

2023 年兰州市初中学业水平考试

数 学

注意事项：

1. 全卷共 120 分，考试时间 120 分钟。
2. 考生必须将姓名、准考证号、考场号、座位号等个人信息填（涂）写在答题卡上。
3. 考生务必将答案直接填（涂）写在答题卡的相应位置上。

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. -5 的相反数是()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. 5 D. -5

【答案】C

【解析】

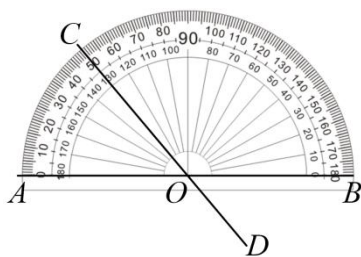
【分析】根据相反数的定义解答即可。

【详解】 -5 的相反数是 5。

故选 C。

【点睛】本题考查了相反数，熟记相反数的定义：只有符号不同的两个数互为相反数是关键。

2. 如图，直线 AB 与 CD 相交于点 O ，则 $\angle BOD =$ ()



- A. 40° B. 50° C. 55° D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】利用对顶角相等得到 $\angle BOD = \angle AOC$ ，即可求解。

【详解】解：读取量角器可知： $\angle AOC = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD = \angle AOC = 50^\circ$ ，

故选：B。

【点睛】本题考查了对顶角相等，量角器读数，是基础题。

3. 计算: $\frac{a^2-5a}{a-5} = (\quad)$

A. $a-5$ B. $a+5$

C. 5

D. a

【答案】D

【解析】

【分析】分子分解因式，再约分得到结果.

【详解】解: $\frac{a^2-5a}{a-5}$

$$= \frac{a(a-5)}{a-5}$$

$$= a,$$

故选: D.

【点睛】本题考查了约分, 掌握提公因式法分解因式是解题的关键.

4. 如图 1 是我国古建筑墙上采用的八角形空窗, 其轮廓是一个正八边形, 窗外之境如同镶嵌于一个画框之中. 如图 2 是八角形空窗的示意图, 它的一个外角 $\angle 1 = (\quad)$

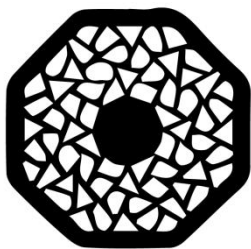


图1

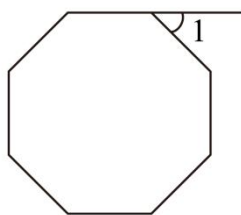


图2

A. 45° B. 60° C. 110° D. 135°

【答案】A

【解析】

【分析】由正八边形的外角和为 360° , 结合正八边形的每一个外角都相等, 再列式计算即可.【详解】解: $\because$ 正八边形的外角和为 360° ,

$$\therefore \angle 1 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ,$$

故选 A

【点睛】本题考查的是正多边形的外角问题, 熟记多边形的外角和为 360° 是解本题的关键.

5. 方程 $\frac{2}{x+3} = 1$ 的解是 ($\quad$)

A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=5$ D. $x=-5$

【答案】A

【解析】

【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得解.【详解】解：去分母得： $2 = x + 3$,解得 $x = -1$,经检验 $x = -1$ 是分式方程的解.

故选：A.

【点睛】本题考查了解分式方程，熟练掌握解分式方程的方法是解题的关键.

6. 如图 1 是一段弯管，弯管的部分外轮廓线如图 2 所示是一条圆弧 $\widehat{AB}$ ，圆弧的半径 $OA = 20\text{cm}$ ，圆心角 $\angle AOB = 90^\circ$ ，则 $\widehat{AB} =$ ()

图1

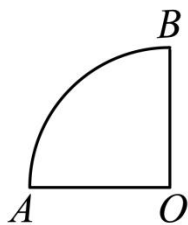


图2

A. $20\pi \text{ cm}$ B. $10\pi \text{ cm}$ C. $5\pi \text{ cm}$ D. $2\pi \text{ cm}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据弧长公式求解即可.

【详解】解：弧的半径 $OA = 20\text{cm}$ ，圆心角 $\angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore \widehat{AB} = \frac{90\pi \times 20}{180} = 10\pi,$$

故选：B.

【点睛】题目主要考查弧长公式，熟练掌握运用弧长公式是解题关键.

7. 已知二次函数 $y = -3(x-2)^2 - 3$ ，下列说法正确的是 ()A. 对称轴为 $x = -2$ B. 顶点坐标为 $(2, 3)$ C. 函数的最大值是 -3 D. 函数的最小值是 -3

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的图象及性质进行判断即可.

【详解】二次函数 $y = -3(x-2)^2 - 3$ 的对称轴为 $x = 2$ ，顶点坐标为 $(2, -3)$

$\therefore -3 < 0$

$\therefore$ 二次函数图象开口向下，函数有最大值，为 $y = -3$

$\therefore$ A、B、D 选项错误，C 选项正确

故选：C

【点睛】本题考查二次函数的图象及性质，熟练掌握二次函数图象和性质是解题的关键.

8. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $b^2 - 2(1 + 2c) =$ ()

A. -2

B. 2

C. -4

D. 4

【答案】A

【解析】

【分析】由一元二次方程根的情况可得 $b^2 - 4c = 0$ ，再代入式子即可求解.

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根

$\therefore \Delta = b^2 - 4c = 0$

$\therefore b^2 - 2(1 + 2c) = b^2 - 4c - 2 = 0 - 2 = -2,$

故选：A.

【点睛】本题考查一元二次方程根的判别式，熟练掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

9. 2022 年我国新能源汽车销量持续增长，全年销量约为 572.6 万辆，同比增长 91.7%，连续 8 年位居全球第一. 下面的统计图反映了 2021 年、2022 年新能源汽车月度销量及同比增长速度的情况. (2022 年同比增长

速度 = $\frac{2022\text{年当月销量} - 2021\text{年当月销量}}{2021\text{年当月销量}} \times 100\%$) 根据统计图提供的信息，下列推断不合理的是

()



- A. 2021 年新能源汽车月度销量最高是 12 月份，超过 40 万辆
- B. 2022 年新能源汽车月度销量超过 50 万辆的月份有 6 个
- C. 相对于 2021 年，2022 年新能源汽车同比增长速度最快的是 2 月份，达到了 181.1%
- D. 相对于 2021 年，2022 年从 5 月份开始新能源汽车同比增长速度持续降低

【答案】D

【解析】

【分析】根据折线图逐项分析即可得出答案.

【详解】解：A、2021 年新能源汽车月度销量最高是 12 月份，超过 40 万辆，推断合理，本选项不符合题意；

B、2022 年新能源汽车月度销量超过 50 万辆的月份有 6 个，推断合理，本选项不符合题意；

C、相对于 2021 年，2022 年新能源汽车同比增长速度最快的是 2 月份，达到了 181.1%，推断合理，本选项不符合题意；

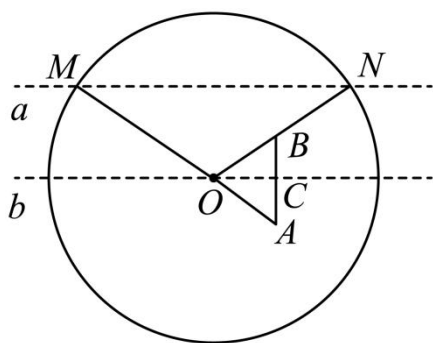
D、相对于 2021 年，2022 年从 6 月份开始新能源汽车同比增长速度持续降低，原说法推断不合理，本选项符合题意；

故选：D.

【点睛】此题考查了折线统计图，从折线统计图中获取数据做出分析，正确识别图中的数据是解题的关键.

10. 我国古代天文学确定方向的方法中蕴藏了平行线的作图法. 如《淮南子天文训》中记载：“正朝夕：先树一表东方；操一表却去前表十步，以参望日始出北廉. 日直入，又树一表于东方，因西方之表，以参望日方入北康. 则定东方两表之中与西方之表，则东西也.” 如图，用几何语言叙述作图方法：已知直线 a 和直线外一定点 O ，过点 O 作直线与 a 平行. (1) 以 O 为圆心，单位长为半径作圆，交直线 a 于点 M, N ；(2) 分别在 MO 的延长线及 ON 上取点 A, B ，使 $OA = OB$ ；(3) 连接 AB ，取其中点 C ，过 O, C 两点

确定直线 b ，则直线 $a \parallel b$ 。按以上作图顺序，若 $\angle MNO = 35^\circ$ ，则 $\angle AOC =$ ()



A. 35°

B. 30°

C. 25°

D. 20°

【答案】A

【解析】

【分析】证明 $\angle NMO = \angle MNO = 35^\circ$ ，可得 $\angle AOB = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$ ，结合 $OA = OB$ ， C 为 AB 的中点，可得 $\angle AOC = \angle BOC = 35^\circ$ 。

【详解】解： $\because \angle MNO = 35^\circ$ ， $MO = NO$ ，

$\therefore \angle NMO = \angle MNO = 35^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$ ，

$\because OA = OB$ ， C 为 AB 的中点，

$\therefore \angle AOC = \angle BOC = 35^\circ$ ，

故选 A。

【点睛】本题考查的是圆的基本性质，等腰三角形的性质，平行线的判定，三角形的外角的性质，熟记等腰三角形的性质是解本题的关键。

11. 一次函数 $y = kx - 1$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小，当 $x = 2$ 时， y 的值可以是 ()

A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

【答案】D

【解析】

【分析】根据一次函数的增减性可得 k 的取值范围，再把 $x = 2$ 代入函数 $y = kx - 1$ ，从而判断函数值 y 的取值。

【详解】 $\because$ 一次函数 $y = kx - 1$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小

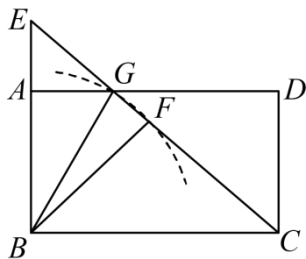
$\therefore k < 0$

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $y = 2k - 1 < -1$

故选：D

【点睛】本题考查一次函数的性质，不等式的性质，熟悉一次函数的性质是解题的关键.

12. 如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 为 BA 延长线上一点， F 为 CE 的中点，以 B 为圆心， BF 长为半径的圆弧过 AD 与 CE 的交点 G ，连接 BG . 若 $AB = 4$ ， $CE = 10$ ，则 $AG =$ ()



A. 2

B. 2.5

C. 3

D. 3.5

【答案】C

【解析】

【分析】利用直角三角形斜边中线的性质求得 $BG = BF = 5$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中，利用勾股定理即可求解.

【详解】解：∵ 矩形 $ABCD$ 中，

$$\therefore \angle ABC = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore F \text{ 为 } CE \text{ 的中点, } CE = 10,$$

$$\therefore BG = BF = \frac{1}{2}CE = 5,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABG \text{ 中, } AG = \sqrt{BG^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了矩形的性质，直角三角形斜边中线的性质，勾股定理，掌握“直角三角形斜边中线的长等于斜边的一半”是解题的关键.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13. 因式分解： $x^2 - 25y^2 =$ _____.

【答案】 $(x+5y)(x-5y)$

【解析】

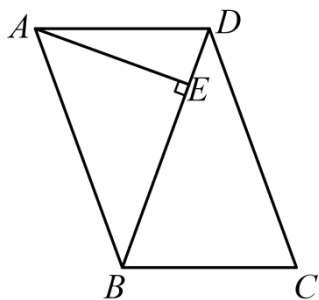
【分析】直接利用平方差分解即可.

【详解】解： $x^2 - 25y^2 = (x+5y)(x-5y)$.

故答案为： $(x+5y)(x-5y)$.

【点睛】本题考查因式分解，解题的关键是熟练掌握平方差公式.

14. 如图, 在 $ABCD$ 中, $BD = CD$, $AE \perp BD$ 于点 E , 若 $\angle C = 70^\circ$, 则 $\angle BAE = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.



【答案】 50

【解析】

【分析】 证明 $\angle DBC = \angle C = 70^\circ$, $\angle BDC = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$, 由 $AB \parallel CD$, 可得 $\angle ABE = \angle BDC = 40^\circ$, 结合 $AE \perp BD$, 可得 $\angle BAE = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.

【详解】 解: $\because BD = CD$, $\angle C = 70^\circ$,

$\therefore \angle DBC = \angle C = 70^\circ$, $\angle BDC = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$,

$\because ABCD$,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABE = \angle BDC = 40^\circ$,

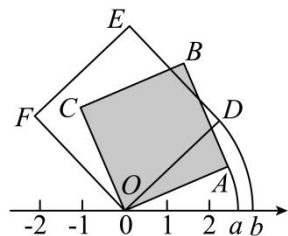
$\because AE \perp BD$,

$\therefore \angle BAE = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$;

故答案为: 50

【点睛】 本题考查的是等腰三角形的性质, 平行四边形的性质, 三角形的内角和定理的应用, 熟记基本几何图形的性质是解本题的关键.

15. 如图, 将面积为 7 的正方形 $OABC$ 和面积为 9 的正方形 $ODEF$ 分别绕原点 O 顺时针旋转, 使 OA , OD 落在数轴上, 点 A , D 在数轴上对应的数字分别为 a , b , 则 $b - a = \underline{\hspace{1cm}}$.



【答案】 $3 - \sqrt{7}$

【解析】

【分析】 分别求出两个正方形的边长, 从而得到 a , b 的值, 代入计算即可.

【详解】 $\because$ 正方形 $OABC$ 的面积为 7, 正方形 $ODEF$ 的面积为 9

$$\therefore OA = \sqrt{7}, OD = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{即 } a = \sqrt{7}, b = 3$$

$$\therefore b - a = 3 - \sqrt{7}$$

$$\text{故答案为: } 3 - \sqrt{7}$$

【点睛】本题考查算术平方根的意义，在数轴上表示实数，正确求出算术平方根是解题的关键.

16. 某学习小组做抛掷一枚瓶盖的实验，整理的实验数据如下表：

累计抛掷 次数	50	100	200	300	500	1000	2000	3000	5000
盖面朝上 次数	28	54	106	158	264	527	1056	1587	2850
盖面朝上 频率	0.5600	0.5400	0.5300	0.5267	0.5280	0.5270	0.5280	0.5290	0.5300

下面有三个推断：

- ①通过上述实验的结果，可以推断这枚瓶盖有很大的可能性不是质地均匀的；
- ②第 2000 次实验的结果一定是“盖面朝上”；
- ③随着实验次数的增大，“盖面朝上”的概率接近 0.53.

其中正确的是_____。（填序号）

【答案】①③

【解析】

【分析】根据表中数据及频率估计概率依次判断即可.

【详解】解：①通过上述实验的结果，发现盖面朝上的次数多与累计次数的一半，可以推断这枚瓶盖有很大的可能性不是质地均匀的，故正确；

②实验是随机的，第 2000 次实验的结果不一定是“盖面朝上”，故错误；

③随着实验次数的增大，“盖面朝上”的概率接近 0.53，故正确.

故答案为：①③.

【点睛】题目主要考查频率估计概率，结合表中数据求解是解题关键.

三、解答题（本大题共 12 小题，共 72 分）

17. 计算： $\sqrt{3} \times \sqrt{6} - \sqrt{8}$.

【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 根据二次根式乘法，加减法运算法则计算即可.

【详解】 解：原式 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的化简方法是解题的关键.

18. 计算： $(x+2y)(x-2y) - y(3-4y)$.【答案】 $x^2 - 3y$

【解析】

【分析】 先计算平方差公式及单项式乘以多项式，然后计算加减法即可.

【详解】 解： $(x+2y)(x-2y) - y(3-4y)$

$$= x^2 - 4y^2 - 3y + 4y^2$$

$$= x^2 - 3y.$$

【点睛】 题目主要考查整式的乘法运算及加减运算，熟练掌握运算法则是解题关键.

$$19. \text{解不等式组: } \begin{cases} 3x-1 > 2(x+1) \\ \frac{x+2}{3} > x-2 \end{cases}.$$

【答案】 $3 < x < 4$

【解析】

【分析】 分别解不等式组中的两个不等式，再取两个不等式的解集的公共部分即可.

$$\text{【详解】 解: } \begin{cases} 3x-1 > 2(x+1) \text{ ①} \\ \frac{x+2}{3} > x-2 \text{ ②} \end{cases},$$

$$\text{由①得: } 3x-2x > 2+1,$$

$$\text{解得: } x > 3,$$

$$\text{由②得: } x+2 > 3x-6,$$

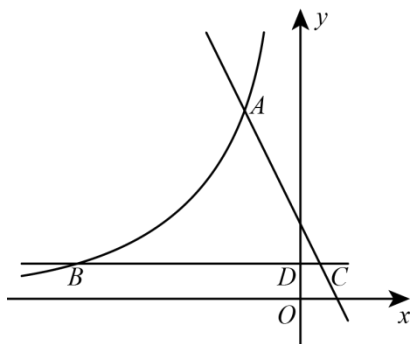
$$\text{解得: } x < 4,$$

$$\therefore \text{不等式组的解集为: } 3 < x < 4.$$

【点睛】 本题考查的是一元一次不等式组是解法，掌握解一元一次不等式组的方法与步骤是解本题的关键.

20. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 与一次函数 $y = -2x + m$ 的图象交于点 $A(-1, 4)$ ， $BC \perp y$ 轴于点 D ，

分别交反比例函数与一次函数的图象于点 B , C .



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 与一次函数 $y = -2x + m$ 的表达式;

(2) 当 $OD = 1$ 时, 求线段 BC 的长.

【答案】 (1) 反比例函数的表达式为 $y = -\frac{4}{x}$; 一次函数的表达式为 $y = -2x + 2$;

(2) $BC = 4\frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】 (1) 利用待定系数法即可求解;

(2) 先求得直线 BC 的表达式为 $y = 1$, 再分别求得 B 、 C 的坐标, 据此即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 的图象经过点 $A(-1, 4)$,

$$\therefore k = -1 \times 4 = -4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的表达式为 } y = -\frac{4}{x};$$

$\because$ 一次函数 $y = -2x + m$ 的图象经过点 $A(-1, 4)$,

$$\therefore 4 = -2 \times (-1) + m,$$

$$\therefore m = 2,$$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = -2x + 2$;

【小问 2 详解】

解: $\because OD = 1$,

$$\therefore D(0, 1),$$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y = 1$,

$$\because y=1 \text{ 时}, 1 = -\frac{4}{x},$$

解得 $x = -4$ ，则 $B(-4, 1)$ ，

$$\because y=1 \text{ 时}, 1 = -2x + 2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 则 } C\left(\frac{1}{2}, 1\right),$$

$$\therefore BC = \frac{1}{2} - (-4) = 4\frac{1}{2}.$$

【点睛】本题考查一次函数、反比例函数图象上点的坐标特征，待定系数法是求函数解析式的基本方法。

21. 综合与实践

问题探究：(1) 如图 1 是古希腊数学家欧几里得所著的《几何原本》第 1 卷命题 9：“平分一个已知角。”

即：作一个已知角的平分线，如图 2 是欧几里得在《几何原本》中给出的角平分线作图法：在 OA 和 OB 上分别取点 C 和 D ，使得 $OC = OD$ ，连接 CD ，以 CD 为边作等边三角形 CDE ，则 OE 就是 $\angle AOB$ 的平分线。

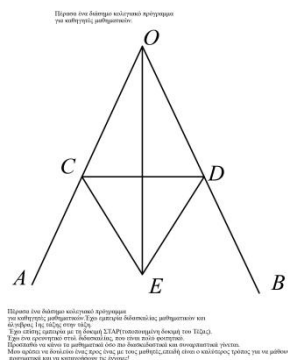


图1

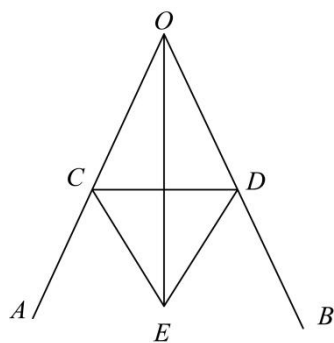


图2

请写出 OE 平分 $\angle AOB$ 的依据：_____；

类比迁移：

(2) 小明根据以上信息研究发现： $\triangle CDE$ 不一定必须是等边三角形，只需 $CE = DE$ 即可。他查阅资料：我国古代已经用角尺平分任意角。做法如下：如图 3，在 $\angle AOB$ 的边 OA ， OB 上分别取 $OM = ON$ ，移动角尺，使角尺两边相同刻度分别与点 M ， N 重合，则过角尺顶点 C 的射线 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，请说明此做法的理由；

拓展实践：

(3) 小明将研究应用于实践。如图 4，校园的两条小路 AB 和 AC ，汇聚形成了一个岔路口 A ，现在学校要在两条小路之间安装一盏路灯 E ，使得路灯照亮两条小路（两条小路一样亮），并且路灯 E 到岔路口 A 的距离和休息椅 D 到岔路口 A 的距离相等。试问路灯应该安装在哪个位置？请用不带刻度的直尺和圆规在对应的示意图 5 中作出路灯 E 的位置。（保留作图痕迹，不写作法）

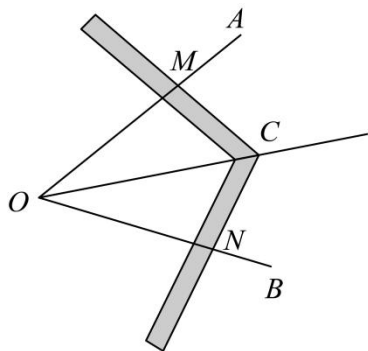


图3

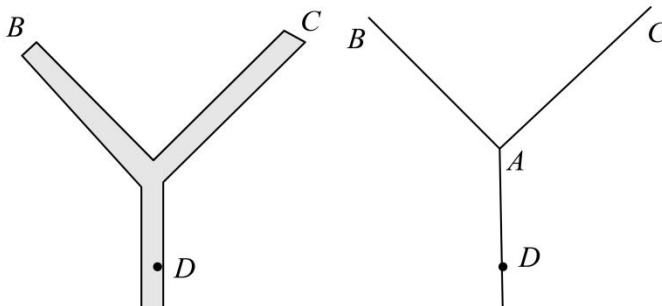


图4

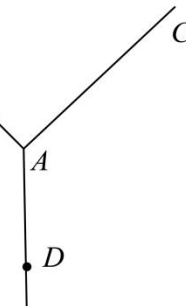


图5

【答案】(1) SSS；(2) 证明见解析；(3) 作图见解析；

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\triangle OCE \cong \triangle ODE$ (SSS)，可得 $\angle AOE = \angle BOE$ ，从而可得答案；

(2) 先证明 $\triangle OCM \cong \triangle OCN$ (SSS)，可得 $\angle AOC = \angle BOC$ ，可得 OC 是 $\angle AOB$ 的角平分线；

(3) 先作 $\angle BAC$ 的角平分线，再在角平分线上截取 $AE = AD$ 即可。

【详解】解：(1) $\because OC = OD, CE = DE, DE = DE,$

$\therefore \triangle OCE \cong \triangle ODE$ (SSS),

$\therefore \angle AOE = \angle BOE,$

$\therefore OE$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线；

故答案为：SSS

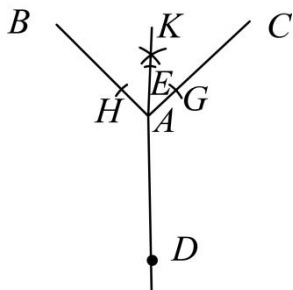
(2) $\because OM = ON, CM = CN, OC = OC,$

$\therefore \triangle OCM \cong \triangle OCN$ (SSS),

$\therefore \angle AOC = \angle BOC,$

$\therefore OC$ 是 $\angle AOB$ 的角平分线；

(3) 如图，点 E 即为所求作的点；



【点睛】本题考查的是全等三角形的判定与性质，角平分线的定义与角平分线的性质，作已知角的角平分线，理解题意，熟练的作角的平分线是解本题的关键。

22. 如图 1 是我国第一个以“龙”为主题的主题公园——“兰州龙源”。“兰州龙源”的“龙”字主题雕塑

以紫铜铸造，如巨龙腾空，气势如虹，屹立在黄河北岸. 某数学兴趣小组开展了测量“龙”字雕塑 CD 高度的实践活动. 具体过程如下：如图 2，“龙”字雕塑 CD 位于垂直地面的基座 BC 上，在平行于水平地面的 A 处测得 $\angle BAC = 38^\circ$ 、 $\angle BAD = 53^\circ$ ， $AB = 18\text{m}$. 求“龙”字雕塑 CD 的高度. (B, C, D 三点共线， $BD \perp AB$. 结果精确到 0.1m) (参考数据: $\sin 38^\circ \approx 0.62$ ， $\cos 38^\circ \approx 0.79$ ， $\tan 38^\circ \approx 0.78$ ， $\sin 53^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.60$ ， $\tan 53^\circ \approx 1.33$)



图1

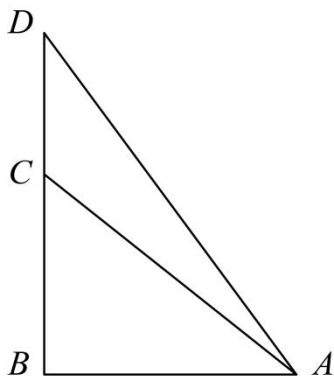


图2

【答案】 “龙”字雕塑 CD 的高度为 9.9m .

【解析】

【分析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，分别求得 BC 和 BD 的长，据此求解即可.

【详解】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = 18\text{m}$ ， $\angle BAC = 38^\circ$ ，

$$\therefore BC = AB \tan 38^\circ \approx 0.78 \times 18 = 14.04(\text{m}),$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $AB = 18\text{m}$ ， $\angle BAD = 53^\circ$ ，

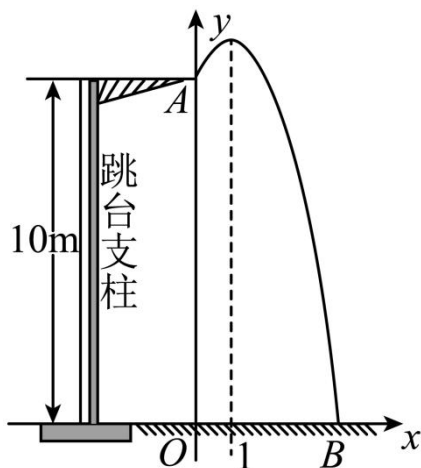
$$\therefore BD = AB \tan 53^\circ \approx 1.33 \times 18 = 23.94(\text{m}),$$

$$\therefore CD = BD - BC = 23.94 - 14.04 = 9.9(\text{m}),$$

答：“龙”字雕塑 CD 的高度为 9.9m .

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的应用－仰角俯角问题，掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

23. 一名运动员在 10m 高的跳台进行跳水，身体（看成一点）在空中的运动轨迹是一条抛物线，运动员离水面 OB 的高度 $y(\text{m})$ 与离起跳点 A 的水平距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系如图所示，运动员离起跳点 A 的水平距离为 1m 时达到最高点，当运动员离起跳点 A 的水平距离为 3m 时离水面的距离为 7m .



- (1) 求 y 关于 x 的函数表达式；
 (2) 求运动员从起跳点到入水点的水平距离 OB 的长.

【答案】(1) y 关于 x 的函数表达式为 $y = -x^2 + 2x + 10$ ；

(2) 运动员从起跳点到入水点的水平距离 OB 的长为 $(1 + \sqrt{11})\text{m}$.

【解析】

【分析】(1) 由题意得抛物线的对称轴为 $x = 1$ ，经过点 $(0, 10)$ ， $(3, 7)$ ，利用待定系数法即可求解；

(2) 令 $y = 0$ ，解方程即可求解.

【小问 1 详解】

解：由题意得抛物线的对称轴为 $x = 1$ ，经过点 $(0, 10)$ ， $(3, 7)$ ，

设抛物线的表达式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

$$\therefore \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ c = 10 \\ 9a + 3b + c = 7 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 10 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 x 的函数表达式为 $y = -x^2 + 2x + 10$ ；

【小问 2 详解】

解：令 $y = 0$ ，则 $-x^2 + 2x + 10 = 0$ ，

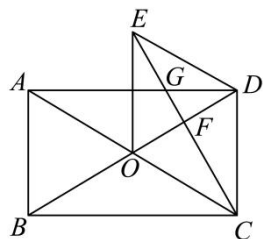
解得 $x = 1 \pm \sqrt{11}$ (负值舍去)，

$\therefore$ 运动员从起跳点到入水点的水平距离 OB 的长为 $(1 + \sqrt{11})\text{m}$.

【点睛】 本题考查了二次函数在实际问题中的应用，数形结合并熟练掌握运用待定系数法求抛物线的解析

式是解题的关键.

24. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $CD \parallel OE$, 直线 CE 是线段 OD 的垂直平分线, CE 分别交 OD , AD 于点 F , G , 连接 DE .



(1) 判断四边形 $OCDE$ 的形状, 并说明理由;

(2) 当 $CD = 4$ 时, 求 EG 的长.

【答案】(1) 四边形 $OCDE$ 是菱形, 理由见解析

$$(2) EG = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle COD$ 和 $\triangle EOD$ 是等边三角形, 即可推出四边形 $OCDE$ 是菱形;

(2) 利用含 30° 角的直角三角形的性质以及勾股定理求得 DF 和 CF 的长, 利用菱形的性质得到 $EF = CF = 2\sqrt{3}$, 在 $\text{Rt}\triangle CGF$ 中, 解直角三角形求得 GF 的长, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 四边形 $OCDE$ 是菱形, 理由如下,

$\because$ 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O ,

$$\therefore OC = OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD,$$

$\because$ 直线 CE 是线段 OD 的垂直平分线,

$$\therefore CO = CD, EO = ED,$$

$\therefore CO = CD = OD$, 即 $\triangle COD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle OCD = \angle DCO = \angle DOC = 60^\circ, \angle OCF = \angle DCF = \frac{1}{2}\angle OCD = 30^\circ,$$

$\because CD \parallel OE$,

$$\therefore \angle EOD = \angle EDO = \angle CDO = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle EOD$ 是等边三角形,

$$\therefore CO = CD = EO = ED,$$

$\therefore$ 四边形 $OCDE$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解：∵直线 CE 是线段 OD 的垂直平分线，且 $\angle DCF = 30^\circ$ ，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}CD = 2, \quad CF = \sqrt{3}DF = 2\sqrt{3},$$

由 (1) 得四边形 $OCDE$ 是菱形，

$$\therefore EF = CF = 2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中， $\angle GDF = 90^\circ - \angle ODC = 30^\circ$ ，

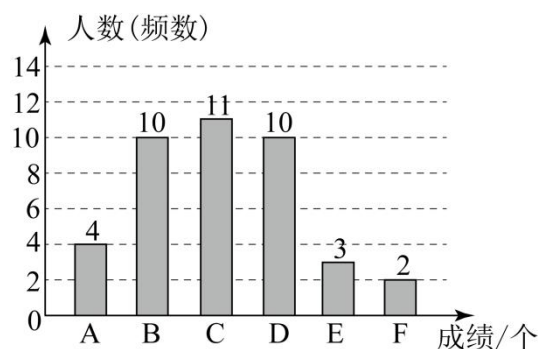
$$\therefore GF = DF \tan 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore EG = EF - GF = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】本题考查了菱形的判定和性质，等边三角形的判定与性质，解直角三角形，线段垂直平分线的性质，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

25. 某校八年级共有男生 300 人，为了解该年级男生排球垫球成绩和掷实心球成绩的情况，从中随机抽取 40 名男生进行测试，对数据进行整理、描述和分析，下面是给出的部分信息.

信息一：排球垫球成绩如下图所示 (成绩用 x 表示，分成六组：A. $x < 10$ ；B. $10 \leq x < 15$ ；C. $15 \leq x < 20$ ；D. $20 \leq x < 25$ ；E. $25 \leq x < 30$ ；F. $30 \leq x$).



信息二：排球垫球成绩在 D. $20 \leq x < 25$ 这一组的是：

20, 20, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 24

信息三：掷实心球成绩 (成绩用 y 表示，单位：米) 的人数 (频数) 分布表如下：

分组	$y < 6.0$	$6.0 \leq y < 6.8$	$6.8 \leq y < 7.6$	$7.6 \leq y < 8.4$	$8.4 \leq y < 9.2$	$9.2 \leq y$
人数	2	m	10	9	6	2

信息四：这次抽样测试中 6 名男生的两项成绩的部分数据如下：

学生	学生 1	学生 2	学生 3	学生 4	学生 5	学生 6
----	------	------	------	------	------	------

排球垫球	26	25	23	22	22	15
掷实心球	▲	7.8	7.8	▲	8.8	9.2

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $m =$ _____；
- (2) 下列结论正确的是_____；（填序号）
- ①排球垫球成绩超过 10 个的人数占抽取人数的百分比低于 60%；
- ②掷实心球成绩的中位数记为 n ，则 $6.8 \leq n < 7.6$ ；
- ③若排球垫球成绩达到 22 个及以上时，成绩记为优秀．如果信息四中 6 名男生的两项成绩恰好为优秀的有 4 名，那么学生 3 掷实心球的成绩是优秀．
- (3) 若排球垫球成绩达到 22 个及以上时，成绩记为优秀，请估计全年级男生排球垫球成绩达到优秀的人数．

【答案】 (1) 11

(2) ②③ (3) 75 人

【解析】

【分析】 (1) 由总人数减去各小组已知人数即可得到答案；

(2) 由排球垫球成绩超过 10 个的人数除以总人数可判断①，由中位数的含义可判断②，分三种情况进行分析讨论可判断③，从而可得到答案；

(3) 由样本的百分率乘以总人数即可得到答案．

【小问 1 详解】

解：由题意可得： $m = 40 - 2 - 10 - 9 - 6 - 2 = 11$ ；

【小问 2 详解】

①排球垫球成绩超过 10 个的人数占抽取人数的百分比为 $\frac{36}{40} = 90\%$ ，故①不符合题意；

②∵ 掷实心球成绩排在第 20 个，第 21 个数据落在 $6.8 \leq y < 7.6$ 这一组，

∴ 掷实心球成绩的中位数记为 n ，则 $6.8 \leq n < 7.6$ ；故②符合题意；

③由排球垫球成绩达到 22 个及以上时，成绩记为优秀．

∴ 从这点出发可得：学生 1，学生 2，学生 3，学生 4，学生 5 为优秀，

∴ 信息四中 6 名男生的两项成绩恰好为优秀的有 4 名，

∴ 若学生 1 为优秀，则学生 4 不为优秀，可得学生 3 优秀；

若学生 4 为优秀，学生 1 不为优秀，可得学生 3 优秀；

学生 1，学生 4 不可能同时为优秀，

∴ 学生 3 掷实心球的成绩必为优秀，故③符合题意；

故答案为：②③

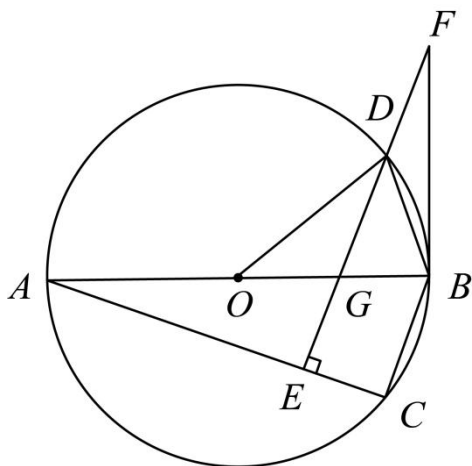
【小问 3 详解】

排球垫球成绩达到 22 个及以上时，成绩记为优秀，估计全年级男生排球垫球成绩达到优秀的人数为

$$\frac{10}{40} \times 300 = 75 \text{ (人)}.$$

【点睛】 本题考查的是从频数分布表，统计表中获取信息，利用样本估计总体，熟练的从频数分布表与统计表中获取互相关联的信息是解本题的关键.

26. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ ， $DE \perp AC$ 于点 E ， DE 交 BF 于点 F ，交 AB 于点 G ， $\angle BOD = 2\angle F$ ，连接 BD .



- (1) 求证： BF 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 判断 $\triangle DGB$ 的形状，并说明理由；
- (3) 当 $BD = 2$ 时，求 FG 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\triangle DGB$ 是等腰三角形，理由见解析

(3) $FG = 4$

【解析】

【分析】 (1) 连接 CO ，根据圆周角定理得出 $\angle BOD = \angle BOC = 2\angle BAC$ ，根据已知得出 $\angle F = \angle BAC$ ，根据 $DE \perp AC$ 得出 $\angle AEG = 90^\circ$ ，进而根据对等角相等，以及三角形内角和定理可得 $\angle FBG = \angle AEG = 90^\circ$ ，即可得证；

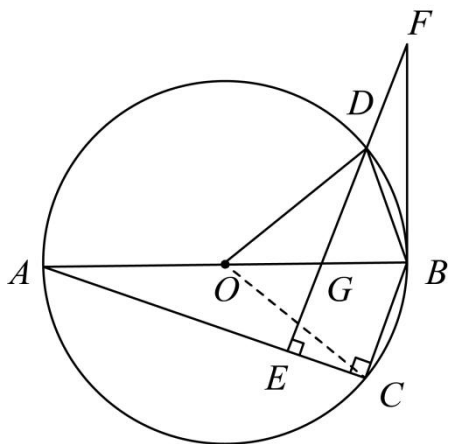
(2) 根据题意得出 $\widehat{AD} = \widehat{AC}$ ，则 $\angle ABD = \angle ABC$ ，证明 $EF \parallel BC$ ，得出 $\angle AGE = \angle ABC$ ，等量代换得出 $\angle FGB = \angle ABD$ ，即可得出结论；

(3) 根据 $\angle FGB = \angle ABD$ ， $AB \perp BF$ ，设 $\angle FGB = \angle ABD = \alpha$ ，则 $\angle DBF = \angle F = 90^\circ - \alpha$ ，等边对

等角得出 $DB = DF$ ，则 $FG = 2DG = 2DB = 4$ 。

【小问 1 详解】

证明：如图所示，连接 CO ，



$$\because \widehat{BC} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle BOD = \angle BOC = 2\angle BAC,$$

$$\because \angle BOD = 2\angle F,$$

$$\therefore \angle F = \angle BAC,$$

$$\because DE \perp AC,$$

$$\therefore \angle AEG = 90^\circ,$$

$$\because \angle AGE = \angle FGB$$

$$\therefore \angle FBG = \angle AEG = 90^\circ,$$

即 $AB \perp BF$ ，又 AB 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore BF$ 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

$$\because \widehat{BC} = \widehat{BD}, \text{ } AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径,}$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AC}, \text{ } BC \perp AC,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ABC,$$

$$\because DE \perp AC, \text{ } BC \perp AC,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AGE = \angle ABC,$$

又 $\angle AGE = \angle FGB$,

$$\therefore \angle FGB = \angle ABD,$$

$\therefore \triangle DGB$ 是等腰三角形,

【小问 3 详解】

$\because \angle FGB = \angle ABD, AB \perp BF,$

设 $\angle FGB = \angle ABD = \alpha$, 则 $\angle DBF = \angle F = 90^\circ - \alpha$,

$\therefore DB = DF,$

$\therefore FG = 2DG = 2DB = 4.$

【点睛】 本题考查了切线的判定, 等腰三角形的性质与判定, 圆周角定理, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

27. 在平面直角坐标系中, 给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, 如果点 P 到直线 EF 的距离等于图形 M 上任意两点距离的最大值时, 那么点 P 称为直线 EF 的“伴随点”.

例如: 如图 1, 已知点 $A(1,2), B(3,2), P(2,2)$ 在线段 AB 上, 则点 P 是直线 $EF: x$ 轴的“伴随点”.

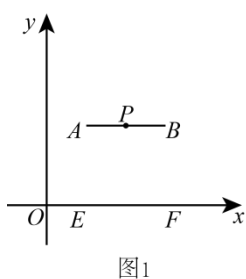


图1

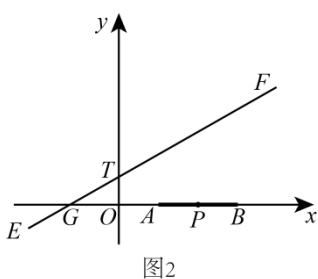


图2

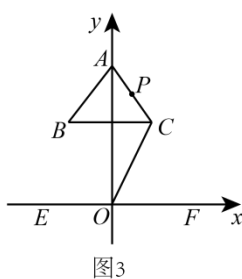


图3

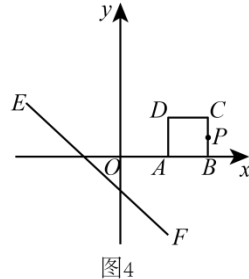


图4

(1) 如图 2, 已知点 $A(1,0), B(3,0)$, P 是线段 AB 上一点, 直线 EF 过 $G(-1,0), T\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 两点,

当点 P 是直线 EF 的“伴随点”时, 求点 P 的坐标;

(2) 如图 3, x 轴上方有一等边三角形 ABC , $BC \perp y$ 轴, 顶点 A 在 y 轴上且在 BC 上方, $OC = \sqrt{5}$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 上一点, 且点 P 是直线 $EF: x$ 轴的“伴随点”. 当点 P 到 x 轴的距离最小时, 求等边三角形 ABC 的边长;

(3) 如图 4, 以 $A(1,0), B(2,0), C(2,1)$ 为顶点的正方形 $ABCD$ 上始终存在点 P , 使得点 P 是直线 $EF: y = -x + b$ 的“伴随点”. 请直接写出 b 的取值范围.

【答案】 (1) $P(3,0)$

(2) 2

(3) $-1 \leq b \leq 1$

【解析】

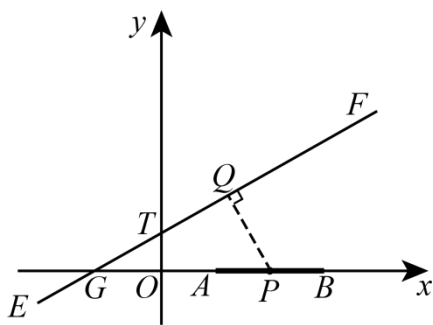
【分析】(1) 过点 P 作 $PQ \perp EF$ 于点 Q ，根据新定义得出 $PQ = 2$ ，根据已知得出 $\angle TGO = 30^\circ$ ，则 $GP = 2PQ = 4$ ，即可求解；

(2) 当 P 到 x 轴的距离最小时，点 P 在线段 BC 上，设 $\triangle ABC$ 的边长为 a ，以 C 为圆心 a 为半径作圆，当 $\odot C$ 与 x 轴相切时，如图所示，切点为 H ，此时点 P 是直线 EF ： x 轴的“伴随点”。且点 P 到 x 轴的距离最小，则 C 的纵坐标为 a ，即 $CH = a$ ， $\triangle ABC$ 是等边三角形，且 $BC \perp y$ 轴，设 BC 交于点 D ，则 $AD \perp BC$ ，得出 $C\left(\frac{1}{2}a, a\right)$ ，根据 $OC = \sqrt{5}$ 即可求解；

(3) 当四边形 $ABCD$ 是正方形时， $D(1,1)$ ，连接 CA 并延长交 y 轴于点 M ，直线 AC 的解析式为 $y = x - 1$ ，得出 $M(0, -1)$ ，可得 P 到直线的距离为 $\sqrt{2}$ ，则当点 P 与点 A 重合时，当点 P 与 C 点重合时，求得两个临界点时的 b 的值，即可求解。

【小问 1 详解】

解：如图所示，过点 P 作 $PQ \perp EF$ 于点 Q ，



$\because A(1,0)$ ， $B(3,0)$ ，则 $AB = 2$ ，点 P 是直线 EF 的“伴随点”时，

$$\therefore PQ = 2,$$

$$\therefore G(-1,0), T\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\therefore OG = 1, TO = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \angle TGO = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle TGO = 30^\circ,$$

$$\therefore GP = 2PQ = 4,$$

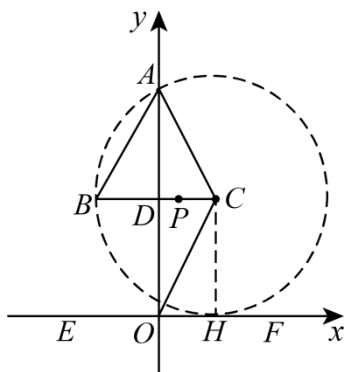
$$\therefore P(3,0);$$

【小问 2 详解】

解：当 P 到 x 轴的距离最小时，

$\therefore$ 点 P 在线段 BC 上，

设 $\triangle ABC$ 的边长为 a ，以 C 为圆心 a 为半径作圆，当 $\odot C$ 与 x 轴相切时，如图所示，切点为 H ，此时点 P 是直线 EF ： x 轴的“伴随点”。且点 P 到 x 轴的距离最小，



则 C 的纵坐标为 a ，即 $CH = a$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，且 $BC \perp y$ 轴，设 BC 交于点 D ，则 $AD \perp BC$ ，

$$\therefore BD = DC = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2}a, a\right),$$

$$\because OC = \sqrt{5},$$

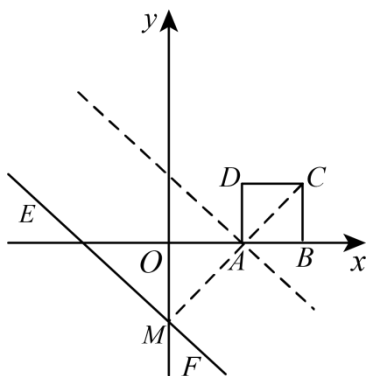
$$\therefore \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + a^2 = 5,$$

解得： $a = 2$ 或 -2 （舍去）

$\therefore$ 等边三角形 ABC 的边长为 2

【小问 3 详解】

解：如图所示，当四边形 $ABCD$ 是正方形时， $D(1,1)$ ，连接 CA 并延长交 y 轴于点 M ，



$$\therefore A(1,0), B(2,0), C(2,1)$$

$$\therefore AB=1, AC=\sqrt{2}AB=\sqrt{2},$$

$$\therefore A(1,0), C(2,1)$$

设直线 AC 的解析式为 $y=mx+n$ ，则

$$\begin{cases} m+n=0 \\ 2m+n=1 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y=x-1,$$

$$\therefore \text{直线 } AC, EF \text{ 垂直,}$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y=-1$$

$$\therefore M(0,-1),$$

$$\therefore AM=\sqrt{OA^2+OM^2}=\sqrt{2}=AC, \text{ 即得 } P \text{ 到直线 } EF \text{ 的距离为 } \sqrt{2},$$

则当点 P 与点 A 重合时， P 是直线 $EF: y=-x+b$ 的“伴随点”。

此时 $M(0,-1)$ 在 $y=-x+b$ 上，则 $0+b=-1$ ，解得： $b=-1$ ，

当点 P 与 C 点重合时，则 EF 过点 A ，此时 $0=-1+b$ ，解得： $b=1$ ，

$$\therefore -1 \leq b \leq 1.$$

【点睛】 本题考查了几何新定义，解直角三角形，切线的性质，直线与坐标轴交点问题，正方形的性质，理解新定义是解题的关键.

28.

综合与实践

【思考尝试】

(1) 数学活动课上，老师出示了一个问题：如图 1，在矩形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 上一点， $DF \perp CE$ 于点 F ， $GD \perp DF$ ， $AG \perp DG$ ， $AG = CF$ 。试猜想四边形 $ABCD$ 的形状，并说明理由；

【实践探究】

(2) 小睿受此问题启发，逆向思考并提出新的问题：如图 2，在正方形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 上一点， $DF \perp CE$ 于点 F ， $AH \perp CE$ 于点 H ， $GD \perp DF$ 交 AH 于点 G ，可以用等式表示线段 FH ， AH ， CF 的数量关系，请你思考并解答这个问题；

【拓展迁移】

(3) 小博深入研究小睿提出的这个问题，发现并提出新的探究点：如图 3，在正方形 $ABCD$ 中， E 是边 AB 上一点， $AH \perp CE$ 于点 H ，点 M 在 CH 上，且 $AH = HM$ ，连接 AM ， BH ，可以用等式表示线段 CM ， BH 的数量关系，请你思考并解答这个问题。

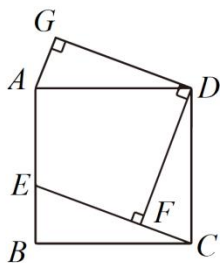


图1

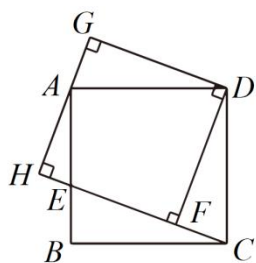


图2

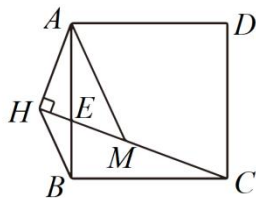


图3

【答案】(1) 四边形 $ABCD$ 是正方形，证明见解析；(2) $FH = AH + CF$ ；(3) $MC = \sqrt{2}BH$ ，证明见解析；

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle ADG \cong \triangle CDF$ ，可得 $AD = CD$ ，从而可得结论；

(2) 证明四边形 $DGHE$ 是矩形，可得 $\angle G = 90^\circ = \angle DFC$ ，同理可得： $\angle ADG = \angle CDF$ ，证明 $\triangle ADG \cong \triangle CDF$ ， $DG = DF$ ， $AG = CF$ ，证明四边形 $DGHE$ 是正方形，可得 $HG = HE$ ，从而可得结论；

(3) 如图，连接 AC ，证明 $\angle AHE = \angle ABC = 90^\circ$ ， $\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$ ， $\angle BAC = 45^\circ$ ， $\triangle AHE \sim \triangle CBE$ ，可得 $\frac{AE}{CE} = \frac{HE}{BE}$ ，再证明 $\triangle HEB \sim \triangle AEC$ ，可得 $\angle HBE = \angle MCA$ ，证明 $\triangle AHB \sim \triangle AMC$ ，可得 $\frac{HB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，从而可得答案。

【详解】解：(1) $\because GD \perp DF$ ， $DF \perp CE$ ， $AG \perp DG$ ，

$$\therefore \angle G = \angle DFC = 90^\circ, \quad \angle ADG + \angle ADF = 90^\circ,$$

$\because$ 矩形 $ABCD$,

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ = \angle ADF + \angle CDF,$$

$$\therefore \angle ADG = \angle CDF,$$

$$\therefore AG = CF,$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore AD = CD,$$

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 是正方形.

$$(2) \because DF \perp CE, \quad AH \perp CE, \quad GD \perp DF,$$

$$\therefore \angle DFH = \angle H = \angle GDF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $DGHF$ 是矩形,

$$\therefore \angle G = 90^\circ = \angle DFC,$$

同理可得: $\angle ADG = \angle CDF$,

$\therefore$ 正方形 $ABCD$,

$$\therefore AD = CD,$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle CDF,$$

$$\therefore DG = DF, \quad AG = CF,$$

$\therefore$ 四边形 $DGHF$ 是正方形,

$$\therefore HG = HF,$$

$$\therefore FH = HG = AH + AG = AH + CF.$$

(3) 如图, 连接 AC ,

$\because AH \perp CE$, 正方形 $ABCD$,

$$\therefore \angle AHE = \angle ABC = 90^\circ, \quad \frac{AC}{AB} = \sqrt{2}, \quad \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle CEB,$$

$$\therefore \triangle AHE \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{HE}{BE},$$

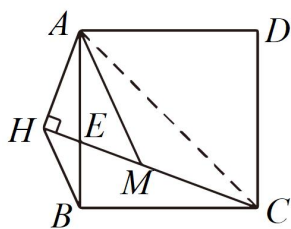


图3

$$\therefore \angle BEH = \angle AEC,$$

$$\therefore \triangle HEB \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \angle HBE = \angle MCA,$$

$$\therefore AH \perp CE, AH = HM,$$

$$\therefore \angle HAM = 45^\circ = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle HAE = \angle MAC,$$

$$\therefore \triangle AHB \sim \triangle AMC,$$

$$\therefore \frac{HB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore MC = \sqrt{2}BH.$$

【点睛】 本题考查的是矩形的判定与性质，正方形的判定与性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，作出合适的辅助线，构建相似三角形是解本题的关键.

