frac{6000}{1.25x}$ ，

去分母，得 $6250 - 2.5x = 6000$ ，

解得 $x = 100$,

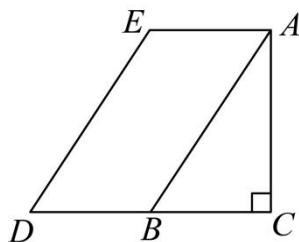
经检验, $x = 100$ 是所列分式方程的解,

$$1.25 \times 100 = 125 \text{ (件)},$$

因此更新设备后每天生产 125 件产品.

【点睛】 本题考查分式方程的实际应用, 解题的关键是根据所给数量关系正确列出方程.

20. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 延长 CB 至 D , 使得 $BD = CB$, 过点 A, D 分别作 $AE \parallel BD$, $DE \parallel BA$, AE 与 DE 相交于点 E . 下面是两位同学的对话:



	小星: 由题目的已知条件, 若连接 BE, 则可证明 $BE \perp CD$.	小红: 由题目的已知条件, 若连接 CE, 则可证明 $CE = DE$.	
--	--	--	--

(1) 请你选择一位同学的说法, 并进行证明;

(2) 连接 AD , 若 $AD = 5\sqrt{2}$, $\frac{CB}{AC} = \frac{2}{3}$, 求 AC 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $3\sqrt{2}$

【解析】

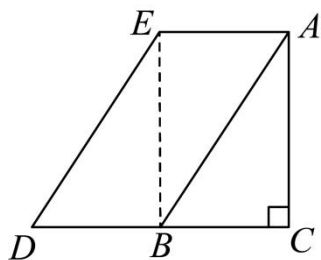
【分析】 (1) 选择小星的说法, 先证四边形 $AEDB$ 是平行四边形, 推出 $AE = BD$, 再证明四边形 $AEBC$ 是矩形, 即可得出 $BE \perp CD$; 选择小红的说法, 根据四边形 $AEBC$ 是矩形, 可得 $CE = AB$, 根据四边形 $AEDB$ 是平行四边形, 可得 $DE = AB$, 即可证明 $CE = DE$;

(2) 根据 $BD = CB$, $\frac{CB}{AC} = \frac{2}{3}$ 可得 $CD = \frac{4}{3}AC$, 再用勾股定理解 $\text{Rt}\triangle ACD$ 即可.

【小问 1 详解】

证明: ①选择小星的说法, 证明如下:

如图, 连接 BE ,



$$\because AE \parallel BD, DE \parallel BA,$$

$\therefore$ 四边形 $AEDB$ 是平行四边形,

$$\therefore AE = BD,$$

$$\because BD = CB,$$

$$\therefore AE = CB,$$

又 $\because AE \parallel BD$, 点 D 在 CB 的延长线上,

$$\therefore AE \parallel CB,$$

$\therefore$ 四边形 $AEBC$ 是平行四边形,

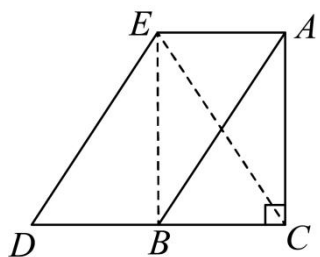
$$\text{又} \because \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $AEBC$ 是矩形,

$$\therefore BE \perp CD;$$

②选择小红的说法, 证明如下:

如图, 连接 CE , BE ,



由①可知四边形 $AEBC$ 是矩形,

$$\therefore CE = AB,$$

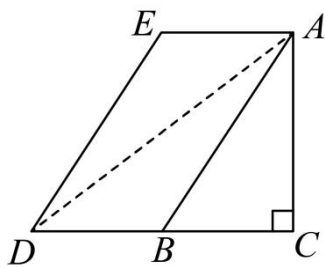
$\because$ 四边形 $AEDB$ 是平行四边形,

$$\therefore DE = AB,$$

$$\therefore CE = DE.$$

【小问 2 详解】

解: 如图, 连接 AD ,



$$\because BD = CB, \quad \frac{CB}{AC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{2CB}{AC} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CD = \frac{4}{3}AC,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AD^2 = CD^2 + AC^2,$$

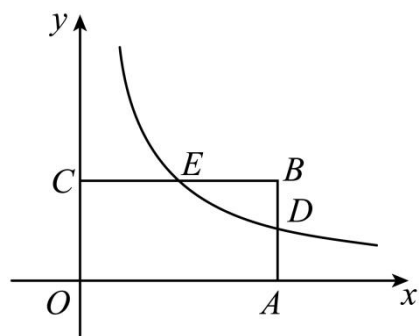
$$\therefore (5\sqrt{2})^2 = \left(\frac{4}{3}AC\right)^2 + AC^2,$$

$$\text{解得 } AC = 3\sqrt{2}$$

$$\text{即 } AC \text{ 的长为 } 3\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质，勾股定理等，解题的关键是掌握平行四边形和矩形的判定方法.

21. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $OABC$ 是矩形，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象分别与 AB, BC 交于点 $D(4,1)$ 和点 E ，且点 D 为 AB 的中点.



(1) 求反比例函数的表达式和点 E 的坐标;

(2) 若一次函数 $y = x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象相交于点 M ，当点 M 在反比例函数图象上

D, E 之间的部分时 (点 M 可与点 D, E 重合)，直接写出 m 的取值范围.

【答案】 (1) 反比例函数解析式为 $y = \frac{4}{x}$ ， $E(2,2)$

(2) $-3 \leq m \leq 0$

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得到 $BC \parallel OA$, $AB \perp OA$, 再由 $D(4,1)$ 是 AB 的中点得到 $B(4,2)$, 从而得到点 E 的纵坐标为 2, 利用待定系数法求出反比例函数解析式, 进而求出点 E 的坐标即可;

(2) 求出直线 $y = x + m$ 恰好经过 D 和恰好经过 E 时 m 的值, 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$$\therefore BC \parallel OA, AB \perp OA,$$

$\because D(4,1)$ 是 AB 的中点,

$$\therefore B(4,2),$$

$\therefore$ 点 E 的纵坐标为 2,

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象分别与 AB, BC 交于点 $D(4,1)$ 和点 E ,

$$\therefore 1 = \frac{k}{4},$$

$$\therefore k = 4,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{4}{x},$$

在 $y = \frac{4}{x}$ 中, 当 $y = \frac{4}{x} = 2$ 时, $x = 2$,

$$\therefore E(2,2);$$

【小问 2 详解】

解: 当直线 $y = x + m$ 经过点 $E(2,2)$ 时, 则 $2 + m = 2$, 解得 $m = 0$;

当直线 $y = x + m$ 经过点 $D(4,1)$ 时, 则 $4 + m = 1$, 解得 $m = -3$;

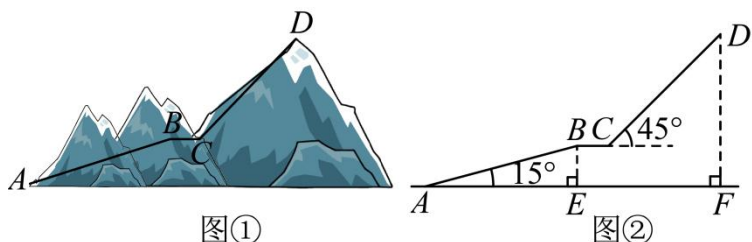
$\therefore$ 一次函数 $y = x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象相交于点 M , 当点 M 在反比例函数图象上 D, E 之间的部分时 (点 M 可与点 D, E 重合),

$$\therefore -3 \leq m \leq 0.$$

【点睛】本题主要考查了求一次函数解析式, 一次函数与反比例函数综合, 矩形的性质等等, 灵活运用所学知识是解题的关键.

22. 贵州旅游资源丰富. 某景区为给游客提供更好的游览体验, 拟在如图①景区内修建观光索道. 设计示意

图如图②所示，以山脚 A 为起点，沿途修建 AB 、 CD 两段长度相等的观光索道，最终到达山顶 D 处，中途设计了一段与 AF 平行的观光平台 BC 为 50m 。索道 AB 与 AF 的夹角为 15° ， CD 与水平线夹角为 45° ， A 、 B 两处的水平距离 AE 为 576m ， $DF \perp AF$ ，垂足为点 F 。（图中所有点都在同一平面内，点 A 、 E 、 F 在同一水平线上）



- (1) 求索道 AB 的长（结果精确到 1m ）；
 (2) 求水平距离 AF 的长（结果精确到 1m ）。

（参考数据： $\sin 15^\circ \approx 0.25$ ， $\cos 15^\circ \approx 0.96$ ， $\tan 15^\circ \approx 0.26$ ， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ）

【答案】(1) 600m

(2) 1049m

【解析】

【分析】(1) 根据 $\angle BAE$ 的余弦直接求解即可得到答案；

(2) 根据 AB 、 CD 两段长度相等及 CD 与水平线夹角为 45° 求出 C 到 DF 的距离即可得到答案；

【小问 1 详解】

解： $\because A$ 、 B 两处的水平距离 AE 为 576m ，索道 AB 与 AF 的夹角为 15° ，

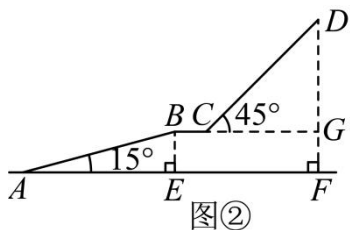
$$\therefore AB = \frac{AE}{\cos 15^\circ} = \frac{576}{0.96} = 600\text{m}；$$

【小问 2 详解】

解： $\because AB$ 、 CD 两段长度相等， CD 与水平线夹角为 45° ，

$$\therefore CD = 600\text{m}，CG = CD \cos 45^\circ = 600 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 600 \times \frac{1.41}{2} = 423\text{m}，$$

$$\therefore AF = AE + BC + CG = 576 + 50 + 423 = 1049\text{m}；$$

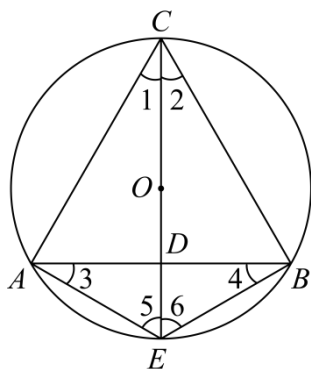


【点睛】本题考查解直角三角形解决实际问题，解题的关键是熟练掌握

几种三角函数。

23. 如图，已知 $\odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆，连接 CO 并延长交 AB 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 E ，连接 EA ，

EB .



(1) 写出图中一个度数为 30° 的角：_____，图中与 $\triangle ACD$ 全等的三角形是_____；

(2) 求证： $\triangle AED \sim \triangle CEB$ ；

(3) 连接 OA ， OB ，判断四边形 $OAEB$ 的形状，并说明理由.

【答案】(1) $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ； $\triangle BCD$ ；

(2) 证明见详解； (3) 四边形 $OAEB$ 是菱形；

【解析】

【分析】(1) 根据外接圆得到 CO 是 $\angle ACB$ 的角平分线，即可得到 30° 的角，根据垂径定理得到 $\angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ ，即可得到答案；

(2) 根据 (1) 得到 $\angle 3 = \angle 2$ ，根据垂径定理得到 $\angle 5 = \angle 6 = 60^\circ$ ，即可得到证明；

(3) 连接 OA ， OB ，结合 $\angle 5 = \angle 6 = 60^\circ$ 得到 $\triangle OAE$ ， $\triangle OBE$ 是等边三角形，从而得到 $OA = OB = AE = EB = r$ ，即可得到证明；

【小问 1 详解】

解： $\because \odot O$ 是等边三角形 ABC 的外接圆，

$\therefore CO$ 是 $\angle ACB$ 的角平分线， $\angle ACB = \angle ABC = \angle CAB = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$ ，

$\because CE$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle CAE = \angle CBE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 30^\circ$ ，

$\therefore 30^\circ$ 的角有： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ，

$\because CO$ 是 $\angle ACB$ 的角平分线，

$\therefore \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ$ ， $\angle 5 = \angle 6 = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

在 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BCD$ 中，

$$\therefore \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ CD = CD \\ \angle ADC = \angle BDC = 90^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCD,$$

故答案为： $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ ， $\triangle BCD$ ；

【小问 2 详解】

证明： $\because \angle 5 = \angle 6$ ， $\angle 3 = \angle 2 = 30^\circ$ ，

$$\therefore \triangle AED \sim \triangle CEB;$$

【小问 3 详解】

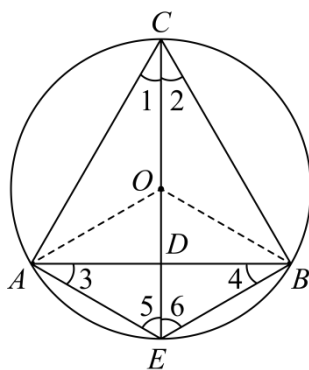
解：连接 OA ， OB ，

$$\because OA = OE = OB = r, \quad \angle 5 = \angle 6 = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAE, \triangle OBE \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore OA = OB = AE = EB = r,$$

$\therefore$ 四边形 $OAEB$ 是菱形.



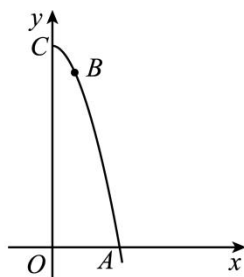
【点睛】本题考查垂径定理，菱形判定，等边三角形的判定和性质，相似三角形

的判定等知识，解题的关键是熟练掌握垂径定理，从而得到相应角的等量关系.

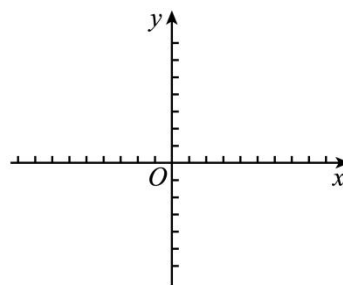
24. 如图①，是一座抛物线型拱桥，小星学习二次函数后，受到该图启示设计了一建筑物造型，它的截面图是抛物线的一部分（如图②所示），抛物线的顶点在 C 处，对称轴 OC 与水平线 OA 垂直， $OC = 9$ ，点 A 在抛物线上，且点 A 到对称轴的距离 $OA = 3$ ，点 B 在抛物线上，点 B 到对称轴的距离是 1.



图①



图②



备用图

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如图②，为更加稳固，小星想在 OC 上找一点 P ，加装拉杆 PA, PB ，同时使拉杆的长度之和最短，

请你帮小星找到点 P 的位置并求出坐标；

(3) 为了造型更加美观，小星重新设计抛物线，其表达式为 $y = -x^2 + 2bx + b - 1 (b > 0)$ ，当 $4 \leq x \leq 6$ 时，函数 y 的值总大于等于 9. 求 b 的取值范围.

【答案】(1) $y = -x^2 + 9$

(2) 点 P 的坐标为 $(0, 6)$

(3) $b \geq \frac{46}{13}$

【解析】

【分析】(1) 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + k$ ，将 $C(0, 9)$ ， $A(3, 0)$ 代入即可求解；

(2) 点 B 关于 y 轴的对称点 B' ，则 $PA + PB = PA + PB' \geq AB'$ ，求出直线 AB' 与 y 轴的交点坐标即可；

(3) 分 $0 < b \leq 5$ 和 $b > 5$ 两种情况，根据最小值大于等于 9 列不等式，即可求解.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线的对称轴与 y 轴重合，

∴ 设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + k$ ，

∵ $OC = 9$ ， $OA = 3$ ，

∴ $C(0, 9)$ ， $A(3, 0)$ ，

将 $C(0, 9)$ ， $A(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + k$ ，得：

$$\begin{cases} k = 9 \\ 3^2 \cdot a + k = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 9 \\ a = -1 \end{cases}$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 9$ ；

【小问 2 详解】

解：∵ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 9$ ，点 B 到对称轴的距离是 1，

当 $x = 1$ 时， $y = -1 + 9 = 8$ ，

∴ $B(1, 8)$ ，

作点 B 关于 y 轴的对称点 B' ，

则 $B'(-1, 8)$, $B'P = BP$,

$\therefore PA + PB = PA + PB' \geq AB'$,

$\therefore$ 当 B' , B , A 共线时, 拉杆 PA, PB 长度之和最短,

设直线 AB' 的解析式为 $y = mx + n$,

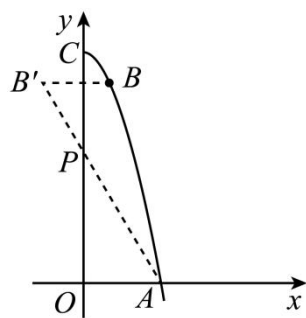
将 $B'(-1, 8)$, $A(3, 0)$ 代入, 得 $\begin{cases} 0 = 3m + n \\ 8 = -m + n \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} m = -2 \\ n = 6 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AB' 的解析式为 $y = -2x + 6$,

当 $x = 0$ 时, $y = 6$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(0, 6)$, 位置如下图所示:



【小问 3 详解】

解: $\because y = -x^2 + 2bx + b - 1 (b > 0)$ 中 $a = -1 < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

当 $0 < b \leq 5$ 时,

在 $4 \leq x \leq 6$ 范围内, 当 $x = 6$ 时, y 取最小值, 最小值为: $-6^2 + 2 \times 6b + b - 1 = 13b - 37$

则 $13b - 37 \geq 9$,

解得 $b \geq \frac{46}{13}$,

$\therefore \frac{46}{13} \leq b \leq 5$;

当 $b > 5$ 时,

在 $4 \leq x \leq 6$ 范围内, 当 $x = 4$ 时, y 取最小值, 最小值为: $-4^2 + 2 \times 4b + b - 1 = 9b - 17$

则 $9b - 17 \geq 9$,

解得 $b \geq \frac{26}{9}$,

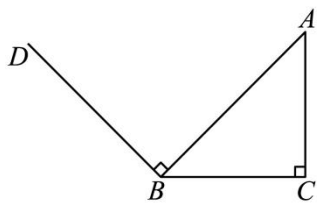
$\therefore b > 5$;

综上所述, $\frac{46}{13} \leq b \leq 5$ 或 $b > 5$,

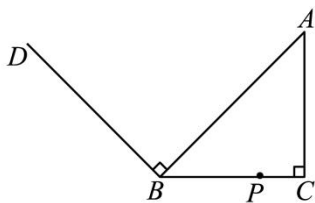
$\therefore b$ 的取值范围为 $b \geq \frac{46}{13}$.

【点睛】 本题考查二次函数的实际应用, 涉及求二次函数解析式, 求一次函数解析式, 根据对称性求线段的最值, 抛物线的增减性等知识点, 解题的关键是熟练掌握二次函数的图象和性质, 第3问注意分情况讨论.

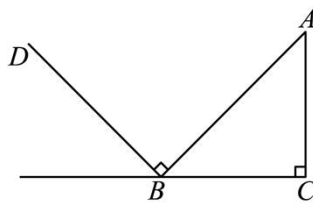
25. 如图①, 小红在学习了三角形相关知识后, 对等腰直角三角形进行了探究, 在等腰直角三角形 ABC 中, $CA = CB, \angle C = 90^\circ$, 过点 B 作射线 $BD \perp AB$, 垂足为 B , 点 P 在 CB 上.



图①



图②



图③

(1) 【动手操作】

如图②, 若点 P 在线段 CB 上, 画出射线 PA , 并将射线 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 与 BD 交于点 E , 根据题意在图中画出图形, 图中 $\angle PBE$ 的度数为_____度;

(2) 【问题探究】

根据 (1) 所画图形, 探究线段 PA 与 PE 的数量关系, 并说明理由;

(3) 【拓展延伸】

如图③, 若点 P 在射线 CB 上移动, 将射线 PA 绕点 P 逆时针旋转 90° 与 BD 交于点 E , 探究线段 BA, BP, BE 之间的数量关系, 并说明理由.

【答案】 (1) 作图见解析; 135

(2) $PA = PE$; 理由见解析

(3) $BA - BE = \sqrt{2}BP$ 或 $BE = BA + \sqrt{2}BP$; 理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据题意画图即可; 先求出 $\angle ABC = \angle BAC = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ$, 根据 $\angle ABD = 90^\circ$, 求出 $\angle CBE = \angle ABC + \angle ABE = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$;

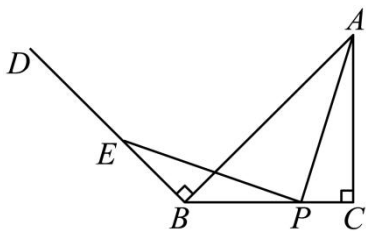
(2) 根据 $\angle APE = 90^\circ$, $\angle ABE = 90^\circ$, 证明 A, P, B, E 四点共圆, 得出 $\angle AEP = \angle ABP = 45^\circ$, 求出 $\angle AEP = \angle EAP$, 根据等腰三角形的判定即可得出结论;

(3) 分两种情况, 当点 P 在线段 BC 上时, 当点 P 在线段 BC 延长线上时, 分别画出图形, 求出 BA, BP, BE

之间的数量关系即可.

【小问 1 详解】

解：如图所示：



$$\because CA = CB, \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$$\because BD \perp AB,$$

$$\therefore \angle ABD = 90^\circ,$$

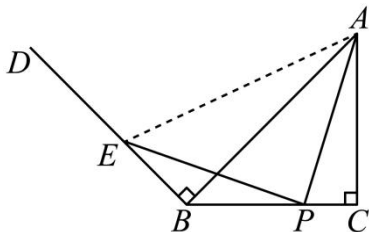
$$\therefore \angle CBE = \angle ABC + \angle ABE = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ;$$

故答案为：135.

【小问 2 详解】

解： $PA = PE$ ；理由如下：

连接 AE ，如图所示：



根据旋转可知， $\angle APE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

$\therefore A、P、B、E$ 四点共圆，

$$\therefore \angle AEP = \angle ABP = 45^\circ,$$

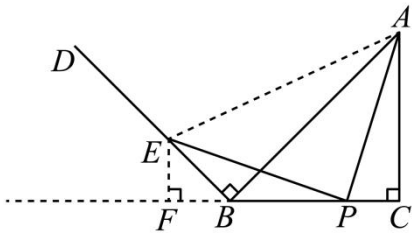
$$\therefore \angle EAP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP = \angle EAP,$$

$$\therefore PA = PE.$$

【小问 3 详解】

解：当点 P 在线段 BC 上时，连接 AE ，延长 CB ，作 $EF \perp CB$ 于点 F ，如图所示：



根据解析 (2) 可知, $PA = PE$,

$$\therefore \angle EFP = \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF + \angle PEF = \angle EPF + \angle APC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle APC,$$

$$\therefore \angle EFP = \angle ACP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PEF \cong \triangle APC,$$

$$\therefore EF = PC,$$

$$\therefore \angle EBF = 180^\circ - \angle CBE = 45^\circ, \quad \angle EFB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle EBF$ 为等腰直角三角形,

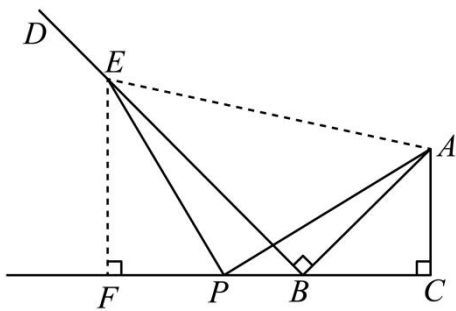
$$\therefore BE = \sqrt{2}EF,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BA = \sqrt{2}BC = \sqrt{2}(BP + PC) = \sqrt{2}BP + \sqrt{2}PC = \sqrt{2}BP + \sqrt{2}EF = \sqrt{2}BP + BE,$$

$$\text{即 } BA - BE = \sqrt{2}BP;$$

当点 P 在线段 BC 延长线上时, 连接 AE , 作 $EF \perp CB$ 于点 F , 如图所示:



根据旋转可知, $\angle APE = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABE = 90^\circ,$$

$\therefore A, B, P, E$ 四点共圆,

$$\therefore \angle EAP = \angle EBP = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEP = \angle EAP,$$

$$\therefore PA = PE,$$

$$\because \angle EFP = \angle APE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPF + \angle PEF = \angle EPF + \angle APC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PEF = \angle APC,$$

$$\because \angle EFP = \angle ACP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle PEF \cong \triangle APC,$$

$$\therefore PF = AC,$$

$$\because BC = AC,$$

$$\therefore PF = BC,$$

$$\because \angle EBF = 45^\circ, \angle EFB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle EBF$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore BE = \sqrt{2}BF = \sqrt{2}(PF + BP) = \sqrt{2}(BC + BP),$$

$$\text{即 } BE = BA + \sqrt{2}BP;$$

综上分析可知, $BA - BE = \sqrt{2}BP$ 或 $BE = BA + \sqrt{2}BP$.

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的判定和性质, 三角形全等的判定和性质, 圆周角定理, 四点共圆, 等腰直角三角形的性质, 解题的关键是作出图形和相关的辅助线, 数形结合, 并注意分类讨论.

