

武威市 2023 年初中毕业、高中招生考试

数学试卷

考生注意：本试卷满分为 120 分，考试时间为 120 分钟。所有试题均在答题卡上作答，否则无效。

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，每小题只有一个正确选项。

1. 9 的算术平方根是 ()

- A. ± 3 B. ± 9 C. 3 D. -3

【答案】C

【解析】

【分析】由 $3^2 = 9$ ，可得 9 的算术平方根。

【详解】解：9 的算术平方根是 3，

故选 C

【点睛】本题考查的是算术平方根的含义，熟练的求解一个数的算术平方根是解本题的关键。

2. 若 $\frac{a}{2} = \frac{3}{b}$ ，则 $ab =$ ()

- A. 6 B. $\frac{3}{2}$ C. 1 D. $\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据等式的性质即可得出结果。

【详解】解：等式两边乘以 $2b$ ，得 $ab = 6$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查了等式的性质，熟练掌握等式的性质是本题的关键。

3. 计算： $a(a+2) - 2a =$ ()

- A. 2 B. a^2 C. $a^2 + 2a$ D. $a^2 - 2a$

【答案】B

【解析】

【分析】先计算单项式乘以多项式，再合并同类项即可。

【详解】解： $a(a+2) - 2a = a^2 + 2a - 2a = a^2$ ，

故选：B

【点睛】此题考查了整式的四则混合运算，熟练掌握单项式乘以多项式的运算法则是解题的关键.

4. 若直线 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 经过第一、第三象限, 则 k 的值可为 ()

- A. -2 B. -1 C. $-\frac{1}{2}$ D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】通过经过的象限判断比例系数 k 的取值范围, 进而得出答案.

【详解】 $\because$ 直线 $y = kx$ (k 是常数, $k \neq 0$) 经过第一、第三象限,

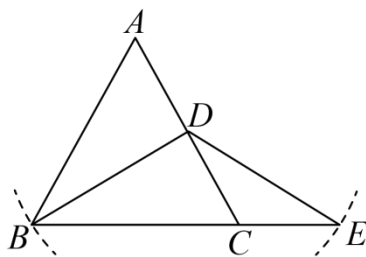
$\therefore k > 0$,

$\therefore k$ 的值可为 2,

故选: D.

【点睛】本题考查正比例函数的图象与性质, 熟记比例系数与图象经过的象限之间的关系是解题的关键.

5. 如图, BD 是等边 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高, 以点 D 为圆心, DB 长为半径作弧交 BC 的延长线于点 E , 则 $\angle DEC =$ ()



- A. 20° B. 25° C. 30° D. 35°

【答案】C

【解析】

【分析】由等边三角形的性质求解 $\angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$, 再利用等腰三角形的性质可得 $\angle DBE = \angle DEB = 30^\circ$, 从而可得答案.

【详解】解: $\because BD$ 是等边 $\triangle ABC$ 的边 AC 上的高,

$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$,

$\because DB = DE$,

$\therefore \angle DBE = \angle DEB = 30^\circ$,

故选 C

【点睛】本题考查的是等边三角形的性质, 等腰三角形的性质, 熟记等边三角形与等腰三角形的性质是解本题的关键.

6. 方程 $\frac{2}{x} = \frac{1}{x+1}$ 的解为 ()

A. $x = -2$

B. $x = 2$

C. $x = -4$

D. $x = 4$

【答案】A

【解析】

【分析】把分式方程转化为整式方程求解，然后解出的解要进行检验，看是否为增根.

【详解】去分母得 $2(x+1) = x$,

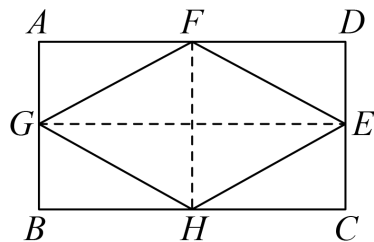
解方程得 $x = -2$,

检验: $x = -2$ 是原方程的解,

故选 A.

【点睛】本题考查了解分式方程的一般步骤，解题关键是熟记解分式方程的基本思想是“转化思想”，即把分式方程转化为整式方程求解，注意分式方程需要验根.

7. 如图, 将矩形 $ABCD$ 对折, 使边 AB 与 DC , BC 与 AD 分别重合, 展开后得到四边形 $EFGH$. 若 $AB = 2$, $BC = 4$, 则四边形 $EFGH$ 的面积为 ()



A. 2

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可得四边形 $EFGH$ 是菱形, $FH = AB = 2$, $GE = BC = 4$, 由菱形的面积等于对角线乘积的一半即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 将矩形 $ABCD$ 对折, 使边 AB 与 DC , BC 与 AD 分别重合, 展开后得到四边形 $EFGH$, $\therefore EF \perp GH$, EF 与 GH 互相平分,

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形,

$\because FH = AB = 2$, $GE = BC = 4$,

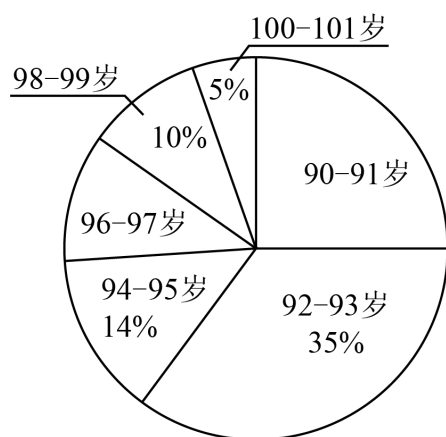
$\therefore$ 菱形 $EFGH$ 的面积为 $\frac{1}{2} FH \cdot GE = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$.

故选: B

【点睛】此题考查了矩形的折叠、菱形的判定和性质等知识, 熟练掌握菱形的面积等于对角线乘积的一半是解题的关键.

8. 据统计，数学家群体是一个长寿群体，某研究小组随机抽取了收录约 2200 位数学家的《数学家传略辞典》中部分 90 岁及以上的长寿数学家的年龄为样本，对数据进行整理与分析，统计图表（部分数据）如下，下列结论错误的是（ ）

年龄范围（岁）	人数（人）
90-91	25
92-93	
94-95	
96-97	11
98-99	10
100-101	m



- A. 该小组共统计了 100 名数学家的年龄
- B. 统计表中 m 的值为 5
- C. 长寿数学家年龄在 92-93 岁的人数最多
- D. 《数学家传略辞典》中收录的数学家年龄在 96-97 岁的人数估计有 110 人

【答案】D

【解析】

【分析】利用年龄范围为 98-99 的人数为 10 人，对应的百分比为 10%，即可判断 A 选项；由 A 选项可知该小组共统计了 100 名数学家的年龄，根据 $m = 100 \times 5\% = 5$ 即可判断 B 选项；由扇形统计图可知，长寿数学家年龄在 92-93 岁的占的百分比最大，即可判断 C 选项；用 2200 乘以小组共统计了 100 名数学家的年龄中在 96-97 岁的百分比，即可判断 D 选项。

【详解】解：A. 年龄范围为 98-99 的人数为 10 人，对应的百分比为 10%，则可得 $10 \div 10\% = 100$ （人），

即该小组共统计了 100 名数学家的年龄，故选项正确，不符合题意；

B. 由 A 选项可知该小组共统计了 100 名数学家的年龄，则 $m = 100 \times 5\% = 5$ ，故选项正确，不符合题意；

C. 由扇形统计图可知，长寿数学家年龄在 92–93 岁的占的百分比最大，即长寿数学家年龄在 92–93 岁的人数最多，故选项正确，不符合题意；

D. 《数学家传略辞典》中收录的数学家年龄在 96–97 岁的人数估计有 $2200 \times \frac{11}{100} = 242$ 人，故选项错误，符合题意.

故选：D.

【点睛】此题考查了扇形统计图和统计表，从扇形统计图和统计表中获取正确信息，进行正确计算是解题的关键.

9. 如图 1，汉代初期的《淮南万毕术》是中国古代有关物理、化学的重要文献，书中记载了我国古代学者在科学领域做过的一些探索及成就. 其中所记载的“取大镜高悬，置水盆于其下，则见四邻矣”，是古人利用光的反射定律改变光路的方法，即“反射光线与入射光线、法线在同一平面上；反射光线和入射光线位于法线的两侧；反射角等于入射角”. 为了探清一口深井的底部情况，运用此原理，如图在井口放置一面平面镜可改变光路，当太阳光线 AB 与地面 CD 所成夹角 $\angle ABC = 50^\circ$ 时，要使太阳光线经反射后刚好垂直于地面射入深井底部，则需要调整平面镜 EF 与地面的夹角 $\angle EBC =$ ()

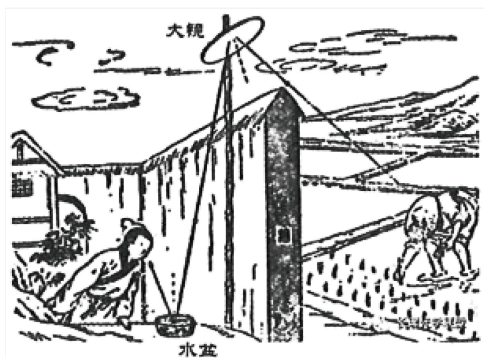
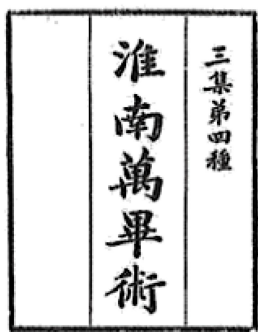


图1

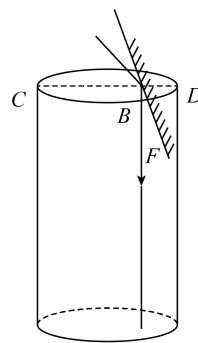


图2

A. 60°

B. 70°

C. 80°

D. 85°

【答案】B

【解析】

【分析】如图，过 B 作 $BQ \perp$ 平面镜 EF ，可得 $\angle QBE = \angle QBF = 90^\circ$ ， $\angle ABC + \angle CBQ = \angle ABQ = \angle MBQ$ ，而 $\angle CBQ + \angle QBM = \angle CBM = 90^\circ$ ，再建立方程 $50^\circ + \angle CBQ = 90^\circ - \angle CBQ$ ，可得 $\angle CBQ = 20^\circ$ ，从而可得答案.

【详解】解：如图，过 B 作 $BQ \perp$ 平面镜 EF ，

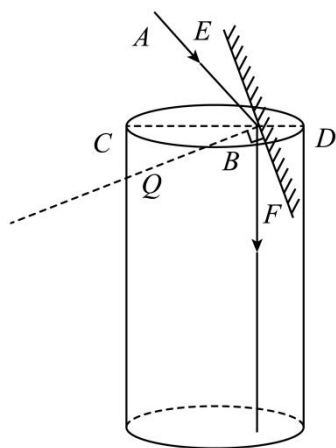


图2

$$\therefore \angle QBE = \angle QBF = 90^\circ, \quad \angle ABC + \angle CBQ = \angle ABQ = \angle MBQ,$$

$$\text{而 } \angle CBQ + \angle QBM = \angle CBM = 90^\circ,$$

$$\therefore 50^\circ + \angle CBQ = 90^\circ - \angle CBQ,$$

$$\therefore \angle CBQ = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ,$$

故选 B.

【点睛】本题考查的是垂直的定义，角的和差运算，角平分线的含义，属于跨学科题，熟记基础概念是解本题的关键.

10. 如图 1，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为 CD 边的中点. 动点 P 从点 A 出发沿 $AB \rightarrow BC$ 匀速运动，运动到点 C 时停止. 设点 P 的运动路程为 x ，线段 PE 的长为 y ， y 与 x 的函数图象如图 2 所示，则点 M 的坐标为 ()

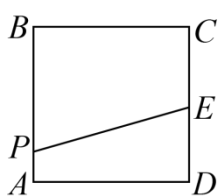


图1

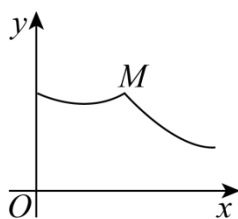


图2

A. $(4, 2\sqrt{3})$

B. $(4, 4)$

C. $(4, 2\sqrt{5})$

D. $(4, 5)$

【答案】C

【解析】

【分析】证明 $AB = BC = CD = AD = 4$ ， $\angle C = \angle D = 90^\circ$ ， $CE = DE = 2$ ，则当 P 与 A ， B 重合时， PE 最长，此时 $PE = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ ，而运动路程为 0 或 4，从而可得答案.

【详解】解：∵正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 为 CD 边的中点，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 4, \angle C = \angle D = 90^\circ, CE = DE = 2,$$

当 P 与 A, B 重合时， PE 最长，

$$\text{此时 } PE = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

运动路程为 0 或 4，

结合函数图象可得 $M(4, 2\sqrt{5})$ ，

故选 C

【点睛】本题考查的是从函数图象中获取信息，正方形的性质，勾股定理的应用，理解题意，确定函数图象上横纵坐标的含义是解本题的关键。

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分.

11. 因式分解： $ax^2 - 2ax + a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(x-1)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式，再利用平方差公式分解因式即可.

【详解】解： $ax^2 - 2ax + a = a(x^2 - 2x + 1) = a(x-1)^2$,

故答案为： $a(x-1)^2$

【点睛】本题考查的是综合提公因式与公式法分解因式，掌握因式分解的方法与步骤是解本题的关键.

12. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + 4c = 0$ 有两个不相等的实数根，则 $c = \underline{\hspace{2cm}}$ (写出一个满足条件的值).

【答案】 -2 (答案不唯一，合理即可)

【解析】

【分析】先根据关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + 4c = 0$ 有两个不相等的实数根得到 $\Delta = 4 - 16c > 0$ ，解得 $c < \frac{1}{4}$ ，根据 c 的取值范围，选取合适的值即可.

【详解】解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + 4c = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4c = 4 - 16c > 0,$$

$$\text{解得 } c < \frac{1}{4},$$

当 $c = -2$ 时，满足题意，

故答案为：-2（答案不唯一，合理即可）

【点睛】此题考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根是解题的关键。

13. 近年来，我国科技工作者践行“科技强国”使命，不断取得世界级的科技成果，如由我国研制的中国首台作业型全海深自主遥控潜水器“海斗一号”，最大下潜深度 10907 米，填补了中国水下万米作业型无人潜水器的空白；由我国自主研发的极目一号Ⅲ型浮空艇“大白鲸”，升空高度至海拔 9050 米，创造了浮空艇原位大气科学观测海拔最高的世界记录。如果把海平面以上 9050 米记作“+9050 米”，那么海平面以下 10907 米记作“_____米”。

【答案】-10907

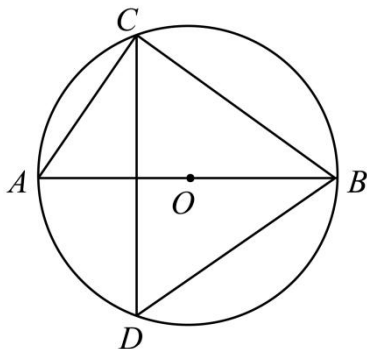
【解析】

【分析】根据正负数表示相反的意义解答即可。

【详解】解：把海平面以上 9050 米记作“+9050 米”，则海平面以下 10907 米记作-10907 米，故答案为：-10907。

【点睛】此题考查了正负数的理解：在一个事件中，规定一个量为正，则表示相反意义的量为负，正确理解正负数表示一对相反的意义是解题的关键。

14. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 是 $\odot O$ 上一点， $\angle CDB = 55^\circ$ ，则 $\angle ABC =$ _____ $^\circ$ 。



【答案】35

【解析】

【分析】由同弧所对的圆周角相等，得 $\angle A = \angle CDB = 55^\circ$ ，再根据直径所对的圆周角为直角，得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，然后由直角三角形的性质即可得出结果。

【详解】解： $\because \angle A, \angle CDB$ 是 $\widehat{BC}$ 所对的圆周角，

$\therefore \angle A = \angle CDB = 55^\circ$ ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

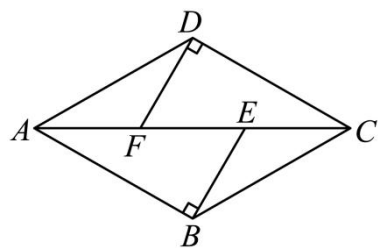
$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $\angle ABC = 90^\circ - \angle A = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$,

故答案为: 35.

【点睛】本题考查了圆周角定理, 以及直角三角形的性质, 利用了转化的思想, 熟练掌握圆周角定理是解本题的关键.

15. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$, $BE \perp AB$, $DF \perp CD$, 垂足分别为 B , D , 若 $AB = 6\text{cm}$, 则 $EF =$ _____ cm .



【答案】 $2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据菱形的性质, 含 30° 直角三角形的性质, 及三角函数即可得出结果.

【详解】解: 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DAB = \angle DCB = 60^\circ, \angle BAC = \angle DAC = \angle DCF = \frac{1}{2}\angle DAB = 30^\circ,$$

$\because DF \perp CD$,

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = 90^\circ - \angle DCF = 60^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle CDF \text{ 中, } DF = \frac{1}{2}CF,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle DFC - \angle DAF = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle ADF,$$

$$\therefore AF = DF = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{3}AC,$$

$$\text{同理, } CE = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore EF = AC - AF - CE = \frac{1}{3}AC,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AE,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AE = \frac{AB}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$,

$$\therefore EF = \frac{1}{2}AE = 2\sqrt{3}.$$

故答案为: $2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了菱形的性质, 含 30° 直角三角形的性质, 及三角函数等知识, 熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

16. 如图 1, 我国是世界上最早制造使用水车的国家. 1556 年兰州人段续的第一架水车创制成功后, 黄河两岸人民纷纷仿制, 车水灌田, 水渠纵横, 沃土繁丰. 而今, 兰州水车博览园是百里黄河风情线上的标志性景观, 是兰州“水车之都”的象征. 如图 2 是水车舀水灌溉示意图, 水车轮的辐条 (圆的半径) OA 长约为 6 米, 辐条尽头装有刮板, 刮板间安装有等距斜挂的长方体形状的水斗, 当水流冲动水车轮刮板时, 驱使水车徐徐转动, 水斗依次舀满河水在点 A 处离开水面, 逆时针旋转 150° 上升至轮子上方 B 处, 斗口开始翻转向下, 将水倾入木槽, 由木槽导入水渠, 进而灌溉, 那么水斗从 A 处 (舀水) 转动到 B 处 (倒水) 所经过的路程是_____米. (结果保留 π)



图1

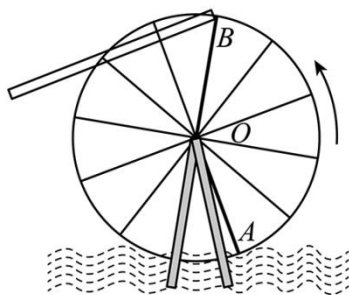


图2

【答案】 5π

【解析】

【分析】把半径和圆心角代入弧长公式即可;

【详解】 $l = \frac{n\pi r}{180} = \frac{150 \times \pi \times 6}{180} = 5\pi$

故填: 5π .

【点睛】本题考查弧长公式的应用, 准确记忆公式, 并正确代入公式是解题的关键.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 32 分. 解答时, 应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 计算: $\sqrt{27} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}$.

【答案】 $6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】利用二次根式的混合运算法则计算即可.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】解: } & \sqrt{27} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\
 &= 3\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\
 &= 12\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \\
 &= 6\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，掌握二次根式的混合运算法则是解答本题的关键.

$$18. \text{ 解不等式组: } \begin{cases} x > -6 - 2x \\ x \leq \frac{3+x}{4} \end{cases}$$

【答案】 $-2 < x \leq 1$

【解析】

【分析】先分别解两个不等式，求出它们的解集，再求两个不等式解集的公共部分即可得到不等式组的解集.

$$\text{【详解】解: 解不等式组: } \begin{cases} x > -6 - 2x \text{ ①} \\ x \leq \frac{3+x}{4} \text{ ②} \end{cases},$$

解不等式①，得 $x > -2$.

解不等式②，得 $x \leq 1$.

因此，原不等式组的解集为 $-2 < x \leq 1$.

【点睛】本题考查了一元一次不等式组的解法，熟练掌握一元一次不等式组的解法是解答本题的关键.

$$19. \text{ 化简: } \frac{a+2b}{a+b} - \frac{a-b}{a-2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2-4ab+4b^2}.$$

【答案】 $\frac{4b}{a+b}$

【解析】

【分析】先将除法转化为乘法进行计算，再根据分式的加减计算，即可求解.

$$\text{【详解】解: 原式} = \frac{a+2b}{a+b} - \frac{a-b}{a-2b} \cdot \frac{(a-2b)^2}{(a+b)(a-b)}$$

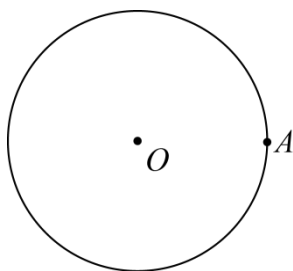
$$= \frac{a+2b}{a+b} - \frac{a-2b}{a+b}$$

$$= \frac{4b}{a+b}.$$

【点睛】本题考查了分式的混合运算，解题关键是熟练运用分式运算法则进行求解.

20. 1672 年，丹麦数学家莫尔在他的著作《欧几里得作图》中指出：只用圆规可以完成一切尺规作图. 1797 年，意大利数学家马斯凯罗尼又独立发现此结论，并写在他的著作《圆规的几何学》中. 请你利用数学家们发现的结论，完成下面的作图题：

如图，已知 $\odot O$ ，A 是 $\odot O$ 上一点，只用圆规将 $\odot O$ 的圆周四等分. (按如下步骤完成，保留作图痕迹)



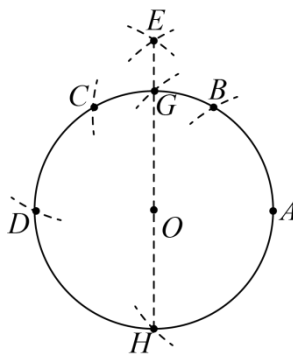
- ①以点 A 为圆心，OA 长为半径，自点 A 起，在 $\odot O$ 上逆时针方向顺次截取 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ；
- ②分别以点 A，点 D 为圆心，AC 长为半径作弧，两弧交于 $\odot O$ 上方点 E；
- ③以点 A 为圆心，OE 长为半径作弧交 $\odot O$ 于 G，H 两点. 即点 A，G，D，H 将 $\odot O$ 的圆周四等分.

【答案】见解析

【解析】

【分析】根据作图提示逐步完成作图即可. 再根据图形基本性质进行证明即可.

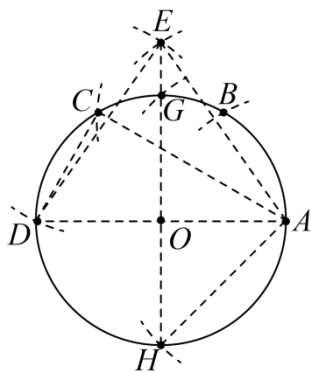
【详解】解：如图，



即点 A，G，D，H 把 $\odot O$ 的圆周四等分.

理由如下：

如图，连接 AE, DE, AC, DC, OE, OH, OG, AH,



由作图可得： $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$ ，且 $OA = OB = AB$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形， $\angle AOB = 60^\circ$ ，

同理可得： $\angle BOC = \angle COD = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB + \angle BOC + \angle COD = 180^\circ$ ，

$\therefore A, O, D$ 三点共线， AD 为直径，

$\therefore \angle ACD = 90^\circ$ ，

设 $CD = x$ ，而 $\angle DAC = 30^\circ$ ，

$\therefore AD = 2x$ ， $AC = \sqrt{3}x$ ，

由作图可得： $DE = AE = AC = \sqrt{3}x$ ，而 $OA = OD = x$ ，

$\therefore EO \perp AD$ ， $OE = \sqrt{DE^2 - OD^2} = \sqrt{2}x$ ，

$\therefore$ 由作图可得 $AG = AH = \sqrt{2}x$ ，

而 $OA = OH = x$ ，

$\therefore OA^2 + OH^2 = 2x^2 = AH^2$ ，

$\therefore \angle AOH = 90^\circ$ ，

同理 $\angle AOG = 90^\circ = \angle DOG = \angle DOH$ ，

$\therefore$ 点 A, G, D, H 把 $\odot O$ 的圆周四等分.

【点睛】 本题考查的是等腰三角形的性质，圆弧与圆心角之间的关系，等边三角形的判定与性质，勾股定理与勾股定理的逆定理的应用，圆周角定理的应用，熟练掌握图形的基本性质并灵活应用于作图是解本题的关键.

21. 为传承红色文化，激发革命精神，增强爱国主义情感，某校组织七年级学生开展“讲好红色故事，传承红色基因”为主题的研学之旅，策划了三条红色线路让学生选择：

A. 南梁精神红色记忆之旅（华池县）；B. 长征会师胜利之旅（会宁县）；C. 西路军红色征程之旅（高台

县)，且每人只能选择一条线路。小亮和小刚两人用抽卡片的方式确定一条自己要去的线路。他们准备了 3 张不透明的卡片，正面分别写上字母 A，B，C，卡片除正面字母不同外其余均相同，将 3 张卡片正面向下洗匀，小亮先从中随机抽取一张卡片，记下字母后正面向下放回，洗匀后小刚再从中随机抽取一张卡片。

- (1) 求小亮从中随机抽到卡片 A 的概率；
 (2) 请用画树状图或列表的方法，求两人都抽到卡片 C 的概率。

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{1}{9}$

【解析】

【分析】(1) 本题考查了等可能事件的概率，代入公式即可求解；

(2) 先用列表法或树状图法列举出所有可能的情况，再代入公式计算即可。

【小问 1 详解】

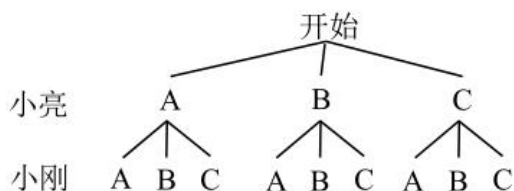
$$P(\text{小亮抽到卡片 A}) = \frac{1}{3}.$$

【小问 2 详解】

列表如下：

小刚 小亮	A	B	C
A	(A,A)	(A,B)	(A,C)
B	(B,A)	(B,B)	(B,C)
C	(C,A)	(C,B)	(C,C)

或画树状图如下：

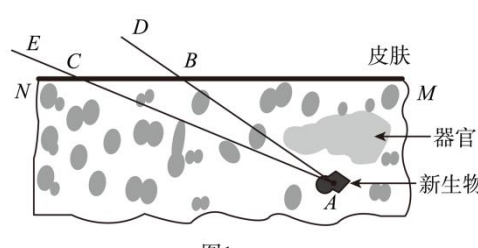
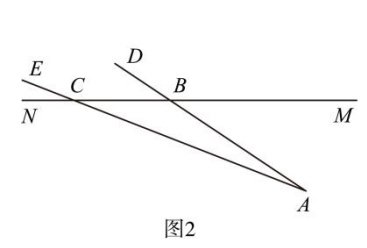


共有 9 种等可能的结果，两人都抽到卡片 C 的结果有 1 种，

$$\text{所以， } P(\text{两人都抽到卡片 C}) = \frac{1}{9}.$$

【点睛】本题考查列举法求概率，正确用树状图或者列表法列举出所有情况，并找到符合条件的事件数量，正确代入公式计算是解题的关键。

22. 如图 1，某人的一器官后面 A 处长了一个新生物，现需检测到皮肤的距离（图 1）。为避免伤害器官，可利用一种新型检测技术，检测射线可避开器官从侧面测量。某医疗小组制定方案，通过医疗仪器的测量获得相关数据，并利用数据计算出新生物到皮肤的距离。方案如下：

课题	检测新生物到皮肤的距离	
工具	医疗仪器等	
示意图	 图1	 图2
说明	如图 2，新生物在 A 处，先在皮肤上选择最大限度地避开器官的 B 处照射新生物，检测射线与皮肤 MN 的夹角为 $\angle DBN$；再在皮肤上选择距离 B 处 9cm 的 C 处照射新生物，检测射线与皮肤 MN 的夹角为 $\angle ECN$。	
测量数据	$\angle DBN = 35^\circ$ ， $\angle ECN = 22^\circ$ ， $BC = 9\text{cm}$	

请你根据上表中的测量数据，计算新生物 A 处到皮肤的距离。（结果精确到 0.1cm）（参考数据：

$\sin 35^\circ \approx 0.57$ ， $\cos 35^\circ \approx 0.82$ ， $\tan 35^\circ \approx 0.70$ ， $\sin 22^\circ \approx 0.37$ ， $\cos 22^\circ \approx 0.93$ ， $\tan 22^\circ \approx 0.40$ ）

【答案】 新生物 A 处到皮肤的距离约为 8.4cm

【解析】

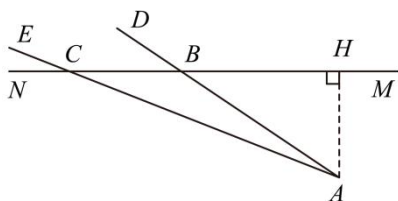
【分析】 过点 A 作 $AH \perp MN$ ，垂足为 H，在 $\text{Rt}\triangle AHC$ ，用 AH 与 $\angle ACH$ 的正切值表示出 CH，在 $\text{Rt}\triangle AHB$ 中，用 AH 和 $\angle ABH$ 的正切值表示出 BH，由 $CH - BH = BC = 9$ ，联立求解 AH 即可。

【详解】 解：过点 A 作 $AH \perp MN$ ，垂足为 H。

由题意得， $\angle ABH = \angle DBN = 35^\circ$ ， $\angle ACH = \angle ECN = 22^\circ$ ，

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AHB \text{ 中， } BH = \frac{AH}{\tan \angle ABH} = \frac{AH}{\tan 35^\circ} \approx \frac{AH}{0.70}.$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AHC \text{ 中， } CH = \frac{AH}{\tan \angle ACH} = \frac{AH}{\tan 22^\circ} \approx \frac{AH}{0.40}.$$



$$\therefore CH - BH = BC,$$

$$\therefore \frac{AH}{0.40} - \frac{AH}{0.70} = 9,$$

$$\therefore AH = 8.4(\text{cm}).$$

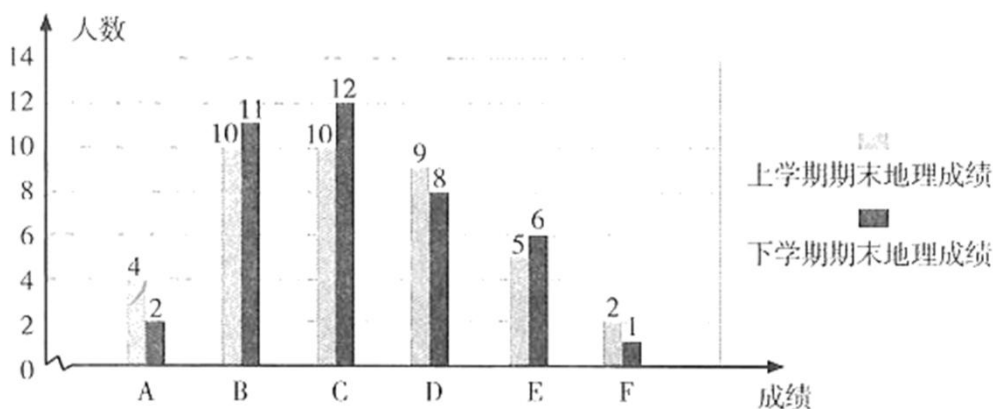
答：新生物 A 处到皮肤的距离约为 8.4cm.

【点睛】本题主要考查了解直角三角形的应用，构造直角三角形，通过三角函数求解线段是求解本题的关键.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 40 分. 解答时，应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

23. 某校八年级共有 200 名学生，为了解八年级学生地理学科的学习情况，从中随机抽取 40 名学生的八年级上、下两个学期期末地理成绩进行整理和分析（两次测试试卷满分均为 35 分，难度系数相同；成绩用 x 表示，分成 6 个等级：A. $x < 10$ ；B. $10 \leq x < 15$ ；C. $15 \leq x < 20$ ；D. $20 \leq x < 25$ ；E. $25 \leq x < 30$ ；F. $30 \leq x \leq 35$ ）。下面给出了部分信息：

a. 八年级学生上、下两个学期期末地理成绩的统计图如下：



b. 八年级学生上学期期末地理成绩在 C. $15 \leq x < 20$ 这一组的成绩是：

15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 18, 18

c. 八年级学生上、下两个学期期末地理成绩的平均数、众数、中位数如下：

学期	平均数	众数	中位数
八年级上学期	17.7	15	m

八年级下学期	18.2	19	18.5
--------	------	----	------

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $m =$ _____；
- (2) 若 $x \geq 25$ 为优秀，则这 200 名学生八年级下学期期末地理成绩达到优秀的约有 _____ 人；
- (3) 你认为该校八年级学生的期末地理成绩下学期比上学期有没有提高？请说明理由.

【答案】 (1) 16 (2) 35

(3) 八年级，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 由中位数的概念，可知 40 人成绩的中位数是第 20、21 位的成绩；

(2) 根据样本估计总体即可求解；

(3) 根据平均成绩或中位数即可判断.

【小问 1 详解】

解：由中位数的概念，可知 40 人成绩的中位数是第 20、21 位的成绩，

由统计图知 A 组 4 人，B 组 10 人，C 组 10 人，则中位数在 C 组，第 20、21 位的成绩分别是 16，16，

则中位数是 $\frac{16+16}{2} = 16$ ；

故答案为：16；

【小问 2 详解】

解： $200 \times \frac{6+1}{40} = 35$ (人)，

这 200 名学生八年级下学期期末地理成绩达到优秀的约有 35 人，

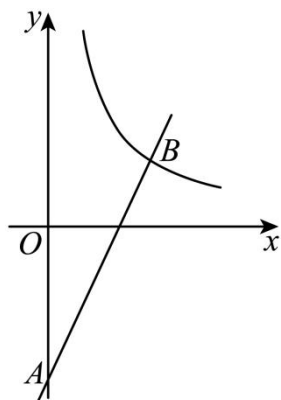
故答案为：35；

【小问 3 详解】

解：因为抽取的八年级学生的期末地理成绩的平均分（或中位数）下学期的比上学期的，所以八年级学生下学期期末地理成绩更好.

【点睛】 本题考查了条形统计图，中位数，众数等知识，熟练掌握知识点并灵活运用是解题的关键.

24. 如图，一次函数 $y = mx + n$ 的图象与 y 轴交于点 A，与反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $B(3, a)$.



- (1) 求点 B 的坐标;
- (2) 用 m 的代数式表示 n ;
- (3) 当 $\triangle OAB$ 的面积为 9 时, 求一次函数 $y = mx + n$ 的表达式.

【答案】(1) $B(3, 2)$

(2) $n = -3m + 2$

(3) $y = \frac{8}{3}x - 6$

【解析】

【分析】(1) 把点 $B(3, a)$ 代入 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$, 从而可得答案;

(2) 把点 $B(3, 2)$ 代入 $y = mx + n$, 从而可得答案;

(3) 利用三角形的面积先求解 $OA = 6$, 可得 A 的坐标, 可得 $n = -6$, 代入再解决 m 的值即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 $B(3, a)$ 在反比例函数 $y = \frac{6}{x} (x > 0)$ 的图象上,

$$\therefore a = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\therefore B(3, 2).$$

【小问 2 详解】

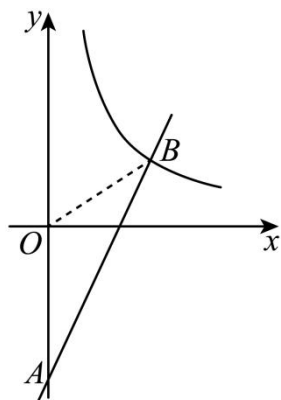
$\because$ 点 $B(3, 2)$ 在一次函数 $y = mx + n$ 的图象上,

$$\therefore 3m + n = 2,$$

$$\text{即 } n = -3m + 2.$$

【小问 3 详解】

如图, 连接 OB .



$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot x_B = 9,$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot OA \times 3 = 9,$$

$$\therefore OA = 6,$$

$$\therefore A(0, -6),$$

$$\therefore n = -6,$$

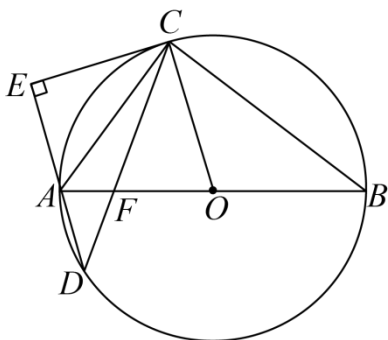
$$\therefore -3m + 2 = -6,$$

$$\therefore m = \frac{8}{3},$$

$$\therefore \text{一次函数的表达式为: } y = \frac{8}{3}x - 6.$$

【点睛】 本题考查的是一次函数与反比例函数的综合应用，坐标与图形面积，熟练的利用待定系数法求解函数解析式是解本题的关键.

25. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是 $\odot O$ 的直径， D 是 $\odot O$ 上的一点， CO 平分 $\angle BCD$ ， $CE \perp AD$ ，垂足为 E ， AB 与 CD 相交于点 F .



(1) 求证: CE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 当 $\odot O$ 的半径为 5， $\sin B = \frac{3}{5}$ 时，求 CE 的长.

$$\therefore \angle ODC = \angle B,$$

$$\therefore CO = CO,$$

$$\therefore \triangle OCD \cong \triangle OCB,$$

$$\therefore CD = CB.$$

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = AB \cdot \sin B = 10 \times \frac{3}{5} = 6,$$

$$\therefore CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8,$$

$$\therefore CD = 8,$$

$$\therefore CE = CD \cdot \sin \angle ADC = CD \cdot \sin B = 8 \times \frac{3}{5} = \frac{24}{5}.$$

【点睛】 本题考查了切线的判定定理，圆周角定理，全等三角形的性质与判定，解直角三角形，熟练掌握以上知识是解题的关键.

26. 【模型建立】

(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等边三角形, 点 C 关于 AD 的对称点 F 在 BD 边上.

①求证: $AE = CD$;

②用等式写出线段 AD , BD , DF 的数量关系, 并说明理由.

【模型应用】

(2) 如图 2, $\triangle ABC$ 是直角三角形, $AB = AC$, $CD \perp BD$, 垂足为 D , 点 C 关于 AD 的对称点 F 在 BD 边上. 用等式写出线段 AD , BD , DF 的数量关系, 并说明理由.

【模型迁移】

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $AD = 4\sqrt{2}$, $BD = 3CD$, 求 $\cos \angle AFB$ 的值.

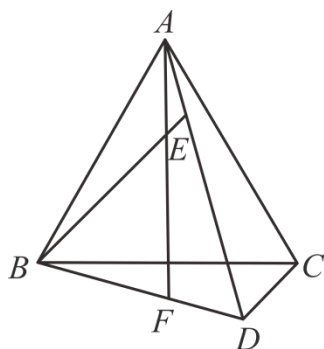


图1

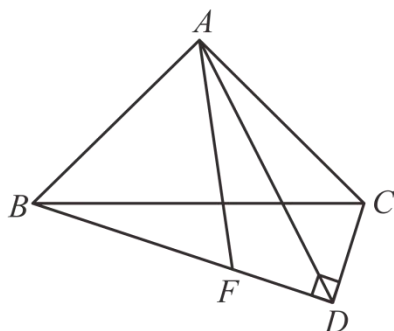


图2

【答案】(1) ①见解析；② $AD = DF + BD$ ，理由见解析；(2) $\sqrt{2}AD = DF + BD$ ，理由见解析；(3) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】

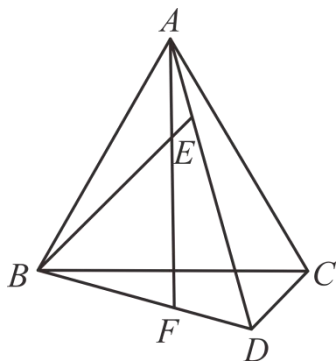
【分析】(1) ①证明： $\angle ABE = \angle CBD$ ，再证明 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ (SAS) 即可；②由 DF 和 DC 关于 AD 对称，可得 $DF = DC$ ，证明 $AE = DF$ ，从而可得结论；

(2) 如图，过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E ，得 $\angle BED = 90^\circ$ ，证明 $\angle ADF = \angle ADC = 45^\circ$ ， $\angle EBD = 45^\circ$ ，可得 $DE = \frac{\sqrt{2}}{2}BD$ ，证明 $AB = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$ ， $\angle ABE = \angle CBD$ ，可得 $\sin \angle ABE = \sin \angle CBD$ ，则

$AE \cdot BC = CD \cdot AB$ ，可得 $AE = \frac{\sqrt{2}}{2}CD$ ，从而可得结论；

(3) 由 $BD = 3CD = 3DF$ ，可得 $\sqrt{2}AD = DF + 3DF = 4DF$ ，结合 $AD = 4\sqrt{2}$ ，求解 $DF = DC = 2$ ， $BD = 6$ ，如图，过点 A 作 $AH \perp BD$ 于点 H ，可得 $HF = \frac{1}{2}BF = 2$ ， $BC = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}$ ，可得 $AF = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = 2\sqrt{5}$ ，再利用余弦的定义可得答案。

【详解】(1) ①证明： $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle BDE$ 都是等边三角形，
 $\therefore AB = BC$ ， $BE = BD$ ， $\angle ABC = \angle EBD = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC - \angle CBE = \angle EBD - \angle CBE$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle CBD$ ，
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CBD$ (SAS).
 $\therefore AE = CD$.



② $AD = DF + BD$ ，理由如下：

$\because DF$ 和 DC 关于 AD 对称，

$\therefore DF = DC$ ，

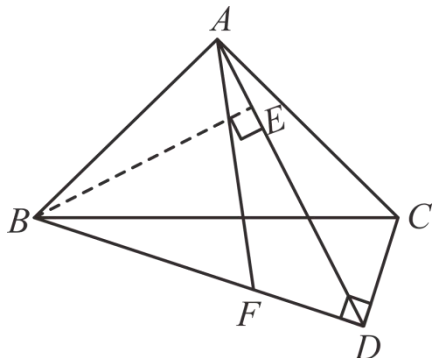
$\therefore AE = CD$ ，

$$\therefore AE = DF.$$

$$\therefore AD = AE + DE = DF + BD.$$

(2) $\sqrt{2}AD = DF + BD$. 理由如下:

如图, 过点 B 作 $BE \perp AD$ 于点 E , 得 $\angle BED = 90^\circ$.



$\because DF$ 和 DC 关于 AD 对称,

$$\therefore DF = DC, \angle ADF = \angle ADC.$$

$$\because CD \perp BD, \therefore \angle ADF = \angle ADC = 45^\circ, \therefore \angle EBD = 45^\circ.$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{2}}{2} BD.$$

$\because \triangle ABC$ 是直角三角形, $AB = AC$,

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ, AB = \frac{\sqrt{2}}{2} BC,$$

$$\therefore \angle ABC - \angle CBE = \angle EBD - \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CBD,$$

$$\therefore \sin \angle ABE = \sin \angle CBD,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{CD}{BC},$$

$$\therefore AE \cdot BC = CD \cdot AB,$$

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{2}}{2} CD.$$

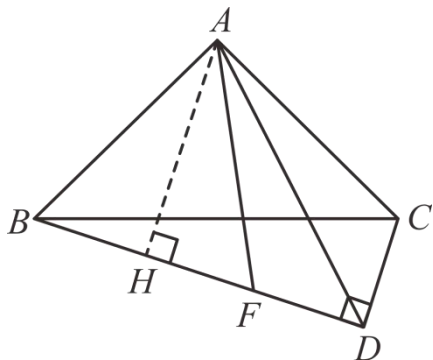
$$\therefore AD = AE + DE = \frac{\sqrt{2}}{2} CD + \frac{\sqrt{2}}{2} BD = \frac{\sqrt{2}}{2} DF + \frac{\sqrt{2}}{2} BD, \text{ 即 } \sqrt{2}AD = DF + BD.$$

$$(3) \because BD = 3CD = 3DF,$$

$$\therefore \sqrt{2}AD = DF + 3DF = 4DF,$$

$$\therefore AD = 4\sqrt{2}, \therefore DF = DC = 2, \therefore BD = 6.$$

如图，过点A作 $AH \perp BD$ 于点H.



$$\therefore AB = AC = AF,$$

$$\therefore HF = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}(BD - DF) = 2,$$

$$BC = \sqrt{BD^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10}.$$

$$\therefore AF = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{10} = 2\sqrt{5}.$$

$$\therefore \cos \angle AFB = \frac{HF}{AF} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题考查的是全等三角形的判定与性质，等边三角形的性质，勾股定理的应用，轴对称的性质，锐角三角函数的灵活应用，本题难度较高，属于中考压轴题，作出合适的辅助线是解本题的关键.

27. 如图1，抛物线 $y = -x^2 + bx$ 与 x 轴交于点A，与直线 $y = -x$ 交于点 $B(4, -4)$ ，点 $C(0, -4)$ 在 y 轴上. 点P从点B出发，沿线段BO方向匀速运动，运动到点O时停止.

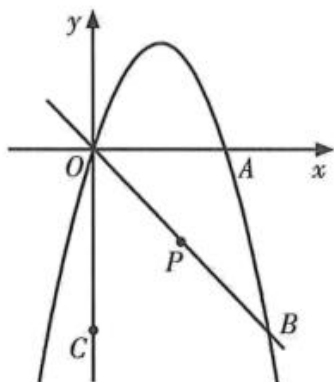


图1

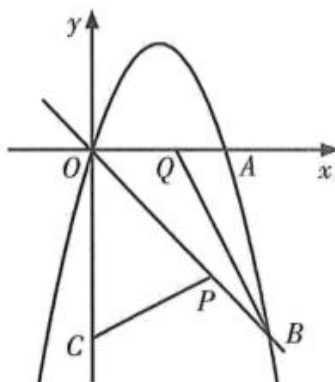


图2

(1) 求抛物线 $y = -x^2 + bx$ 的表达式;

(2) 当 $BP = 2\sqrt{2}$ 时，请在图1中过点P作 $PD \perp OA$ 交抛物线于点D，连接PC，OD，判断四边形OCPD

的形状，并说明理由.

(3) 如图 2，点 P 从点 B 开始运动时，点 Q 从点 O 同时出发，以与点 P 相同的速度沿 x 轴正方向匀速运动，点 P 停止运动时点 Q 也停止运动. 连接 BQ ， PC ，求 $CP + BQ$ 的最小值.

【答案】(1) $y = -x^2 + 3x$

(2) 四边形 $OCPD$ 是平行四边形，理由见解析

(3) $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 用待定系数法求二次函数解析式即可；

(2) 作 $PD \perp OA$ 交抛物线于点 D ，垂足为 H ，连接 PC ， OD ，由点 P 在 $y = -x$ 上，可知 $OH = PH$ ， $\angle POH = 45^\circ$ ，连接 BC ，得出 $OB = 4\sqrt{2}$ ，则 $OH = PH = \frac{\sqrt{2}}{2}OP = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2$ ，当 $x_D = 2$ 时， $DH = y_D = -4 + 3 \times 2 = 2$ ，进而得出 $PD = OC$ ，然后证明 $PD \parallel OC$ ，即可得出结论；

(3) 由题意得， $BP = OQ$ ，连接 BC . 在 OA 上方作 $\triangle OMQ$ ，使得 $\angle MOQ = 45^\circ$ ， $OM = BC$ ，证明 $\triangle CBP \cong \triangle MOQ$ (SAS)，根据 $CP + BQ = MQ + BQ \geq MB$ 得出 $CP + BQ$ 的最小值为 MB ，利用勾股定理求得 MB ，即可得解.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = -x^2 + bx$ 过点 $B(4, -4)$ ，

$$\therefore -16 + 4b = -4,$$

$$\therefore b = 3,$$

$$\therefore y = -x^2 + 3x;$$

【小问 2 详解】

四边形 $OCPD$ 是平行四边形.

理由：如图 1，作 $PD \perp OA$ 交抛物线于点 D ，垂足为 H ，连接 PC ， OD .

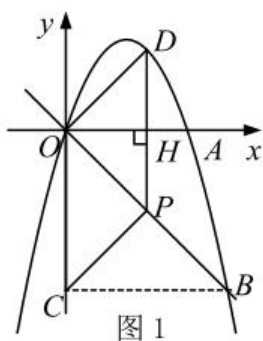


图 1

$\because$ 点 P 在 $y = -x$ 上,

$\therefore OH = PH, \angle POH = 45^\circ,$

连接 BC ,

$\because OC = BC = 4,$

$\therefore OB = 4\sqrt{2},$

$\because BP = 2\sqrt{2},$

$\therefore OP = OB - BP = 2\sqrt{2},$

$\therefore OH = PH = \frac{\sqrt{2}}{2}OP = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = 2,$

当 $x_D = 2$ 时, $DH = y_D = -4 + 3 \times 2 = 2,$

$\therefore PD = DH + PH = 2 + 2 = 4,$

$\because C(0, -4),$

$\therefore OC = 4,$

$\therefore PD = OC,$

$\because OC \perp x$ 轴, $PD \perp x$ 轴,

$\therefore PD \parallel OC,$

$\therefore$ 四边形 $OCPD$ 是平行四边形;

【小问 3 详解】

如图 2, 由题意得, $BP = OQ$, 连接 BC .

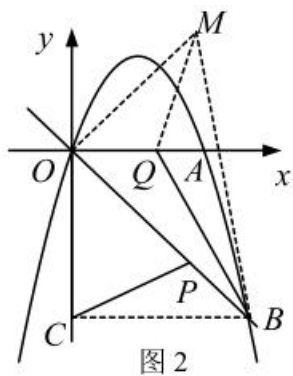


图 2

在 OA 上方作 $\triangle OMQ$ ，使得 $\angle MOQ = 45^\circ$ ， $OM = BC$ ，

$\because OC = BC = 4$ ， $BC \perp OC$ ，

$\therefore \angle CBP = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle CBP = \angle MOQ$ ，

$\because BP = OQ$ ， $\angle CBP = \angle MOQ$ ， $BC = OM$ ，

$\therefore \triangle CBP \cong \triangle MOQ$ (SAS)，

$\therefore CP = MQ$ ，

$\therefore CP + BQ = MQ + BQ \geq MB$ (当 M ， Q ， B 三点共线时最短)，

$\therefore CP + BQ$ 的最小值为 MB ，

$\because \angle MOB = \angle MOQ + \angle BOQ = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ ，

$\therefore MB = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3}$ ，

即 $CP + BQ$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$ 。

【点睛】 本题考查了二次函数的综合应用，待定系数法，平行四边形的性质与判定，勾股定理，全等三角形的判定和性质等知识，熟练掌握二次函数的图象和性质是解题的关键。

