

2023 年郴州市初中学业水平考试

数学

(试题卷)

注意事项:

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号写在答题卡和该试题卷的封面上，并认真填涂和核对答题卡上的姓名、准考证号和科目；
2. 选择题部分请按题号用 2B 铅笔填涂方框，修改时用橡皮擦擦干净，不留痕迹；
3. 非选择题部分请按题号用 0.5 毫米黑色签字笔书写，否则作答无效；
4. 在草稿纸、试题卷上答题无效；
5. 请勿折叠答题卡，保证字体工整、笔迹清晰、卡面清洁；
6. 答题完成后，请将试题卷、答题卡放在桌上，由监考老师统一收回。

本试卷共 8 页，有三道大题，共 26 小题，满分 130 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

1. -2 的倒数是 ()

A. 2

B. $-\frac{1}{2}$

C. -2

D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】乘积是 1 的两个数互为倒数，求一个数（0 除外）的倒数，只要用 1 除以这个数即可。

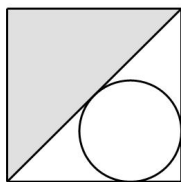
【详解】解： $\because -2 \times (-\frac{1}{2}) = 1$

$\therefore -2$ 的倒数是 $-\frac{1}{2}$

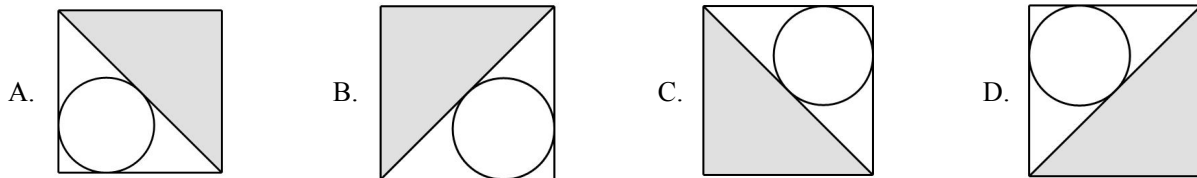
故选 B.

【点睛】此题考查倒数的意义和求法：乘积是 1 的两个数互为倒数，一般在求小数的倒数，先把小数化为分数再求解。

2. 下列图形中，能由图形 a 通过平移得到的是 ()



图形 a



【答案】 B

【解析】

【分析】根据平移的定义：在平面内，把一个图形整体沿某一方向移动，这种图形的平行移动，叫做平移变换，结合各选项所给的图形即可作出判断.

【详解】解：观察图形可知，B 中图形能由图形 a 通过平移得到，A，C，D 均不能由图形 a 通过平移得到；故选 B.

【点睛】本题考查平移. 熟练掌握平移的性质，是解题的关键.

3. 下列运算正确的是 ()

A. $a^4 \cdot a^3 = a^7$ B. $(a^2)^3 = a^5$ C. $3a^2 - a^2 = 2$ D. $(a-b)^2 = a^2 - b^2$

【答案】 A

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，幂的乘方，合并同类项，完全平方公式进行计算，即可得出结论.

【详解】解：A、 $a^4 \cdot a^3 = a^7$ ，选项计算正确，符合题意；

B、 $(a^2)^3 = a^6$ ，选项计算错误，不符合题意；

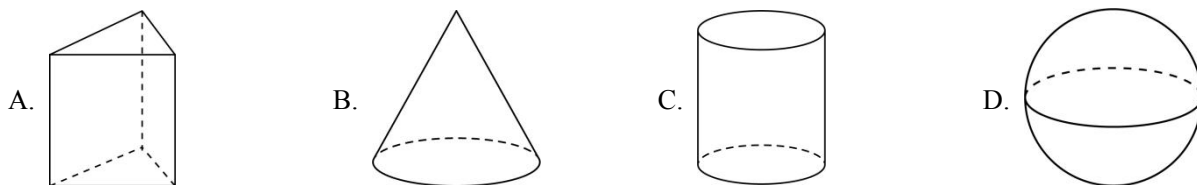
C、 $3a^2 - a^2 = 2a^2$ 选项计算错误，不符合题意；

D、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ，选项计算错误，不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题考查整式的运算. 熟练掌握相关运算法则，是解题的关键.

4. 下列几何体中，各自的三视图完全一样的是 ()



【答案】 D

【解析】

【分析】找到从物体正面、左面和上面看得到的图形全等的几何体即可.

- 【详解】A、直三棱柱的俯视图为三角形，与主视图长方形和左视图长方形均不同，A 错误；
 B、圆锥的俯视图为圆，与主视图三角形和左视图三角形均不同，B 错误；
 C、圆柱的俯视图为圆，与主视图长方形和左视图长方形均不同，C 错误；
 D、球的三视图完全相同，都是圆，D 正确；

故选 D.

【点睛】本题考查三视图的有关知识，注意三视图都相同的常见的几何体有球和正方体.

5. 下列问题适合全面调查的是 ()

- A. 调查市场上某品牌灯泡的使用寿命
 B. 了解全市人民对湖南省第二届旅发大会的关注情况
 C. 了解郴江河的水质情况
 D. 神舟十六号飞船发射前对飞船仪器设备的检查

【答案】D

【解析】

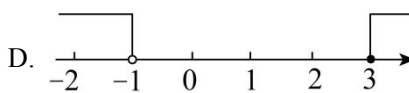
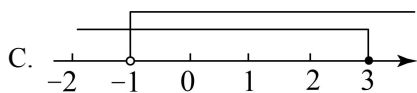
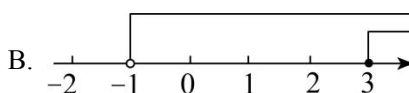
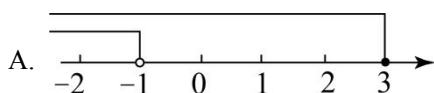
【分析】根据全面调查的定义与适用范围对各选项进行判断作答即可.

【详解】解：由题意知，A、B、C 项数量较大，也不需要非常精确的数据，适于抽查，故不符合要求；
 D 项关乎生命安全且需要的数据比较精确，适于全面调查，故符合要求；

故选：D.

【点睛】本题考查了全面调查. 解题的关键在于熟练掌握全面调查的适用条件.

6. 一元一次不等式组 $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



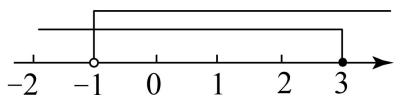
【答案】C

【解析】

【分析】先求出不等式组的解集，再在数轴上进行表示即可.

【详解】解：由 $3-x \geq 0$ ，得： $x \leq 3$ ；
 由 $x+1 > 0$ ，得： $x > -1$ ，
 $\therefore$ 不等式组的解集为： $-1 < x \leq 3$ ；

数轴上表示如图：



故选 C.

【点睛】本题考查在数轴上表示不等式组的解集. 正确的求出不等式组的解集, 是解题的关键.

7. 小王从 A 地开车去 B 地, 两地相距 240km. 原计划平均速度为 x km/h, 实际平均速度提高了 50%, 结果提前 1 小时到达. 由此可建立方程为 ()

- A. $\frac{240}{0.5x} - \frac{240}{x} = 1$ B. $\frac{240}{x} - \frac{240}{1.5x} = 1$ C. $\frac{240}{1.5x} - \frac{240}{x} = 1$ D. $x + 1.5x = 240$

【答案】B

【解析】

【分析】设原计划平均速度为 x km/h, 根据实际平均速度提高了 50%, 结果提前 1 小时到达, 列出分式方程即可.

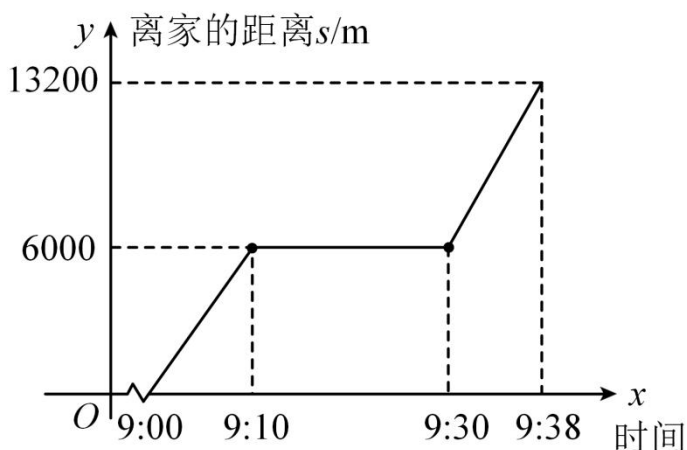
【详解】解: 设原计划平均速度为 x km/h, 由题意, 得:

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{(1+50\%)x} = 1, \text{ 即: } \frac{240}{x} - \frac{240}{1.5x} = 1;$$

故选 B

【点睛】本题考查根据实际问题列方程. 找准等量关系, 正确得列出方程, 是解题的关键.

8. 第 11 届中国 (湖南) 矿物宝石国际博览会在我市举行, 小方一家上午 9:00 开车前往会展中心参观. 途中汽车发生故障, 原地修车花了一段时间. 车修好后, 他们继续开车赶往会展中心. 以下是他们家出发后离家的距离 s 与时间的函数图象. 分析图中信息, 下列说法正确的是 ()



- A. 途中修车花了 30min
B. 修车之前的平均速度是 500m/min
C. 车修好后的平均速度是 80m/min

D. 车修好后的平均速度是修车之前的平均速度的1.5倍

【答案】D

【解析】

【分析】根据图象信息以及速度=路程÷时间的关系即可解决问题.

【详解】解：由图象可知途中修车花了 $30-10=20(\text{min})$,

修车之前的平均速度是 $6000 \div 10 = 600(\text{m}/\text{min})$,

车修好后的平均速度是 $(13200-6000) \div (38-30) = 900(\text{m}/\text{min})$,

$\therefore 900 \div 600 = 1.5$

故 A、B、C 错误，D 正确.

故选：D.

【点睛】本题考查了函数图象，观察函数图象得出相应的时间和路程是解题关键.

二、填空题（共8小题，每小题3分，共24分）

9. 计算： $\sqrt[3]{27} = \underline{\quad}$.

【答案】3

【解析】

【分析】求数 a 的立方根，也就是求一个数 x ，使得 $x^3=a$ ，则 x 就是 a 的一个立方根，根据立方根的定义计算可得.

【详解】解： $\because 3^3=27$,

$\therefore \sqrt[3]{27} = 3$.

故答案为3.

【点睛】此题考查了求一个数的立方根，熟记立方根定义是解题的关键.

10. 在一次函数 $y = (k-2)x + 3$ 中， y 随 x 的增大而增大，则 k 的值可以是_____（任写一个符合条件的数即可）.

【答案】3（答案不唯一）

【解析】

【分析】根据一次函数的性质可知“当 $k-2 > 0$ 时，变量 y 的值随 x 的值增大而增大”，由此可得出结论.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = (k-2)x + 3$ 中， y 随 x 的值增大而增大，

$\therefore k-2 > 0$.

解得： $k > 2$ ，

故答案为：3（答案不唯一）.

【点睛】 本题考查了一次函数的性质，解题的关键是根据函数的单调性确定 k 的取值范围. 本题属于基础题，难度不大，解决该题型题目时，结合一次函数的增减性，得出 k 的取值范围是关键.

11. 在一个不透明的袋子中装有 3 个白球和 7 个红球，它们除颜色外，大小、质地都相同. 从袋子中随机取出一个球，是红球的概率是_____.

【答案】 $\frac{7}{10}$

【解析】

【分析】 根据概率公式进行计算即可.

【详解】 解：由题意，得，随机取出一个球共有 10 种等可能的结果，其中取出的是红球共有 7 种等可能的结果，

$$\therefore P = \frac{7}{10};$$

故答案为： $\frac{7}{10}$.

【点睛】 本题考查概率. 熟练掌握概率的计算公式，是解题的关键.

12. 抛物线 $y = x^2 - 6x + c$ 与 x 轴只有一个交点，则 $c =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】 根据抛物线与 x 轴只有一个交点，则判别式为 0 进行解答即可.

【详解】 解： $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 6x + c$ 与 x 轴只有一个交点，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4c = 0$$

解得 $c=9$.

故答案为：9.

【点睛】 本题考查二次函数与 x 轴交点问题，解题关键是理解抛物线与 x 轴有两个交点，则判别式 $\Delta \geq 0$ ；抛物线与 x 轴有一个交点，则判别式 $\Delta = 0$ ；抛物线与 x 轴没有交点，则判别式 $\Delta < 0$.

13. 为积极响应“助力旅发大会，唱响美丽郴州”的号召，某校在各年级开展合唱比赛，规定每支参赛队伍的最终成绩按歌曲内容占 30%，演唱技巧占 50%，精神面貌占 20% 考评. 某参赛队歌曲内容获得 90 分，演唱技巧获得 94 分，精神面貌获得 95 分. 则该参赛队的最终成绩是_____分.

【答案】 93

【解析】

【分析】利用加权平均数的计算方法进行求解即可.

【详解】解：由题意，得： $90 \times 30\% + 94 \times 50\% + 95 \times 20\% = 93$ （分）；

$\therefore$ 该参赛队的最终成绩是 93 分，

故答案为：93

【点睛】本题考查加权平均数，熟练掌握加权平均数的计算方法，是解题的关键.

14. 在 $Rt \triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ， D 是 AB 的中点，则 $CD =$ _____.

【答案】5

【解析】

【分析】先根据题意画出图形，再运用勾股定理求得 AB ，然后再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半解答即可.

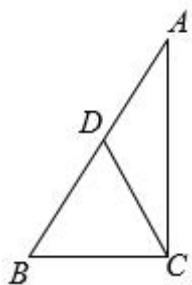
【详解】解：如图： $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$\because \angle ACB=90^\circ$ ， D 为 AB 的中点，

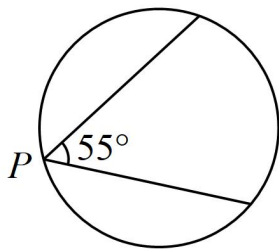
$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 10 = 5.$$

故答案为 5.



【点睛】本题主要考查了运用勾股定理求直角三角形、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质等知识点，掌握“直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半”成为解题的关键.

15. 如图，某博览会上有一圆形展示区，在其圆形边缘的点 P 处安装了一台监视器，它的监控角度是 55° ，为了监控整个展区，最少需要在圆形边缘上共安装这样的监视器_____台.



【答案】4

【解析】

【分析】圆周角定理求出 $\angle P$ 对应的圆心角的度数，利用 $360^\circ \div$ 圆心角的度数即可得解.

【详解】解： $\because \angle P = 55^\circ$,

$\therefore \angle P$ 对应的圆心角的度数为 110° ,

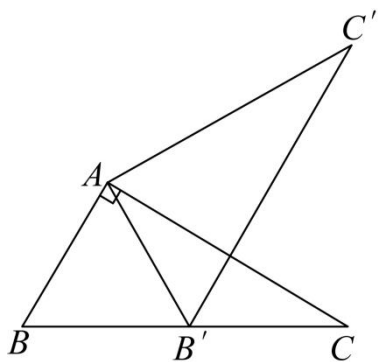
$\therefore 360^\circ \div 110^\circ \approx 3.27$,

$\therefore$ 最少需要在圆形边缘上共安装这样的监视器 4 台;

故答案为: 4

【点睛】本题考查圆周角定理，熟练掌握同弧所对的圆周角是圆心角的一半，是解题的关键.

16. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = 3\text{cm}$ ， $\angle B = 60^\circ$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转，得到 $\triangle AB'C'$ ，若点 B 的对应点 B' 恰好落在线段 BC 上，则点 C 的运动路径长是 _____ cm (结果用含 π 的式子表示).

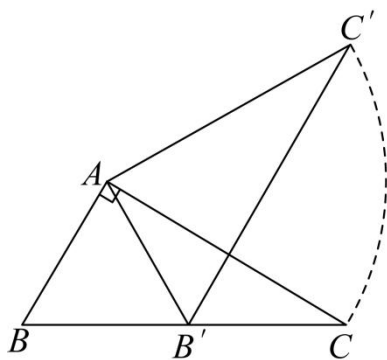


【答案】 $\sqrt{3}\pi$

【解析】

【分析】由于 AC 旋转到 AC' ，故 C 的运动路径长是 CC' 的圆弧长度，根据弧长公式求解即可.

【详解】以 A 为圆心作圆弧 CC' ，如图所示.



在直角 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\angle C = 30^\circ$ ，

则 $BC = 2AB = 2 \times 3 = 6(\text{cm})$.

$\therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}(\text{cm})$.

由旋转性质可知， $AB = AB'$ ，又 $\angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形.

$\therefore \angle BAB' = 60^\circ$.

由旋转性质知， $\angle CAC' = 60^\circ$.

故弧 CC' 的长度为： $\frac{60}{360} \times 2 \times \pi \times AC = \frac{\pi}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}\pi$ (cm)；

故答案为： $\sqrt{3}\pi$

【点睛】本题考查了含 30° 角直角三角形的性质、勾股定理、旋转的性质、弧长公式等知识点，解题的关键是明确 C 点的运动轨迹.

三、解答题 (17~19 题每题 6 分，20~23 题每题 8 分，24~25 题每题 10 分，26 题 12 分，共 82 分)

17. 计算： $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \sqrt{3} \tan 30^\circ + (\pi - 2023)^0 + |-2|$.

【答案】4

【解析】

【分析】先化简各式，再进行加减运算即可.

【详解】解：原式 $= 2 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 + 2$

$= 2 - 1 + 1 + 2$

$= 4$.

【点睛】本题考查特殊角的三角函数值，实数的混合运算. 熟练掌握相关运算法则，正确的进行计算，是解题的关键.

18. 先化简，再求值： $\frac{x+3}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x-1}{x^2+3x} + \frac{1}{x}$ ，其中 $x = 1 + \sqrt{3}$.

【答案】 $\frac{1}{x-1}$ ， $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】先根据分式的加减乘除混合运算进行化简，再将 x 的值代入，根据二次根式的性质化简即可.

【详解】解： $\frac{x+3}{x^2-2x+1} \cdot \frac{x-1}{x^2+3x} + \frac{1}{x}$

$$= \frac{x+3}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x(x+3)} + \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}$$

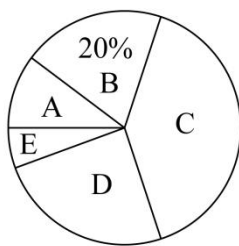
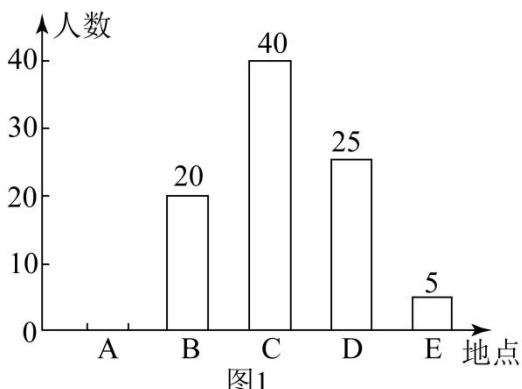
$$= \frac{1+x-1}{x(x-1)}$$

$$= \frac{1}{x-1},$$

$$\text{当 } x=1+\sqrt{3} \text{ 时, 原式} = \frac{1}{1+\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【点睛】本题考查分式的加减乘除混合运算，二次根式的性质，正确化简是解题的关键.

19. 某校计划组织学生外出开展研学活动，在选择研学活动地点时，随机抽取了部分学生进行调查，要求被调查的学生从 A 、 B 、 C 、 D 、 E 五个研学活动地点中选择自己最喜欢的一个. 根据调查结果，编制了如下两幅不完整的统计图.



- (1) 请把图1中缺失的数据，图形补充完整；
- (2) 请计算图2中研学活动地点 C 所在扇形的圆心角的度数；
- (3) 若该校共有 1200 名学生，请估计最喜欢去 D 地研学的学生人数.

【答案】(1) 见解析；

(2) 144° ；

(3) 300.

【解析】

【分析】(1) 根据选择 B 的人数是 20 人，所占的比例是 20%，据此即可求得本次参加抽样调查的学生人数，进而求得选择 A 的人数，即可补全统计图；

(2) 利用 360° 乘以选择 C 的人数所占总人数的比即可得解；

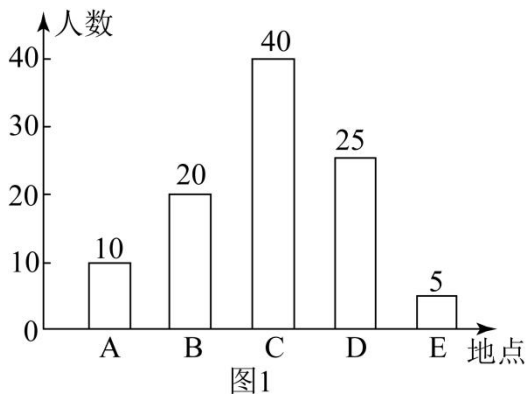
(3) 利用总人数 1200 乘以对应的百分比即可求得.

【小问 1 详解】

解： $20 \div 20\% = 100$ （人）

选择 A 的人数： $100 - 20 - 40 - 25 - 5 = 10$ （人）

补全图形如下：



【小问 2 详解】

解： $360^\circ \times \frac{40}{100} = 144^\circ$ ，

$\therefore$ 研学活动地点 C 所在扇形的圆心角的度数 144° ；

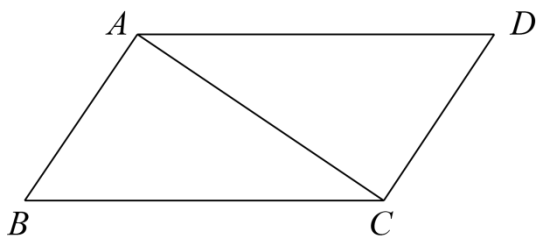
【小问 3 详解】

$1200 \times \frac{25}{100} = 300$ （人）

答：最喜欢去 D 地研学的学生人数共有 300 人。

【点睛】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

20. 如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形。



- (1) 尺规作图：作对角线 AC 的垂直平分线 MN （保留作图痕迹）；
- (2) 若直线 MN 分别交 AD ， BC 于 E ， F 两点，求证：四边形 $AFCE$ 是菱形

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

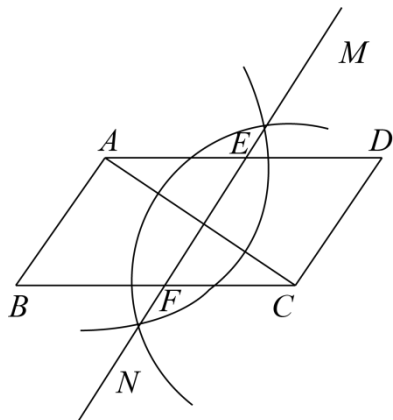
【解析】

【分析】 (1) 根据垂直平分线的作图方法进行作图即可；

(2) 设 EF 与 AC 交于点 O ，证明 $\triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，得到 $OE = OF$ ，得到四边形 $AFCE$ 为平行四边形，根据 $EF \perp AC$ ，即可得证.

【小问 1 详解】

解：如图所示， MN 即为所求；



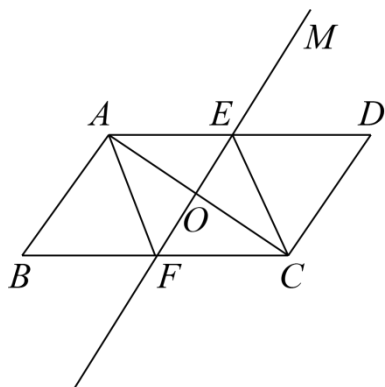
【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle CAE = \angle ACF$ ，

如图：设 EF 与 AC 交于点 O ，



$\because EF$ 是 AC 的垂直平分线，

$\therefore AO = OC$ ， $EF \perp AC$ ，

$\because \angle AOE = \angle COF$ ，

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$ (ASA)，

$\therefore OE = OF$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为平行四边形，

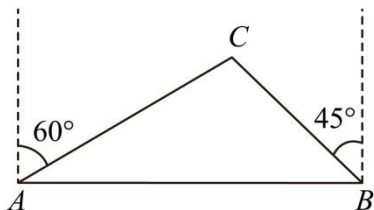
$\because EF \perp AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 为菱形.

【点睛】本题考查基本作图—作垂线，平行四边形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，菱形的判定. 熟

熟练掌握菱形的判定定理，是解题的关键.

21. 某次军事演习中，一艘船以 40km/h 的速度向正东航行，在出发地 A 测得小岛 C 在它的北偏东 60° 方向，2 小时后到达 B 处，测得小岛 C 在它的北偏西 45° 方向，求该船在航行过程中与小岛 C 的最近距离（参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ，结果精确到 0.1km ）.

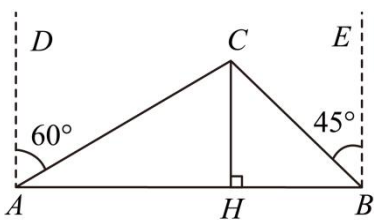


【答案】该船在航行过程中与小岛 C 的最近距离 29.3km .

【解析】

【分析】过点 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，先在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中，利用三角函数求出 CH 与 AH 的关系，然后在 $\text{Rt}\triangle CHB$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 BH 与 CH 的关系，从而利用线段的和差关系进行计算，即可解答；

【详解】解：过点 C 作 $CH \perp AB$ ，垂足为 H ，



解： $\because CH \perp AB$ ， $AD \perp AB$ ， $BE \perp AB$ ， $\angle CAD = 60^\circ$ ， $\angle CBE = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle AHC = \angle BHC = 90^\circ$ ， $\angle CAH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $\angle CBH = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ACH$ 中， $\tan \angle CAH = \tan 30^\circ = \frac{CH}{AH}$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{CH}{AH}$ ，

$$\therefore AH = \sqrt{3}CH,$$

在 $\text{Rt}\triangle CHB$ 中， $\tan \angle CBH = \tan 45^\circ = \frac{CH}{BH}$ ，即 $1 = \frac{CH}{BH}$ ，

$$\therefore BH = CH,$$

$$\therefore AB = AH + BH = (\sqrt{3} + 1)CH = 40 \times 2,$$

$$\therefore CH = 40\sqrt{3} - 40 \approx 40 \times 1.73 - 40 = 29.3 \text{ (km)},$$

$\therefore$ 该船在航行过程中与小岛 C 的最近距离 29.3km .

【点睛】本题主要考查了与方位角有关的解直角三角形，作出相应辅助线构造直角三角形是解题的关键.

22. 随旅游旺季的到来, 某景区游客人数逐月增加, 2 月份游客人数为 1.6 万人, 4 月份游客人数为 2.5 万人.

(1) 求这两个月中该景区游客人数的月平均增长率;

(2) 预计 5 月份该景区游客人数会继续增长, 但增长率不会超过前两个月的月平均增长率. 已知该景区 5 月 1 日至 5 月 21 日已接待游客 2.125 万人, 则 5 月份后 10 天日均接待游客人数最多是多少万人?

【答案】(1) 这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 25%

(2) 5 月份后 10 天日均接待游客人数最多是 1 万人

【解析】

【分析】(1) 设这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 x , 根据题意, 列出一元二次方程, 进行求解即可;

(2) 设 5 月份后 10 天日均接待游客人数是 y 万人, 根据题意, 列出不等式进行计算即可.

【小问 1 详解】

解: 设这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 x , 由题意, 得:

$$1.6(1+x)^2 = 2.5,$$

解得: $x = 0.25 = 25\%$ (负值已舍掉);

答: 这两个月中该景区游客人数的月平均增长率为 25%;

【小问 2 详解】

设 5 月份后 10 天日均接待游客人数是 y 万人, 由题意, 得:

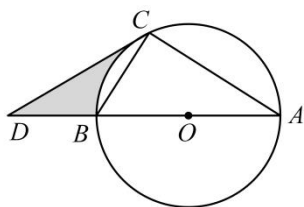
$$2.125 + y \leq 2.5(1 + 25\%),$$

解得: $y \leq 1$;

$\therefore$ 5 月份后 10 天日均接待游客人数最多是 1 万人.

【点睛】本题考查一元二次方程和一元一次不等式的实际应用, 找准等量关系, 正确的列出方程和不等式, 是解题的关键.

23. 如图, 在 $\odot O$ 中, AB 是直径, 点 C 是圆上一点. 在 AB 的延长线上取一点 D , 连接 CD , 使 $\angle BCD = \angle A$.



(1) 求证: 直线 CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $\angle ACD = 120^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$, 求图中阴影部分的面积 (结果用含 π 的式子表示).

【答案】(1) 见解析;

$$(2) 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

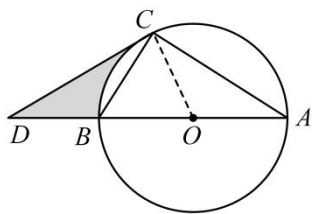
【解析】

【分析】(1) 连接 OC , 由 AB 是直径, 得 $\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = 90^\circ$, 再证 $\angle OCA = \angle A = \angle BCD$, 从而有 $\angle BCD + \angle OCB = \angle OCD = 90^\circ$, 于是即可证明结论成立;

(2) 由圆周角定理求得 $\angle AOC = 2\angle A = 60^\circ$, 在 $Rt\triangle OCD$ 中, 解直角三角形得 $OC = 2$, 从而利用扇形及三角形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OC ,



$\because AB$ 是直径,

$$\therefore \angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = 90^\circ,$$

$$\because OA = OC, \angle BCD = \angle A,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle A = \angle BCD,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle OCB = \angle OCD = 90^\circ,$$

$$\therefore OC \perp CD,$$

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 CD 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解: $\because \angle ACD = 120^\circ, \angle ACB = 90^\circ,$

$$\therefore \angle A = \angle BCD = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle A = 60^\circ,$$

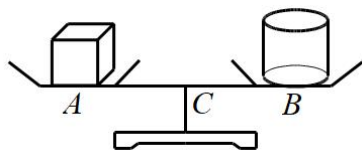
$$\because \text{在 } Rt\triangle OCD \text{ 中, } \tan \angle AOC = \frac{CD}{OC} = \tan 60^\circ, \quad CD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{OC} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } OC = 2,$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\triangle ACD} - S_{\text{扇形}BOC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 - \frac{60 \times \pi \times 2}{180} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

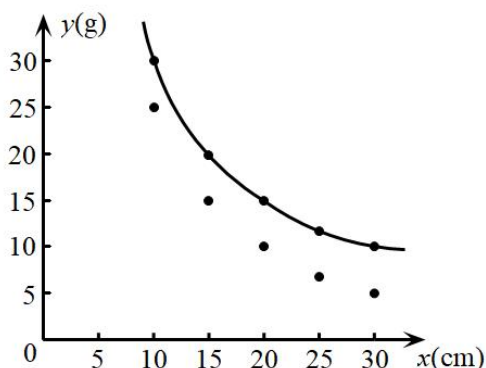
【点睛】本题主要考查了圆周角定理，切线的判定，扇形的面积公式以及解直角三角形，熟练掌握圆周角定理，切线的判定以及扇形的面积公式是解题的关键.

24. 在实验课上，小明做了一个试验. 如图，在仪器左边托盘 A（固定）中放置一个物体，在右边托盘 B（可左右移动）中放置一个可以装水的容器，容器的质量为 5g. 在容器中加入一定质量的水，可以使仪器左右平衡. 改变托盘 B 与点 C 的距离 x （cm）（ $0 < x \leq 60$ ），记录容器中加入的水的质量，得到下表：



托盘 B 与点 C 的距离 x / cm	30	25	20	15	10
容器与水的总质量 y_1 / g	10	12	15	20	30
加入的水的质量 y_2 / g	5	7	10	15	25

把上表中的 x 与 y_1 各组对应值作为点的坐标，在平面直角坐标系中描出这些点，并用光滑的曲线连接起来，得到如图所示的 y_1 关于 x 的函数图象.



(1) 请在该平面直角坐标系中作出 y_2 关于 x 的函数图象；

(2) 观察函数图象，并结合表中的数据：

①猜测 y_1 与 x 之间的函数关系，并求 y_1 关于 x 的函数表达式；

②求 y_2 关于 x 的函数表达式；

③当 $0 < x \leq 60$ 时， y_1 随 x 的增大而_____（填“增大”或“减小”）， y_2 随 x 的增大而_____

（填“增大”或“减小”）， y_2 的图象可以由 y_1 的图象向_____（以“上”或“下”或“左”或“右”）平移得到.

(3) 若在容器中加入的水的质量 y_2 (g) 满足 $19 \leq y_2 \leq 45$, 求托盘 B 与点 C 的距离 x (cm) 的取值范围.

【答案】(1) 作图见解析;

(2) ① $y_1 = \frac{300}{x}$; ② $y_2 = \frac{300}{x} - 5$; ③ 减小, 减小, 下;

(3) $6 \leq x \leq \frac{25}{2}$.

【解析】

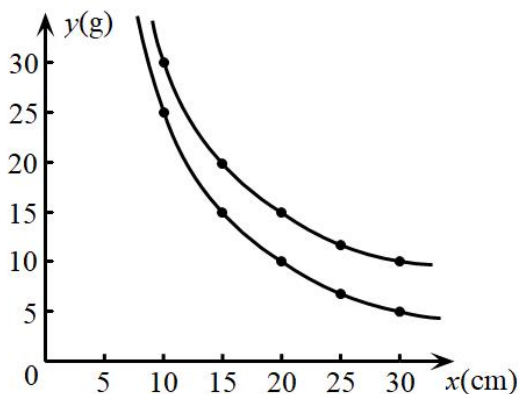
【分析】(1) 将平面直角坐标系中的点用平滑曲线连接即可;

(2) ① 观察图象可知, 函数可能是反比例函数, 设 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 把 $(30, 10)$ 的坐标代入, 得 $k = 300$, 再检验其余各个点是否满足即可; ② 根据 $y_2 + 5$ 可能与 x 成反比例, 设 $y_2 + 5 = \frac{m}{x} (k \neq 0)$, 即可得解; ③ 跟图像结合解析式作答即可.

(3) 利用反比例函数的性质即可解决问题.

【小问 1 详解】

解: 函数图象如图所示,



【小问 2 详解】

解: ① 观察图象可知, y_1 可能是 x 反比例函数, 设 $y_1 = \frac{k}{x} (k \neq 0)$,

把 $(30, 10)$ 的坐标代入 $y_1 = \frac{k}{x}$, 得 $k = 300$,

经检验, 其余各个点坐标均满足 $y_1 = \frac{300}{x}$,

$\therefore y_1$ 关于 x 的函数表达式 $y_1 = \frac{300}{x}$;

② 观察表格以及①可知, $y_2 + 5$ 可能与 x 成反比例, 设 $y_2 + 5 = \frac{m}{x} (k \neq 0)$,

把 $(30, 5)$ 的坐标代入 $y_2 + 5 = \frac{m}{x}$, 得 $m = 300$,

经检验, 其余各个点坐标均满足 $y_2 + 5 = \frac{300}{x}$,

$\therefore y_2$ 关于 x 的函数表达式 $y_2 = \frac{300}{x} - 5$;

③由图图像可知，当 $0 < x \leq 60$ 时， y_1 随 x 的增大而减小， y_2 随 x 的增大而减小， y_2 的图象可以由 y_1 的图象向下平移得到，

故答案为：减小，减小，下；

【小问 3 详解】

解：当 $y_2 = 19$ 时， $19 = \frac{300}{x} - 5$ 解得 $x = \frac{25}{2}$ ，

当 $y_2 = 45$ 时， $45 = \frac{300}{x} - 5$ 解得 $x = 6$ ，

$\therefore$ 托盘 B 与点 C 的距离 x (cm) 的取值范围 $6 \leq x \leq \frac{25}{2}$ 。

【点睛】本题考查反比例函数的应用、描点法画图等知识，解题的关键是熟练掌握反比例函数的性质，属于基础题，中考常考题型。

25. 已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D 是射线 AB 上的一个动点，延长 BC 至点 E ，使 $CE = AD$ ，连接 DE 交射线 AC 于点 F 。

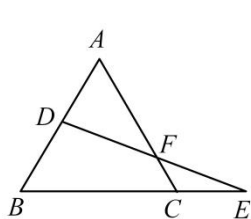


图1

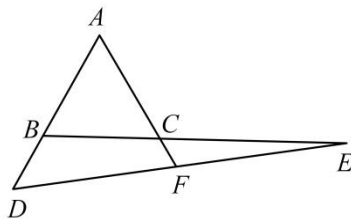


图2

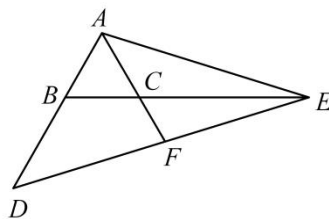


图3

(1) 如图 1，当点 D 在线段 AB 上时，猜测线段 CF 与 BD 的数量关系并说明理由；

(2) 如图 2，当点 D 在线段 AB 的延长线上时，

①线段 CF 与 BD 的数量关系是否仍然成立？请说明理由；

②如图 3，连接 AE 。设 $AB = 4$ ，若 $\angle AEB = \angle DEB$ ，求四边形 $BDFC$ 的面积。

【答案】(1) $CF = \frac{1}{2}BD$ ，理由见解析

(2) ①成立，理由见解析② $4\sqrt{3} + 6\sqrt{6}$

【解析】

【分析】(1) 过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 AC 于点 G ，易得 $BD = CG$ ，证明 $\triangle DGF \cong \triangle ECF$ ，得到 $CF = FG = \frac{1}{2}CG$ ，即可得出结论。

(2) ①过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 AC 的延长线于点 G ，易得 $BD = CG$ ，证明 $\triangle DGF \cong \triangle ECF$ ，得到 $CF = FG = \frac{1}{2}CG$ ，即可得出结论；②过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 AC 的延长线于点 G ，过点 A 作 $AN \perp DG$ ，

交 BC 于点 H ，交 DE 于点 N ，根据已知条件推出 $\tan \angle AEH = \tan \angle MDN$ ，得到 $\frac{AH}{EH} = \frac{MN}{DN}$ ，证明 $\triangle ABC \sim \triangle ADG$ ，得到 $\frac{BC}{DG} = \frac{AH}{AN} = \frac{AH}{AM + MN}$ ，求出 DG 的长，利用四边形 $BDFC$ 的面积为 $S_{\triangle ADG} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DFG} = S_{\triangle ADG} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CEF}$ 进行求解即可。

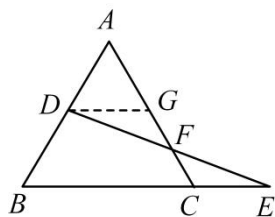
【小问 1 详解】

解： $CF = \frac{1}{2}BD$ ，理由如下：

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AC = BC, \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$ ，

过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 AC 于点 G ，



$\therefore \angle ADG = \angle ABC = 60^\circ, \angle AGD = \angle ACB = 60^\circ, \angle GDF = \angle CEF$ ，

$\therefore \triangle ADG$ 为等边三角形，

$\therefore AD = AG = DG$ ，

$\because AD = CE, AB - AD = AC - AG$ ，

$\therefore DG = CE, BD = CG$ ，

又 $\angle DFG = \angle CFE$ ，

$\therefore \triangle DGF \cong \triangle ECF$ (AAS)，

$\therefore CF = FG = \frac{1}{2}CG$ ，

$\therefore CF = \frac{1}{2}BD$ ；

【小问 2 详解】

①成立，理由如下：

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AC = BC, \angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$ ，

过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 AC 的延长线于点 G ，

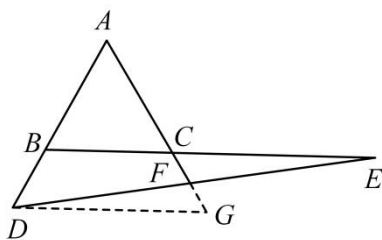


图2

$$\therefore \angle ADG = \angle ABC = 60^\circ, \angle AGD = \angle ACB = 60^\circ, \angle GDF = \angle CEF,$$

$\therefore \triangle ADG$ 为等边三角形,

$$\therefore AD = AG = DG,$$

$$\therefore AD = CE, AD - AB = AG - AC,$$

$$\therefore DG = CE, BD = CG,$$

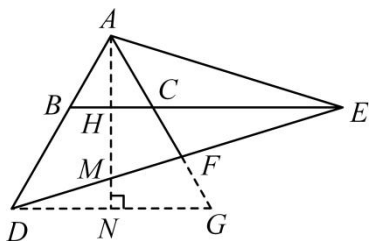
又 $\angle DFG = \angle CFE$,

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle ECF (\text{AAS}),$$

$$\therefore CF = FG = \frac{1}{2}CG,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}BD;$$

②过点 D 作 $DG \parallel BC$, 交 AC 的延长线于点 G , 过点 A 作 $AN \perp DG$, 交 BC 于点 H , 交 DE 于点 N , 则: $AN \perp BC$,



由①知: $\triangle ADG$ 为等边三角形, $\triangle DGF \cong \triangle ECF (\text{AAS})$, $CF = FG = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore AB = AC = BC = 4, BH = CH = \frac{1}{2}BC = 2,$$

$$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \angle AEB = \angle DEB, EH = EH, \angle AHE = \angle MHE = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle MEH,$$

$$\therefore MH = AH = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AM = 2AH = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle ECF (\text{AAS}),$$

$$\therefore \angle CEF = \angle MDN, \quad DG = CE,$$

$$\therefore \angle AEH = \angle MDN,$$

$$\therefore \tan \angle AEH = \tan \angle MDN,$$

$$\therefore \frac{AH}{EH} = \frac{MN}{DN},$$

$$\text{设 } MN = y, DG = CE = x, \text{ 则: } EH = CE + CH = 2 + x, \quad DN = \frac{1}{2}DG = \frac{1}{2}x,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{x+2} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \quad \text{①},$$

$$\therefore DG \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADG,$$

$$\therefore \frac{BC}{DG} = \frac{AH}{AN} = \frac{AH}{AM + MN}, \quad \text{即: } \frac{4}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3} + y} \quad \text{②},$$

$$\text{联立①②可得: } x = 4\sqrt{2} + 4 \quad (\text{负值已舍去}),$$

经检验 $x = 4\sqrt{2} + 4$ 是原方程的根,

$$\therefore DG = CE = 4\sqrt{2} + 4, \quad DN = 2\sqrt{2} + 2, \quad CF = FG = \frac{1}{2}(x - 4) = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore AN = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}CE \cdot AH = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} + 4) \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{6} + 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle CEF}} = \frac{AC}{CF} = \frac{4}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = \frac{\sqrt{2}}{2}(4\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \text{四边形 } BDFC \text{ 的面积为 } S_{\triangle ADG} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DFG} = S_{\triangle ADG} - S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CEF}$$

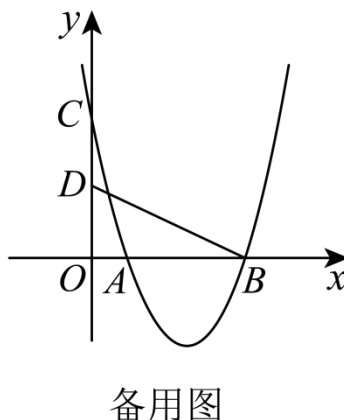
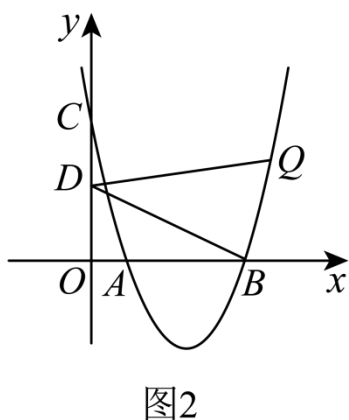
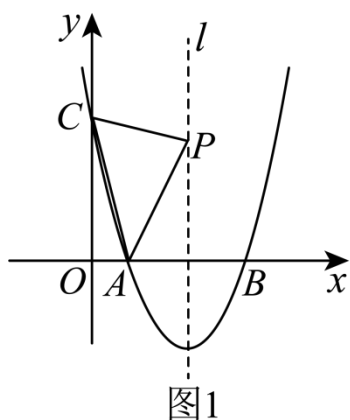
$$= \frac{1}{2}(4\sqrt{2} + 4)(2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}) - \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

$$= 4\sqrt{3} + 6\sqrt{6}.$$

【点睛】 本题考查等边三角形的性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，解直角三角

形. 本题的综合性强, 难度大, 属于中考压轴题, 解题的关键是添加辅助线构造特殊三角形, 全等和相似三角形.

26. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于点 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$, 与 y 轴相交于点 C .



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如图 1, 点 P 是抛物线的对称轴 l 上的一个动点, 当 $\triangle PAC$ 的周长最小时, 求 $\frac{PA}{PC}$ 的值;

(3) 如图 2, 取线段 OC 的中点 D , 在抛物线上是否存在点 Q , 使 $\tan \angle QDB = \frac{1}{2}$? 若存在, 求出点 Q 的

坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = x^2 - 5x + 4$

(2) $\frac{3}{5}$

(3) $Q\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, 2\right)$ 或 $Q\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 2\right)$ 或 $Q(3, -2)$ 或 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{9}\right)$

【解析】

【分析】 (1) 待定系数法求函数解析式即可;

(2) 根据 $\triangle PAC$ 的周长等于 $PA + PC + AC$, 以及 AC 为定长, 得到当 $PA + PC$ 的值最小时, $\triangle PAC$ 的周长最小, 根据抛物线的对称性, 得到 A, B 关于对称轴对称, 则: $PA + PC = PB + PC \geq BC$, 得到当 P, B, C 三点共线时, $PA + PC = BC$, 进而求出 P 点坐标, 即可得解;

(3) 求出 D 点坐标为 $(0, 2)$, 进而得到 $\tan \angle OBD = \frac{1}{2}$, 得到 $\angle QDB = \angle OBD$, 分点 Q 在 D 点上方和下方, 两种情况进行讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 与 x 轴相交于点 $A(1, 0)$, $B(4, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} a + b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \end{cases},$$

$$\therefore y = x^2 - 5x + 4;$$

【小问 2 详解】

$$\therefore y = x^2 - 5x + 4, \text{ 当 } x = 0 \text{ 时, } y = 4,$$

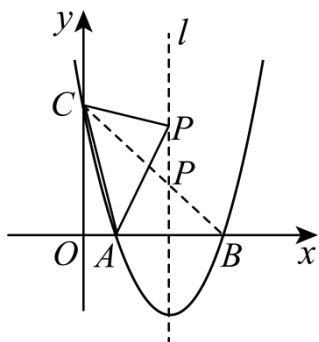
$$\therefore C(0, 4), \text{ 抛物线的对称轴为直线 } x = \frac{5}{2}$$

∵ $\triangle PAC$ 的周长等于 $PA + PC + AC$, AC 为定长,

∴ 当 $PA + PC$ 的值最小时, $\triangle PAC$ 的周长最小,

∵ A, B 关于对称轴对称,

∴ $PA + PC = PB + PC \geq BC$, 当 P, B, C 三点共线时, $PA + PC$ 的值最小, 为 BC 的长, 此时点 P 为直线 BC 与对称轴的交点,



设直线 BC 的解析式为: $y = mx + n$,

$$\text{则: } \begin{cases} 4m + n = 0 \\ n = 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m = -1 \\ n = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 4,$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = -\frac{5}{2} + 4 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore A(1, 0), C(0, 4),$$

$$\therefore PA = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad PC = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \frac{PA}{PC} = \frac{3}{5};$$

【小问3详解】

解：存在，

$\because D$ 为 OC 的中点，

$$\therefore D(0, 2),$$

$$\therefore OD = 2,$$

$$\therefore B(4, 0),$$

$$\therefore OB = 4,$$

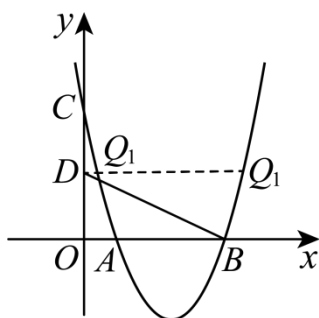
$$\text{在 Rt}\triangle BOD \text{ 中, } \tan \angle OBD = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle QDB = \frac{1}{2} = \tan \angle OBD,$$

$$\therefore \angle QDB = \angle OBD,$$

①当 Q 点在 D 点上方时：

过点 D 作 $DQ \parallel OB$ ，交抛物线与点 Q ，则： $\angle QDB = \angle OBD$ ，此时 Q 点纵坐标为 2，



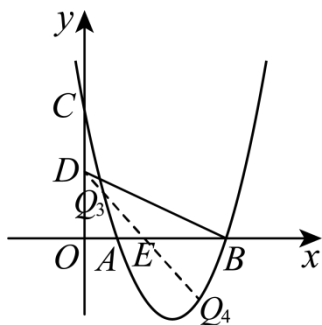
设 Q 点横坐标为 t ，

$$\text{则：} t^2 - 5t + 4 = 2,$$

$$\text{解得：} t = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore Q\left(\frac{5 + \sqrt{17}}{2}, 2\right) \text{ 或 } Q\left(\frac{5 - \sqrt{17}}{2}, 2\right);$$

②当点 Q 在 D 点下方时：设 DQ 与 x 轴交于点 E ，



则： $DE = BE$,

设 $E(p, 0)$,

则： $DE^2 = OE^2 + OD^2 = p^2 + 4$, $BE^2 = (4 - p)^2$,

$\therefore p^2 + 4 = (4 - p)^2$, 解得： $p = \frac{3}{2}$,

$\therefore E\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,

设 DE 的解析式为： $y = kx + q$,

则： $\begin{cases} q = 2 \\ \frac{3k}{2} + q = 0 \end{cases}$, 解得： $\begin{cases} q = 2 \\ k = -\frac{4}{3} \end{cases}$,

$\therefore y = -\frac{4}{3}x + 2$,

联立 $\begin{cases} y = -\frac{4}{3}x + 2 \\ y = x^2 - 5x + 4 \end{cases}$, 解得： $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{10}{9} \end{cases}$,

$\therefore Q(3, -2)$ 或 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{9}\right)$;

综上： $Q\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, 2\right)$ 或 $Q\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 2\right)$ 或 $Q(3, -2)$ 或 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{9}\right)$.

【点睛】 本题考查二次函数的综合应用，正确的求出二次函数解析式，利用数形结合，分类讨论的思想进行求解，是解题的关键。本题的综合性强，难度较大，属于中考压轴题。

