

数学试题

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的。

1. 下列实数中，最大的数是 ()

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】D

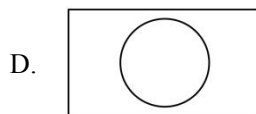
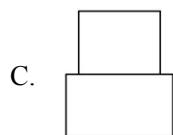
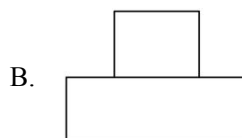
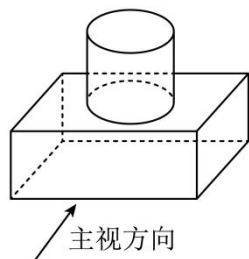
【解析】

【分析】有理数比较大小的法则：正数大于负数，正数大于 0，两个负数中绝对值大的反而小，据此判断即可。

【详解】解：正数大于 0，正数大于负数，且 $2 > 1$ ，所以 -1、0、1、2 中最大的实数是 2。
故选：D

【点睛】本题主要考查了有理数比较大小，熟练掌握其方法是解题的关键。

2. 下图是由一个长方体和一个圆柱组成的几何体，它的俯视图是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据从上面看得到的图形是俯视图即可解答。

【详解】解：从上面看下边是一个矩形，矩形的上边是一个圆，
故选：D。

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，掌握从上面看得到的图形是俯视图是解答本题的关键。

3. 若某三角形的三边长分别为 3, 4, m ，则 m 的值可以是 ()

A. 1

B. 5

C. 7

D. 9

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形的三边关系求解即可.

【详解】解：由题意，得 $4-3 < m < 4+3$ ，即 $1 < m < 7$ ，故 m 的值可选 5，

故选：B.

【点睛】本题考查了三角形的三边关系，熟练掌握三角形的三边关系是解答的关键.

4. 党的二十大报告指出，我国建成世界上规模最大的教育体系、社会保障体系、医疗卫生体系，教育普及水平实现历史性跨越，基本养老保险覆盖十亿四千万人，基本医疗保险参保率稳定在百分之九十五、将数据 1040000000 用科学记数法表示为（ ）

A. 104×10^7 B. 10.4×10^8 C. 1.04×10^9 D. 0.104×10^{10}

【答案】C

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解： $1040000000 = 1.04 \times 10^9$ ，

故选：C.

【点睛】此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

5. 下列计算正确的是（ ）

A. $(a^2)^3 = a^6$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$ C. $a^3 \cdot a^4 = a^{12}$ D. $a^2 - a = a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据幂的乘方法、同底数幂的除法法则、同底数幂的乘法以及合并同类项逐项判断即可.

【详解】解：A. $(a^2)^3 = a^{2 \times 3} = a^6$ ，故 A 选项计算正确，符合题意；B. $a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$ ，故 B 选项计算错误，不合题意；C. $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$ ，故 C 选项计算错误，不合题意；

D. a^2 与 $-a$ 不是同类项，所以不能合并，故 D 选项计算错误，不合题意.

故选：A.

【点睛】本题主要考查同底数幂的乘除运算、幂的乘方运算以及整式的加减运算等知识点，同底数幂相乘，底数不变，指数相加；同底数幂相除，底数不变，指数相减；幂的乘方，底数不变，指数相乘.

6. 根据福建省统计局数据，福建省 2020 年的地区生产总值为 43903.89 亿元，2022 年的地区生产总值为 53109.85 亿元. 设这两年福建省地区生产总值的年平均增长率为 x ，根据题意可列方程 ()

A. $43903.89(1+x) = 53109.85$

B. $43903.89(1+x)^2 = 53109.85$

C. $43903.89x^2 = 53109.85$

D. $43903.89(1+x^2) = 53109.85$

【答案】B

【解析】

【分析】设这两年福建省地区生产总值的年平均增长率为 x ，根据题意列出一元二次方程即可求解.

【详解】设这两年福建省地区生产总值的年平均增长率为 x ，根据题意可列方程

$$43903.89(1+x)^2 = 53109.85,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键.

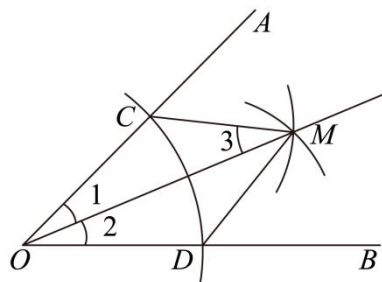
7. 阅读以下作图步骤：

①在 OA 和 OB 上分别截取 OC, OD ，使 $OC = OD$ ；

②分别以 C, D 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}CD$ 的长为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 M ；

③作射线 OM ，连接 CM, DM ，如图所示.

根据以上作图，一定可以推得的结论是 ()



A. $\angle 1 = \angle 2$ 且 $CM = DM$

B. $\angle 1 = \angle 3$ 且 $CM = DM$

C. $\angle 1 = \angle 2$ 且 $OD = DM$

D. $\angle 2 = \angle 3$ 且 $OD = DM$

【答案】A

【解析】

【分析】由作图过程可得： $OD = OC, CM = DM$ ，再结合 $DM = DM$ 可得 $\triangle COM \cong \triangle DOM$ (SSS)，由全等三角形的性质可得 $\angle 1 = \angle 2$ 即可解答.

【详解】解：由作图过程可得： $OD = OC, CM = DM$ ，

$\therefore DM = DM$ ，

$\therefore \triangle COM \cong \triangle DOM$ (SSS).

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\therefore$ A 选项符合题意；

不能确定 $OC = CM$ ，则 $\angle 1 = \angle 3$ 不一定成立，故 B 选项不符合题意；

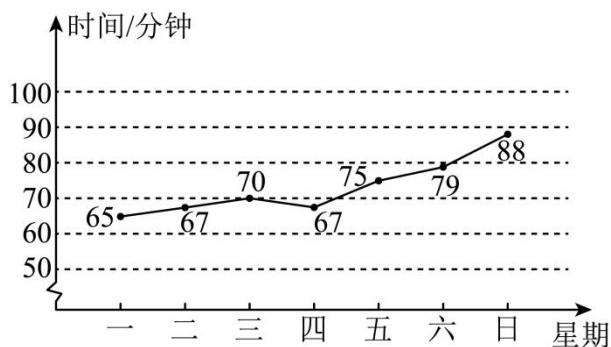
不能确定 $OD = DM$ ，故 C 选项不符合题意，

$OD \parallel CM$ 不一定成立，则 $\angle 2 = \angle 3$ 不一定成立，故 D 选项不符合题意.

故选 A.

【点睛】本题主要考查了角平分线的尺规作图、全等三角形的判定与性质等知识点，理解尺规作图过程是解答本题的关键.

8. 为贯彻落实教育部办公厅关于“保障学生每天校内、校外各 1 小时体育活动时间”的要求，学校要求学生每天坚持体育锻炼. 小亮记录了自己一周内每天校外锻炼的时间（单位：分钟），并制作了如图所示的统计图.



根据统计图，下列关于小亮该周每天校外锻炼时间的描述，正确的是（ ）

- A. 平均数为 70 分钟 B. 众数为 67 分钟 C. 中位数为 67 分钟 D. 方差为 0

【答案】B

【解析】

【分析】分别求出平均数、众数、中位数、方差，即可进行判断.

【详解】解：A. 平均数为 $\frac{65 + 67 \times 2 + 70 + 75 + 79 + 88}{7} = 73$ （分钟），故选项错误，不符合题意；

B. 在 7 个数据中，67 出现的次数最多，为 2 次，则众数为 67 分钟，故选项正确，符合题意；

C. 7 个数按照从小到大排列为：65, 67, 67, 70, 75, 79, 88，中位数是 70 分钟，故选项错误，不符合题意；

D. 平均数为 $\frac{65+67 \times 2+70+75+79+88}{7} = 73$ ，

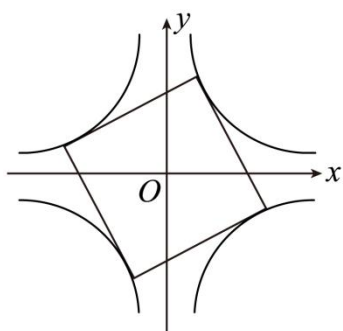
方差为 $\frac{(65-73)^2 + (67-73)^2 \times 2 + (70-73)^2 + (75-73)^2 + (79-73)^2 + (88-73)^2}{7} = \frac{410}{7}$ ，故选项错误，

不符合题意.

故选：B.

【点睛】此题考查了平均数、众数、中位数、方差，熟练掌握各量的求解方法是解题的关键.

9. 如图，正方形四个顶点分别位于两个反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 和 $y = \frac{n}{x}$ 的图象的四个分支上，则实数 n 的值为 ()



A. -3

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

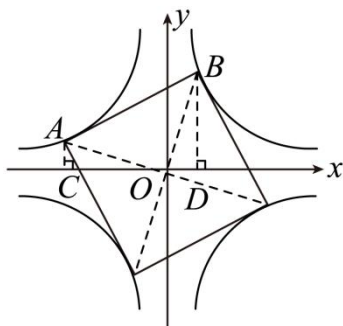
D. 3

【答案】A

【解析】

【分析】如图所示，点 B 在 $y = \frac{3}{x}$ 上，证明 $\triangle AOC \cong \triangle OBD$ ，根据 k 的几何意义即可求解.

【详解】解：如图所示，连接正方形的对角线，过点 A, B 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 C, D ，点 B 在 $y = \frac{3}{x}$ 上，



$\therefore OB = OA$ ， $\angle AOB = \angle BDO = \angle ACO = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAO = 90^\circ - \angle AOC = \angle BOD$.

$\therefore \triangle AOC \cong \triangle OBD$.

$$\therefore S_{\triangle AOC} = S_{\triangle OBD} = \frac{3}{2} = \frac{|n|}{2}.$$

$\therefore$ A 点在第二象限,

$$\therefore n = -3.$$

故选: A.

【点睛】本题考查了正方形的性质, 反比例函数的 k 的几何意义, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

10. 我国魏晋时期数学家刘徽在《九章算术注》中提到了著名的“割圆术”, 即利用圆的内接正多边形逼近圆的方法来近似估算, 指出“割之弥细, 所失弥少. 割之又割, 以至于不可割, 则与圆周合体, 而无所失矣”. “割圆术”孕育了微积分思想, 他用这种思想得到了圆周率 π 的近似值为 3.1416. 如图, $\odot O$ 的半径为 1, 运用“割圆术”, 以圆内接正六边形面积近似估计 $\odot O$ 的面积, 可得 π 的估计值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 若用圆内接正十二边形作近似估计, 可得 π 的估计值为 ()



A. $\sqrt{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. 3

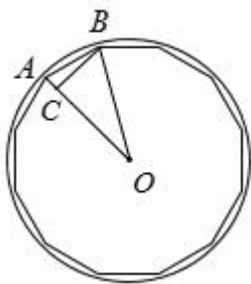
D. $2\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据圆内接正多边形的性质可得 $\angle AOB = 30^\circ$, 根据 30 度的作对的直角边是斜边的一半可得 $BC = \frac{1}{2}$, 根据三角形的面积公式即可求得正十二边形的面积, 即可求解.

【详解】解: 圆的内接正十二边形的面积可以看成 12 个全等的等腰三角形组成, 故等腰三角形的顶角为 30° , 设圆的半径为 1, 如图为其中一个等腰三角形 OAB , 过点 B 作 $BC \perp OA$ 交 OA 于点 C ,



$$\therefore \angle AOB = 30^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2},$$

$$\text{则 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{故正十二边形的面积为 } 12S_{\triangle OAB} = 12 \times \frac{1}{4} = 3,$$

$$\text{圆的面积为 } \pi \times 1 \times 1 = \pi,$$

用圆内接正十二边形面积近似估计 $\odot O$ 的面积可得 $\pi = 3$,

故选：C.

【点睛】本题考查了圆内接正多边形的性质，30度的作对的直角边是斜边的一半，三角形的面积公式，圆的面积公式等，正确求出正十二边形的面积是解题的关键.

二、填空题：本题共6小题，每小题4分，共24分.

11. 某仓库记账员为方便记账，将进货10件记作+10，那么出货5件应记作_____.

【答案】-5

【解析】

【分析】在一对具有相反意义的量中，先规定其中一个为正，则另一个就用负表示.

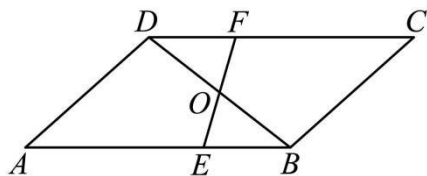
【详解】解： $\because$ “正”和“负”相对，

$\therefore$ 进货10件记作+10，那么出货5件应记作-5.

故答案为：-5.

【点睛】本题主要考查了正数和负数，理解“正”和“负”的相对性，确定一对具有相反意义的量是解题关键.

12. 如图，在 $ABCD$ 中， O 为 BD 的中点， EF 过点 O 且分别交 AB, CD 于点 E, F . 若 $AE = 10$ ，则 CF 的长为_____.



【答案】10

【解析】

【分析】由平行四边形的性质可得 $DC \parallel AB, DC = AB$ 即 $\angle OFD = \angle OEB, \angle ODF = \angle EBO$ ，再结合 $OD = OB$ 可得 $\triangle DOF \cong \triangle BOE$ (AAS) 可得 $DF = EB$ ，最进一步说明 $FC = AE = 10$ 即可解答.

【详解】解： $\because$ $ABCD$ 中，

$\therefore DC \parallel AB, DC = AB$,

$$\therefore \angle OFD = \angle OEB, \angle ODF = \angle EBO,$$

$$\therefore OD = OB,$$

$$\therefore \triangle DOF \cong \triangle BOE (\text{AAS}),$$

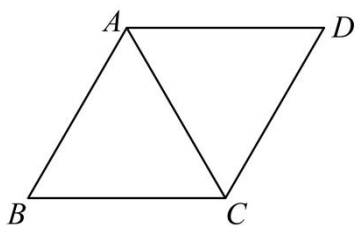
$$\therefore DF = EB,$$

$$\therefore DC - DF = AB - BE, \text{即 } FC = AE = 10.$$

故答案为：10.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质等知识点，证明三角形全等是解答本题的关键.

13. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AB = 10$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，则 AC 的长为_____.



【答案】10

【解析】

【分析】由菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ，易证得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质即可得解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BC = 10,$$

$$\therefore \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是等边三角形},$$

$$\therefore AC = 10.$$

故答案为：10.

【点睛】本题考查了菱形的性质，等边三角形的判定与性质，熟记菱形的性质并推出等边三角形是解题的关键.

14. 某公司欲招聘一名职员，对甲、乙、丙三名应聘者进行了综合知识、工作经验、语言表达等三方面的测试，他们的各项成绩如下表所示：

项目 应聘者	综合知识	工作经验	语言表达
甲	75	80	80

乙	85	80	70
丙	70	78	70

如果将每位应聘者的综合知识、工作经验、语言表达的成绩按5:2:3的比例计算其总成绩，并录用总成绩最高的应聘者，则被录用的是_____.

【答案】乙

【解析】

【分析】分别计算甲、乙、丙三名应聘者的成绩的加权平均数，比较大小即可求解.

【详解】解： $\bar{x}_{\text{甲}} = 75 \times \frac{5}{10} + 80 \times \frac{2}{10} + 80 \times \frac{3}{10} = 77.5$,

$$\bar{x}_{\text{乙}} = 85 \times \frac{5}{10} + 80 \times \frac{2}{10} + 70 \times \frac{3}{10} = 79.5 ,$$

$$\bar{x}_{\text{丙}} = 70 \times \frac{5}{10} + 78 \times \frac{2}{10} + 70 \times \frac{3}{10} = 71.6 ,$$

$$\therefore 71.6 < 77.5 < 79.5$$

$\therefore$ 被录用的是乙，

故答案为：乙.

【点睛】本题考查了加权平均数，熟练掌握加权平均数的计算方法是解题的关键.

15. 已知 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ ，且 $a \neq -b$ ，则 $\frac{ab-a}{a+b}$ 的值为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ 可得 $b+2a=ab$ ，即 $ab-a=b+a$ ，然后将 $ab-a=b+a$ 整体代入 $\frac{ab-a}{a+b}$ 计算即可.

【详解】解： $\because \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$

$$\therefore \frac{b+2a}{ab} = 1 ,$$

$$\therefore b+2a=ab , \text{ 即 } ab-a=b+a .$$

$$\therefore \frac{ab-a}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1 .$$

【点睛】本题主要考查了分式的加减运算，根据分式的加减运算法则得到 $ab-a=b+a$ 是解答本题的关键.

16. 已知抛物线 $y = ax^2 - 2ax + b (a > 0)$ 经过 $A(2n+3, y_1)$, $B(n-1, y_2)$ 两点，若 A, B 分别位于抛物线对称轴的两侧，且 $y_1 < y_2$ ，则 n 的取值范围是_____.

【答案】 $-1 < n < 0$

【解析】

【分析】 根据题意，可得抛物线对称轴为直线 $x = 1$ ，开口向上，根据已知条件得出点 A 在对称轴的右侧，且 $y_1 < y_2$ ，进而得出不等式，解不等式即可求解。

【详解】 解： $\because y = ax^2 - 2ax + b, a > 0$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$ ，开口向上，

$\therefore A(2n+3, y_1), B(n-1, y_2)$ 分别位于抛物线对称轴的两侧，

假设点 B 在对称轴的右侧，则 $n-1 > 1$ ，解得 $n > 2$ ，

$$\therefore 2n+3-(n-1) = n+4 > 0$$

$\therefore$ A 点在 B 点的右侧，与假设矛盾，则点 A 在对称轴的右侧，

$$\therefore \begin{cases} 2n+3 > 1 \\ n-1 < 1 \end{cases}$$

解得： $-1 < n < 2$

又 $\because y_1 < y_2$ ，

$$\therefore |(2n+3)-1| < |1-(n-1)|$$

$$\therefore 2n+2 < 2-n.$$

解得： $n < 0$

$$\therefore -1 < n < 0,$$

故答案为： $-1 < n < 0$ 。

【点睛】 本题考查了二次函数的性质，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键。

三、解答题： 本题共 9 小题， 共 86 分。 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 计算： $\sqrt{9} - 2^0 + |-1|$ 。

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据算术平方根，绝对值，零指数幂，有理数的混合运算法则计算即可。

【详解】 解： 原式 $= 3 - 1 + 1$

$$= 3.$$

【点睛】 本题考查了算术平方根，绝对值，零指数幂，有理数的混合运算，熟练掌握以上运算法则是解题

的关键.

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x+1 < 3, ① \\ \frac{x}{2} + \frac{1-3x}{4} \leq 1. ② \end{cases}$$

【答案】 $-3 \leq x < 1$

【解析】

【分析】 分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

【详解】 解:
$$\begin{cases} 2x+1 < 3, ① \\ \frac{x}{2} + \frac{1-3x}{4} \leq 1. ② \end{cases}$$

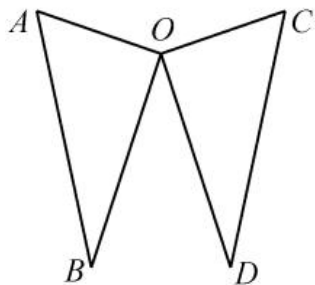
解不等式①，得 $x < 1$.

解不等式②，得 $x \geq -3$.

所以原不等式组的解集为 $-3 \leq x < 1$.

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组，正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

19. 如图, $OA = OC, OB = OD, \angle AOD = \angle COB$. 求证: $AB = CD$.



【答案】 见解析

【解析】

【分析】 根据已知条件得出 $\angle AOB = \angle COD$ ，进而证明 $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ，根据全等三角形的性质即可得证.

【详解】 证明: $\because \angle AOD = \angle COB$,

$$\therefore \angle AOD - \angle BOD = \angle COB - \angle BOD,$$

即 $\angle AOB = \angle COD$.

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中,

$$\begin{cases} OA = OC, \\ \angle AOB = \angle COD, \\ OB = OD, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$$

$$\therefore AB = CD.$$

【点睛】本小题考查等式的基本性质、全等三角形的判定与性质等基础知识，考查几何直观、推理能力等，掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

20. 先化简，再求值： $\left(1 - \frac{x+1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-x}$ ，其中 $x = \sqrt{2} - 1$.

【答案】 $-\frac{1}{x+1}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】

【分析】先根据分式的混合运算法则化简，然后再将 $x = \sqrt{2} - 1$ 代入计算即可解答.

【详解】解： $\left(1 - \frac{x+1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-x}$

$$= \left(1 - \frac{x+1}{x}\right) \cdot \frac{x^2-x}{x^2-1}$$

$$= \frac{x-(x+1)}{x} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1}$$

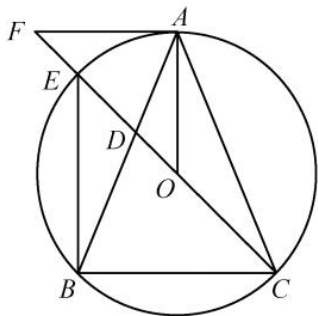
$$= -\frac{1}{x+1}.$$

当 $x = \sqrt{2} - 1$ 时，

$$\text{原式} = -\frac{1}{\sqrt{2}-1+1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【点睛】本题主要考查了分式的基本性质及其运算、分母有理化，正确的化简分式是解答本题的关键.

21. 如图，已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， CO 的延长线交 AB 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 E ，交 $\odot O$ 的切线 AF 于点 F ，且 $AF \parallel BC$.



- (1) 求证: $AO \parallel BE$;
(2) 求证: AO 平分 $\angle BAC$.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由切线的性质可得 $\angle OAF = 90^\circ$ ，由圆周角定理可得 $\angle CBE = 90^\circ$ ，即 $\angle OAF = \angle CBE = 90^\circ$ ，再根据平行线的性质可得 $\angle BAF = \angle ABC$ ，则根据角的和差可得 $\angle OAB = \angle ABE$ ，最后根据平行线的判定定理即可解答；

(2) 由圆周角定理可得 $\angle ABE = \angle ACE$ ，再由等腰三角形的性质可得 $\angle ACE = \angle OAC$ ，进而得到 $\angle ABE = \angle OAC$ ，再结合 $\angle OAB = \angle ABE$ 得到 $\angle OAB = \angle OAC$ 即可证明结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because AF$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore AF \perp OA, \text{ 即 } \angle OAF = 90^\circ.$$

$\because CE$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle CBE = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle OAF = \angle CBE = 90^\circ.$$

$$\because AF \parallel BC,$$

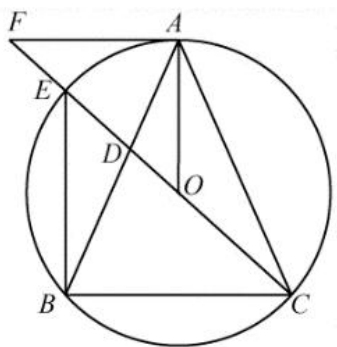
$$\therefore \angle BAF = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle OAF - \angle BAF = \angle CBE - \angle ABC, \text{ 即 } \angle OAB = \angle ABE,$$

$$\therefore AO \parallel BE.$$

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ABE$ 与 $\angle ACE$ 都是 AE 所对的圆周角,



$$\therefore \angle ABE = \angle ACE.$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle OAC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle OAC.$$

由 (1) 知 $\angle OAB = \angle ABE$,

$$\therefore \angle OAB = \angle OAC,$$

$\therefore AO$ 平分 $\angle BAC$.

【点睛】本题主要考查角平分线、平行线的判定与性质、圆周角定理、切线的性质等知识点，灵活运用相关性质定理是解答本题的关键.

22. 为促进消费，助力经济发展，某商场决定“让利酬宾”，于“五一”期间举办了抽奖促销活动. 活动规定：凡在商场消费一定金额的顾客，均可获得一次抽奖机会. 抽奖方案如下：从装有大小质地完全相同的 1 个红球及编号为①②③的 3 个黄球的袋中，随机摸出 1 个球，若摸得红球，则中奖，可获得奖品；若摸得黄球，则不中奖. 同时，还允许未中奖的顾客将其摸得的球放回袋中，并再往袋中加入 1 个红球或黄球（它们的大小质地与袋中的 4 个球完全相同），然后从中随机摸出 1 个球，记下颜色后不放回，再从中随机摸出 1 个球，若摸得的两球的颜色相同，则该顾客可获得精美礼品一份. 现已知某顾客获得抽奖机会.

(1) 求该顾客首次摸球中奖的概率;

(2) 假如该顾客首次摸球未中奖，为了有更大机会获得精美礼品，他应往袋中加入哪种颜色的球？说明你的理由

【答案】 (1) $\frac{1}{4}$

(2) 应往袋中加入黄球, 见解析

【解析】

【分析】(1) 直接由概率公式求解即可;

(2) 根据列表法求分别求得加入黄球和红球的概率即可求解.

【小问 1 详解】

解：顾客首次摸球的所有可能结果为红，黄①，黄②，黄③，共 4 种等可能的结果.

记“首次摸得红球”为事件 A，则事件 A 发生的结果只有 1 种，

所以 $P(A) = \frac{1}{4}$ ，所以顾客首次摸球中奖的概率为 $\frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

他应往袋中加入黄球.

理由如下：

记往袋中加入的球为“新”，摸得的两球所有可能的结果列表如下：

第二球 第一球	红	黄①	黄②	黄③	新
红		红，黄①	红，黄②	红，黄③	红，新
黄①	黄①，红		黄①，黄②	黄①，黄③	黄①，新
黄②	黄②，红	黄②，黄①		黄②，黄③	黄②，新
黄③	黄③，红	黄③，黄①	黄③，黄②		黄③，新
新	新，红	新，黄①	新，黄②	新，黄③	

共有 20 种等可能结果.

(i) 若往袋中加入的是红球，两球颜色相同的结果共有 8 种，此时该顾客获得精美礼品的概率 $P_1 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ ；

(ii) 若往袋中加入的是黄球，两球颜色相同的结果共有 12 种，此时该顾客获得精美礼品的概率

$$P_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}；$$

因为 $\frac{2}{5} < \frac{3}{5}$ ，所以 $P_1 < P_2$ ，所作他应往袋中加入黄球.

【点睛】本小题考查简单随机事件的概率等基础知识，考查抽象能力、运算能力、推理能力、应用意识、创新意识等，考查统计与概率思想、模型观念，熟练掌握概率公式是解题的关键.

23. 阅读下列材料，回答问题

任务：测量一个扁平状的小水池的最大宽度，该水池东西走向的最大宽度 AB 远大于南北走向的最大宽度，如图 1.

工具：一把皮尺（测量长度略小于 AB ）和一台测角仪，如图 2. 皮尺的功能是直接测量任意可到达的两点间的距离（这两点间的距离不大于皮尺的测量长度）；

测角仪的功能是测量角的大小，即在任一点 O 处，对其视线可及的 P ， Q 两点，可测得 $\angle POQ$ 的大小，如图 3.



图1



图2

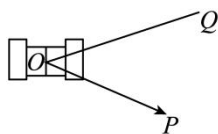


图3

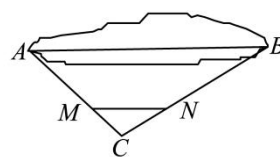


图4

小明利用皮尺测量，求出了小水池的最大宽度 AB ，其测量及求解过程如下：测量过程：

(i) 在小水池外选点 C ，如图 4，测得 $AC = am$ ， $BC = bm$ ；

(ii) 分别在 AC ， BC ，上测得 $CM = \frac{a}{3}m$ ， $CN = \frac{b}{3}m$ ；测得 $MN = cm$ 。求解过程：

由测量知， $AC = a$ ， $BC = b$ ， $CM = \frac{a}{3}$ ， $CN = \frac{b}{3}$ ，

$$\therefore \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{3}, \text{ 又 } \because \text{①} \underline{\hspace{2cm}},$$

$$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB, \therefore \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又 } \because MN = c, \therefore AB = \text{②} \underline{\hspace{2cm}} (m).$$

故小水池的最大宽度为 $\underline{\hspace{2cm}}$ m.

(1) 补全小明求解过程中①②所缺的内容；

(2) 小明求得 AB 用到的几何知识是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；

(3) 小明仅利用皮尺，通过 5 次测量，求得 AB 。请你同时利用皮尺和测角仪，通过测量长度、角度等几何量，并利用解直角三角形的知识求小水池的最大宽度 AB ，写出你的测量及求解过程。要求：测量得到的长度用字母 a ， b ， c 表示，角度用 α ， β ， γ 表示；测量次数不超过 4 次（测量的几何量能求出 AB ，且测量的次数最少，才能得满分）。

【答案】(1) ① $\angle C = \angle C$ ；② $3c$

(2) 相似三角形的判定与性质

(3) 最大宽度为 $\left(a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta} \right) m$ ，见解析

【解析】

【分析】(1) 根据相似三角形的判定和性质求解即可；

(2) 根据相似三角形的判定和性质进行回答即可；

(3) 测量过程：在小水池外选点 C ，用测角仪在点 B 处测得 $\angle ABC = \alpha$ ，在点 A 处测得 $\angle BAC = \beta$ ；用

皮尺测得 $BC = am$;

求解过程：过点 C 作 $CD \perp AB$ ，垂足为 D ，根据锐角三角函数的定义推得 $BD = a \cos \alpha$ ， $CD = a \sin \alpha$ ，

$AD = \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta}$ ，根据 $AB = BD + AD$ ，即可求得.

【小问 1 详解】

$$\because AC = a, \quad BC = b, \quad CM = \frac{a}{3}, \quad CN = \frac{b}{3},$$

$$\therefore \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{1}{3},$$

又 $\because \angle C = \angle C$,

$$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \frac{MN}{AB} = \frac{1}{3}.$$

又 $\because MN = c$,

$$\therefore AB = 3c(\text{m}).$$

故小水池的最大宽度为 $3c \text{ m}$.

【小问 2 详解】

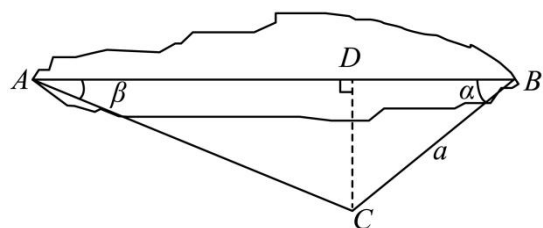
根据相似三角形的判定和性质求得 $AB = 3MN = 3c$,

故答案为：相似三角形的判定与性质.

【小问 3 详解】

测量过程：

(i) 在小水池外选点 C ，如图，用测角仪在点 B 处测得 $\angle ABC = \alpha$ ，在点 A 处测得 $\angle BAC = \beta$ ；



(ii) 用皮尺测得 $BC = am$.

求解过程：

由测量知，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = \alpha$ ， $\angle BAC = \beta$ ， $BC = a$.

过点 C 作 $CD \perp AB$ ，垂足为 D .

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中， $\cos \angle CBD = \frac{BD}{BC}$,

即 $\cos \alpha = \frac{BD}{a}$ ，所以 $BD = a \cos \alpha$ 。

同理， $CD = a \sin \alpha$ 。

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\tan \angle CAD = \frac{CD}{AD}$ ，

即 $\tan \beta = \frac{a \sin \alpha}{AD}$ ，所以 $AD = \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta}$ 。

所以 $AB = BD + AD = a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta} (\text{m})$ 。

故小水池的最大宽度为 $\left(a \cos \alpha + \frac{a \sin \alpha}{\tan \beta} \right) \text{m}$ 。

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，解直角三角形的实际应用，根据题意画出几何图形，建立数学模型是解题的关键。

24. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 交 x 轴于 $A(1, 0), B(3, 0)$ 两点， M 为抛物线的顶点， C, D 为抛物线上不与 A, B 重合的相异两点，记 AB 中点为 E ，直线 AD, BC 的交点为 P 。

(1) 求抛物线的函数表达式；

(2) 若 $C(4, 3), D\left(m, -\frac{3}{4}\right)$ ，且 $m < 2$ ，求证： C, D, E 三点共线；

(3) 小明研究发现：无论 C, D 在抛物线上如何运动，只要 C, D, E 三点共线， $\triangle AMP, \triangle MEP, \triangle ABP$ 中必存在面积为定值的三角形。请直接写出其中面积为定值的三角形及其面积，不必说明理由。

【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) 见解析 (3) $\triangle ABP$ 的面积为定值，其面积为 2

【解析】

【分析】(1) 将 $A(1, 0), B(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 3$ ，即可解得；

(2) $A(1, 0), B(3, 0)$ ， AB 中点为 E ，且 $C(4, 3)$ ，可求出过 C, E 两点所在直线的一次函数表达式 $y = \frac{3}{2}x - 3$ ， D 为抛物线上的一点，所以 $D\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ，此点在 $y = \frac{3}{2}x - 3$ ，可证得 C, D, E 三点共线；

(3) 设 C, D' 与 D, C' 分别关于直线 EM 对称，则 P, P' 关于直线 EM 对称，且 $\triangle AMP$ 与 $\triangle AMP'$ 的面积不相等，所以 $\triangle AMP$ 的面积不为定值；如图，当 C, D 分别运动到点 C_1, D_1 的位置，且保持 C_1, D_1, E 三点

共线. 此时 AD_1 与 BC_1 的交点 P_1 到直线 EM 的距离小于 P 到直线 EM 的距离, 所以 $\triangle MEP_1$ 的面积小于

$\triangle MEP$ 的面积, 故 $\triangle MEP$ 的面积不为定值; 故 $\triangle ABP$ 的面积为定值, 由 (2) 求出 $P\left(\frac{7}{3}, -2\right)$, 此时 $\triangle ABP$ 的面积为 2.

【小问 1 详解】

解: 因为抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 经过点 $A(1, 0), B(3, 0)$,

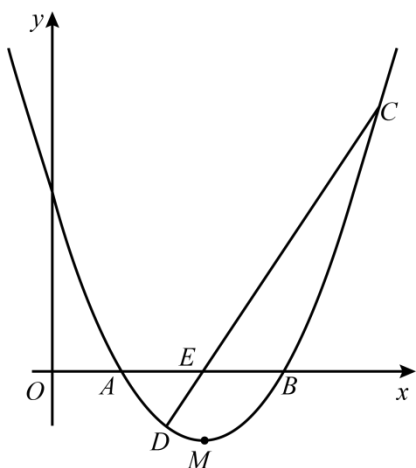
$$\text{所以} \begin{cases} a + b + 3 = 0, \\ 9a + 3b + 3 = 0. \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a = 1, \\ b = -4. \end{cases}$$

所以抛物线的函数表达式为 $y = x^2 - 4x + 3$;

【小问 2 详解】

解:



设直线 CE 对应的函数表达式为 $y = kx + n (k \neq 0)$,

因为 E 为 AB 中点, 所以 $E(2, 0)$.

$$\text{又因为 } C(4, 3), \text{ 所以 } \begin{cases} 4k + n = 3 \\ 2k + n = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ n = -3 \end{cases},$$

所以直线 CE 对应的函数表达式为 $y = \frac{3}{2}x - 3$.

因为点 $D\left(m, -\frac{3}{4}\right)$ 在抛物线上, 所以 $m^2 - 4m + 3 = -\frac{3}{4}$.

解得, $m = \frac{3}{2}$ 或 $m = \frac{5}{2}$.

又因为 $m < 2$, 所以 $m = \frac{3}{2}$.

所以 $D\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

因为 $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{4}$, 即 $D\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ 满足直线 CE 对应的函数表达式, 所以点 D 在直线 CE 上, 即 C, D, E

三点共线;

【小问 3 详解】

解: $\triangle ABP$ 的面积为定值, 其面积为 2.

理由如下: (考生不必写出下列理由)

如图 1, 当 C, D 分别运动到点 C', D' 的位置时, C, D' 与 D, C' 分别关于直线 EM 对称, 此时仍有 C', D', E 三点共线. 设 AD' 与 BC' 的交点为 P' , 则 P, P' 关于直线 EM 对称, 即 $PP' \parallel x$ 轴. 此时, PP' 与 AM 不平行, 且 AM 不平分线段 PP' , 故 P, P' 到直线 AM 的距离不相等, 即在此情形下 $\triangle AMP$ 与 $\triangle AMP'$ 的面积不相等, 所以 $\triangle AMP$ 的面积不为定值.

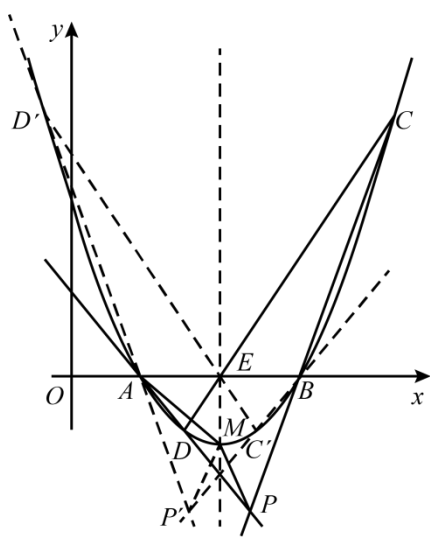


图1

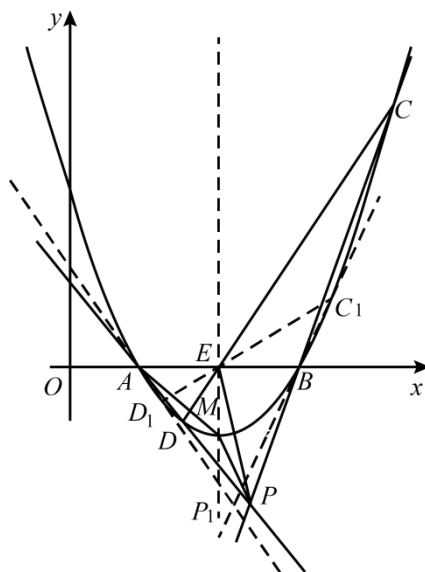


图2

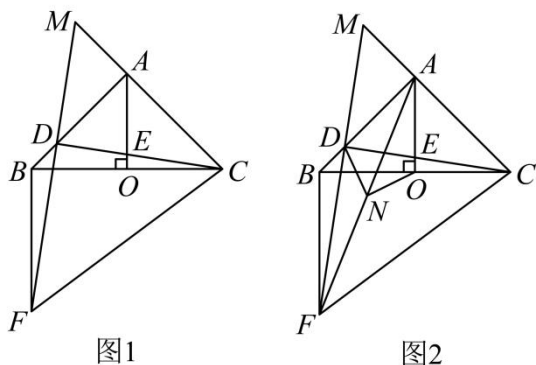
如图 2, 当 C, D 分别运动到点 C_1, D_1 的位置, 且保持 C_1, D_1, E 三点共线. 此时 AD_1 与 BC_1 的交点 P_1 到直线 EM 的距离小于 P 到直线 EM 的距离, 所以 $\triangle MEP_1$ 的面积小于 $\triangle MEP$ 的面积, 故 $\triangle MEP$ 的面积不为定值.

又因为 $\triangle AMP, \triangle MEP, \triangle ABP$ 中存在面积为定值的三角形, 故 $\triangle ABP$ 的面积为定值.

在 (2) 的条件下, 直线 BC 对应的函数表达式为 $y = 3x - 9$, 直线 AD 对应的函数表达式为 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, 求得 $P\left(\frac{7}{3}, -2\right)$, 此时 $\triangle ABP$ 的面积为 2.

【点睛】 本题考查一次函数和二次函数的图象与性质、二元一次方程组、一元二次方程、三角形面积等基础知识, 如何利用数形结合求得点的坐标、函数的表达式等是解题的关键.

25. 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, D 是 AB 边上不与 A, B 重合的一个定点. $AO \perp BC$ 于点 O , 交 CD 于点 E . DF 是由线段 DC 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到的, FD, CA 的延长线相交于点 M .



- (1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle FMC$;
- (2) 求 $\angle ABF$ 的度数;
- (3) 若 N 是 AF 的中点, 如图 2. 求证: $ND = NO$.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\angle ABF = 135^\circ$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 由旋转的性质可得 $\angle DFC = 45^\circ$, 再根据等腰三角形的性质可得 $\angle BAO = \frac{1}{2}\angle BAC$, 再证明 $\angle BAO = \angle DFC$ 、 $\angle EDA = \angle M$, 即可证明结论;

(2) 如图 1: 设 BC 与 DF 的交点为 I , 先证明 $\triangle BID \sim \triangle FIC$ 可得 $\frac{BI}{FI} = \frac{DI}{CI}$, 再证明 $\triangle BIF \sim \triangle DIC$ 可得 $\angle IBF = \angle IDC = 90^\circ$, 最后运用角的和差即可解答;

(3) 如图 2: 延长 ON 交 BF 于点 T , 连接 DT, DO , 先证明 $\triangle TNF \cong \triangle ONA$ 可得 $NT = NO, FT = AO$, 再证 $\triangle BIF \sim \triangle DIC$ 可得 $\angle DFT = \angle DCO$; 进而证明 $\triangle DFT \cong \triangle DCO$ 即 $DT = DO$, 再说明 $\angle ODT = \angle CDF = 90^\circ$ 则根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可解答.

【小问 1 详解】

解： $\because DF$ 是由线段 DC 绕点 D 顺时针旋转 90° 得到的，

$$\therefore \angle DFC = 45^\circ,$$

$$\because AB = AC, AO \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC.$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle ABC = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle BAO = \angle DFC.$$

$$\because \angle EDA + \angle ADM = 90^\circ, \angle M + \angle ADM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDA = \angle M.$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle FMC.$$

【小问 2 详解】

解：如图 1：设 BC 与 DF 的交点为 I ，

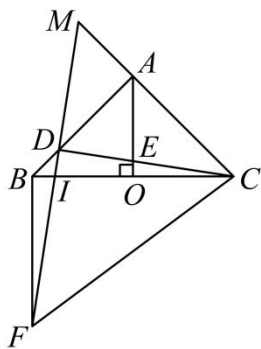


图1

$$\because \angle DBI = \angle CFI = 45^\circ, \angle BID = \angle FIC,$$

$$\therefore \triangle BID \sim \triangle FIC,$$

$$\therefore \frac{BI}{FI} = \frac{DI}{CI},$$

$$\therefore \frac{BI}{DI} = \frac{FI}{CI}.$$

$$\because \angle BIF = \angle DIC,$$

$$\therefore \triangle BIF \sim \triangle DIC,$$

$$\therefore \angle IBF = \angle IDC.$$

$$\text{又} \because \angle IDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle IBF = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ, \angle ABF = \angle ABC + \angle IBF,$$

$$\therefore \angle ABF = 135^\circ.$$

【小问 3 详解】

解：如图 2：延长 ON 交 BF 于点 T ，连接 DT, DO ，

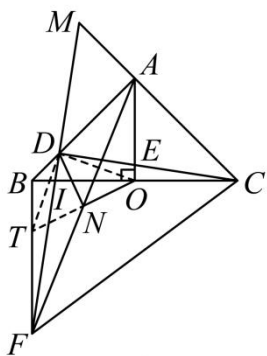


图2

$$\because \angle FBI = \angle BOA = 90^\circ,$$

$$\therefore BF \parallel AO,$$

$$\therefore \angle FTN = \angle AON.$$

$\because N$ 是 AF 的中点,

$$\therefore AN = NF.$$

$$\text{又} \because \angle TNF = \angle ONA,$$

$$\therefore \triangle TNF \cong \triangle ONA,$$

$$\therefore NT = NO, FT = AO.$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC, AO \perp BC,$$

$$\therefore AO = CO,$$

$$\therefore FT = CO.$$

由 (2) 知, $\triangle BIF \sim \triangle DIC$,

$$\therefore \angle DFT = \angle DCO.$$

$$\because DF = DC,$$

$$\therefore \triangle DFT \cong \triangle DCO,$$

$$\therefore DT = DO, \angle FDT = \angle CDO,$$

$$\therefore \angle FDT + \angle FDO = \angle CDO + \angle FDO, \text{ 即 } \angle ODT = \angle CDF.$$

$$\because \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODT = \angle CDF = 90^\circ,$$

$$\therefore ND = \frac{1}{2}TO = NO.$$

【点睛】 本题主要考查三角形内角和定理、平行线的判定与性质、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形及直角三角形的判定与性质等知识点，综合应用所学知识成为解答本题的关键.

