

2023 年邵阳市初中学业水平考试试题卷

数学

温馨提示：

(1) 本学科试卷分试题卷和答题卡两部分，考试时量为 120 分钟，满分 120 分.

(2) 请你将姓名、准考证号等相关信息按要求填涂在答题卡上.

(3) 请在答题卡上作答，做在本试题卷上的答案无效.

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个项是符合题目要求的）

1. 2023 的倒数是 ()

- A. -2023 B. 2023 C. $\frac{1}{2023}$ D. $-\frac{1}{2023}$

【答案】C

【解析】

【分析】直接利用倒数的定义，即若两个不为零的数的积为 1，则这两个数互为倒数，即可一一判定.

【详解】解：2023 的倒数为 $\frac{1}{2023}$.

故选 C.

【点睛】此题主要考查了倒数的定义，熟练掌握和运用倒数的求法是解决本题的关键.

2. 下列四个图形中，是中心对称图形的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，这个图形就是中心对称图形，据此来分析判断即可得解.

【详解】解：A 选项，是中心对称图形，故本选项符合题意；

B 选项，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

C 选项，不是中心对称图形，故本选项不符合题意；

D 选项，不是中心对称图形，故本选项不符合题意.

故选 A.

【点睛】本题考查了中心对称图形的识别，掌握中心对称图形的概念是求解关键.

3. 党的二十大报告提出，要坚持以文塑旅、以旅彰文，推进文化和旅游深度融合发展. 湖南是文化旅游资源大省，深挖红色文化、非遗文化和乡村文化，推进文旅产业赋能乡村振兴. 湖南红色旅游区（点）2022 年接待游客约 165000000 人次，则 165000000 用科学记数法可表示为（ ）

- A. 0.165×10^9 B. 1.65×10^8 C. 1.65×10^7 D. 16.5×10^7

【答案】B

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数.

【详解】解： $165000000 = 1.65 \times 10^8$ ，

故选 B

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 下列计算正确的是（ ）

- A. $\frac{a^6}{a^3} = a^2$ B. $(a^2)^3 = a^5$ C. $\frac{a}{(a+b)^2} + \frac{b}{(a+b)^2} = a+b$ D. $\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据分式的约分可判断 A，根据幂的乘方运算可判断 B，根据分式的加法运算可判断 C，根据零指数幂的含义可判断 D，从而可得答案.

【详解】解： $\frac{a^6}{a^3} = a^3$ ，故 A 不符合题意；

$(a^2)^3 = a^6$ ，故 B 不符合题意；

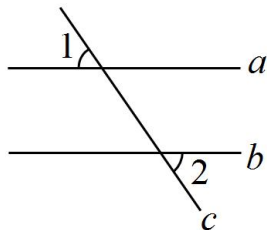
$\frac{a}{(a+b)^2} + \frac{b}{(a+b)^2} = \frac{a+b}{(a+b)^2} = \frac{1}{a+b}$ ，故 C 不符合题意；

$\left(-\frac{1}{3}\right)^0 = 1$ ，运算正确，故 D 符合题意；

故选 D

【点睛】 本题考查分式的约分，幂的乘方运算，分式的加法运算，零指数幂，熟记运算法则是解本题的关键.

5. 如图，直线 a, b 被直线 c 所截，已知 $a \parallel b, \angle 1 = 50^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的大小为 ()



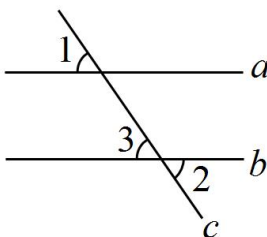
- A. 40° B. 50° C. 70° D. 130°

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据两直线平行，同位角相等，对顶角相等，计算即可.

【详解】 如图， $\because a \parallel b, \angle 1 = 50^\circ$,



$$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 50^\circ,$$

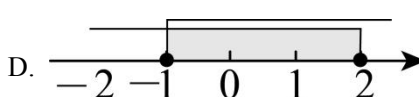
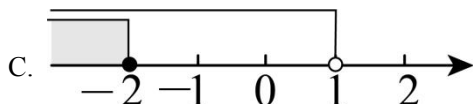
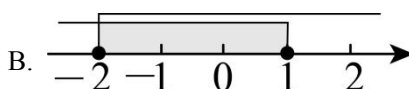
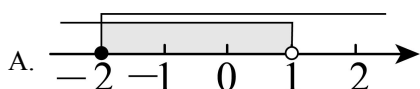
$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle 2 = 50^\circ,$$

故选 B.

【点睛】 本题考查了平行线的性质，对顶角的性质，熟练掌握这些基本性质是解题的关键.

6. 不等式组 $\begin{cases} x-1 < 0 \\ -2x \leq 4 \end{cases}$ 的解集在数轴上可表示为 ()



【答案】 A

【解析】

【分析】分别解不等式组中的两个不等式，再确定两个不等式的解集的公共部分，再在数轴上表示即可.

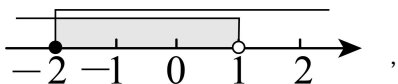
【详解】解：
$$\begin{cases} x-1 < 0 \text{ ①} \\ -2x \leq 4 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得： $x < 1$,

由②得： $x \geq -2$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $-2 \leq x < 1$,

在数轴上表示如下：



故选 A

【点睛】本题考查的是一元一次不等式组的解法，在数轴上表示不等式组的解集，熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

7. 有数字 4, 5, 6 的三张卡片, 将这三张卡片任意摆成一个三位数, 摆出的三位数是 5 的倍数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意列出所有可能，根据概率公式即可求解.

【详解】 $\because$ 有数字 4, 5, 6 的三张卡片，将这三张卡片任意摆成一个三位数，

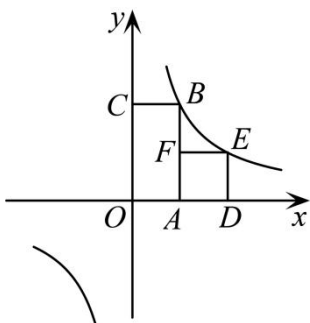
$\therefore$ 摆出的三位数有 456, 465, 546, 564, 654, 645 共 6 种可能，其中 465, 645 是 5 的倍数，

$\therefore$ 摆出的三位数是 5 的倍数的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

故选：C.

【点睛】本题考查了列举法求概率，熟练掌握概率公式是解题的关键.

8. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 B 和正方形 $ADEF$ 的顶点 E 都在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图像上，点 B 的坐标为 $(2, 4)$ ，则点 E 的坐标为 ()



A. (4,4)

B. (2,2)

C. (2,4)

D. (4,2)

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过 $(2,4)$ 确定解析式为 $y = \frac{8}{x}$ ，设正方形的边长为 x ，则点 $E(2+x, x)$ ，代入解析式计算即可。

【详解】 $\because y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 经过 $(2,4)$,

$\therefore$ 解析式为 $y = \frac{8}{x}$,

设正方形的边长为 x ，则点 $E(2+x, x)$,

$\therefore (2+x)x = 8$,

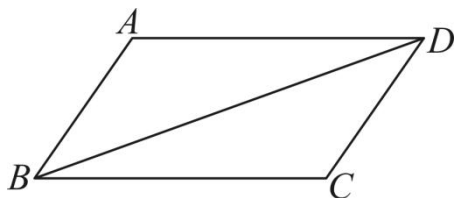
解得 $x_1 = 2, x_2 = -4$ (舍去),

故点 $E(4,2)$,

故选 D.

【点睛】本题考查了反比例函数的解析式，正方形的性质，解方程，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键。

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，若添加一个条件，使四边形 $ABCD$ 为平行四边形，则下列正确的是 ()

A. $AD = BC$ B. $\angle ABD = \angle BDC$ C. $AB = AD$ D. $\angle A = \angle C$

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行四边形的判定定理逐项分析判断即可求解。

【详解】解：A. 根据 $AB \parallel CD$ ， $AD = BC$ ，不能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故该选项不正确，不符合题意；

B. $\because AB \parallel CD$ ， $\therefore \angle ABD = \angle BDC$ ，不能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故该选项不正确，不符合题意；

C. 根据 $AB \parallel CD$ ， $AB = AD$ ，不能判断四边形 $ABCD$ 为平行四边形，故该选项不正确，不符合题意；

D. $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle ABC + \angle C = 180^\circ$,

$\because \angle A = \angle C$

$\therefore \angle ABC + \angle A = 180^\circ$,

$\therefore AD \parallel BC$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形,

故该选项正确, 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查了平行四边形的判定定理, 熟练掌握平行四边形的判定定理是解题的关键.

10. 已知 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 是抛物线 $y = ax^2 + 4ax + 3$ (a 是常数, $a \neq 0$) 上的点, 现有以下四个结论:

①该抛物线的对称轴是直线 $x = -2$; ②点 $(0, 3)$ 在抛物线上; ③若 $x_1 > x_2 > -2$, 则 $y_1 > y_2$; ④若 $y_1 = y_2$,

则 $x_1 + x_2 = -2$ 其中, 正确结论的个数为 ()

A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据对称轴公式 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4a}{2a} = -2$ 可判断①; 当 $x = 0$ 时, $y = 3$, 可判断②; 根据抛物线的增减性, 分两种情况计算可判断③; 利用对称点的坐标得到 $\frac{x_1 + x_2}{2} = -2$, 可以判断④.

【详解】解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + 4ax + 3$ (a 是常数, $a \neq 0$),

$$\therefore x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4a}{2a} = -2,$$

故①正确;

当 $x = 0$ 时, $y = 3$,

$\therefore$ 点 $(0, 3)$ 在抛物线上,

故②正确;

当 $a > 0$ 时, $y_1 > y_2$,

当 $a < 0$ 时, $y_1 < y_2$,

故③错误;

根据对称点的坐标得到 $\frac{x_1 + x_2}{2} = -2$,

$$x_1 + x_2 = -4,$$

故④错误.

故选 B.

【点睛】本题考查了抛物线的对称性，增减性，熟练掌握抛物线的性质是解题的关键.

二、填空题（本大题有 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分）

11. $\sqrt{64}$ 的立方根是_____.

【答案】 2

【解析】

【分析】 $\sqrt{64}$ 的值为 8，根据立方根的定义即可求解.

【详解】解： $\sqrt{64} = 8$ ，8 的立方根是 2，

故答案为： 2.

【点睛】本题考查算术平方根和立方根的定义，明确算术平方根和立方根的定义是解题的关键.

12. 分解因式： $3a^2+6ab+3b^2=$ _____.

【答案】 $3(a+b)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式 3，再根据完全平方公式进行二次分解. 完全平方公式： $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$.

【详解】 $3a^2+6ab+3b^2=3(a^2+2ab+b^2)=3(a+b)^2$.

故答案为： $3(a+b)^2$.

【点睛】本题考查了提公因式法，公式法分解因式. 提取公因式后利用完全平方公式进行二次分解，注意分解要彻底.

13. 分式方程 $\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} = 0$ 的解是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】根据解分式方程的步骤计算即可.

【详解】去分母得： $2(x-2)-x=0$ ，

解得： $x = 4$ ，

经检验 $x = 4$ 是方程的解，

故答案为： $x = 4$.

【点睛】本题考查解分式方程，正确计算是解题的关键，注意要检验.

14. 下表是小红参加一次“阳光体育”活动比赛的得分情况：

项目	跑步	花样跳绳	跳绳
得分	90	80	70

评总分时，按跑步占 50%，花样跳绳占 30%，跳绳占 20% 考评，则小红的最终得分为_____.

【答案】 83 分

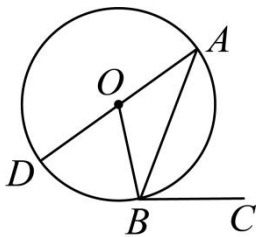
【解析】

【分析】 根据加权平均数公式进行计算即可.

【详解】 解：由跑步占 50%，花样跳绳占 30%，跳绳占 20% 考评，
则小红的最终得分为 $90 \times 50\% + 80 \times 30\% + 70 \times 20\% = 45 + 24 + 14 = 83$ （分），
故答案为：83 分.

【点睛】 本题考查的是加权平均数的含义，熟记加权平均数公式是解本题的关键.

15. 如图， AD 是 $\odot O$ 的直径， AB 是 $\odot O$ 的弦， BC 与 $\odot O$ 相切于点 B ，连接 OB ，若 $\angle ABC = 65^\circ$ ，则 $\angle BOD$ 的大小为_____.



【答案】 50°

【解析】

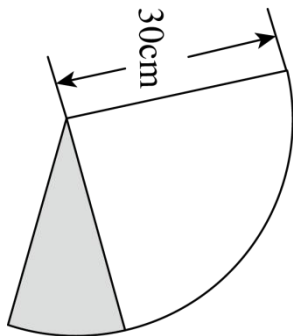
【分析】 证明 $\angle OBC = 90^\circ$ ，可得 $\angle OBD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ ，结合 $OB = OA$ ，证明 $\angle A = \angle OBA = 25^\circ$ ，再利用三角形的外角的性质可得答案.

【详解】 解： $\because BC$ 与 $\odot O$ 相切于点 B ，
 $\therefore \angle OBC = 90^\circ$ ，
 $\because \angle ABC = 65^\circ$ ，
 $\therefore \angle OBD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$ ，
 $\because OB = OA$ ，
 $\therefore \angle A = \angle OBA = 25^\circ$ ，
 $\therefore \angle BOD = 2 \times 25^\circ = 50^\circ$ ，
故答案为： 50°

【点睛】 本题考查的是圆的切线的性质，等腰三角形的性质，三角形的外角的性质，熟记基本图形的性质

是解本题的关键.

16. 如图, 某数学兴趣小组用一张半径为 30cm 的扇形纸板做成一个圆锥形帽子 (接缝忽略不计), 如果做成的圆锥形帽子的底面半径为 8cm , 那么这张扇形纸板的面积为_____ cm^2 . (结果保留 π)



【答案】 240π

【解析】

【分析】 根据圆锥底面半径, 可以求出圆锥底面周长, 底面圆周长即是扇形的弧长, 根据扇形面积公式 $S = \frac{1}{2}lr$ 可求出扇形面积.

【详解】 解: 帽子底面圆周长为: $2 \times 8\pi = 16\pi$,
则扇形弧长为 16π , 扇形面积 $= \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 16\pi \times 30 = 240\pi (\text{cm}^2)$

故答案为: 240π

【点睛】 本题考查了扇形面积的计算, 掌握圆锥的性质和扇形的面积公式是求解的关键.

17. 某校截止到 2022 年底, 校园绿化面积为 1000 平方米. 为美化环境, 该校计划 2024 年底绿化面积达到 1440 平方米. 利用方程想想, 设这两年绿化面积的年平均增长率为 x , 则依题意列方程为_____.

【答案】 $1000(1+x)^2 = 1440$

【解析】

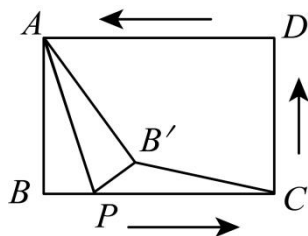
【分析】 设这两年绿化面积的年平均增长率为 x , 依题意列出一元二次方程即可求解.

【详解】 解: 设这两年绿化面积的年平均增长率为 x , 则依题意列方程为 $1000(1+x)^2 = 1440$,

故答案为: $1000(1+x)^2 = 1440$.

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用, 根据题意列出一元二次方程是解题的关键.

18. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2, AD = \sqrt{7}$, 动点 P 在矩形的边上沿 $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ 运动. 当点 P 不与点 A, B 重合时, 将 $\triangle ABP$ 沿 AP 对折, 得到 $\triangle AB'P$, 连接 CB' , 则在点 P 的运动过程中, 线段 CB' 的最小值为_____.



【答案】 $\sqrt{11} - 2$ 或 $-2 + \sqrt{11}$

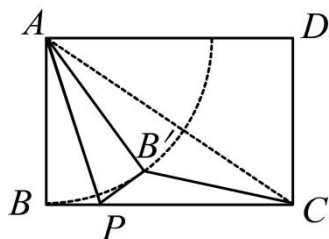
【解析】

【分析】根据折叠的性质得出 B' 在以 A 为圆心， 2 为半径的弧上运动，进而分类讨论当点 P 在 BC 上时，当点 P 在 DC 上时，当 P 在 AD 上时，即可求解。

【详解】解：∵ 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2, AD = \sqrt{7}$ ，

$$\therefore BC = AD = \sqrt{7}, \quad AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{7 + 4} = \sqrt{11},$$

如图所示，当点 P 在 BC 上时，



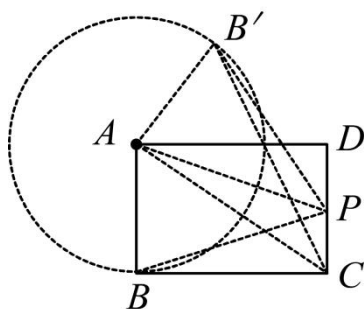
$$\therefore AB' = AB = 2$$

∴ B' 在以 A 为圆心， 2 为半径的弧上运动，

当 A, B', C 三点共线时， CB' 最短，

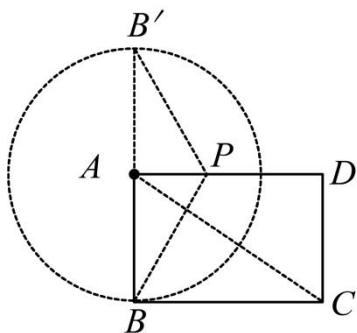
$$\text{此时 } CB' = AC - AB' = \sqrt{11} - 2,$$

当点 P 在 DC 上时，如图所示，



$$\text{此时 } CB' > \sqrt{11} - 2$$

当 P 在 AD 上时，如图所示，此时 $CB' > \sqrt{11} - 2$



综上所述， CB' 的最小值为 $\sqrt{11} - 2$ ，

故答案为： $\sqrt{11} - 2$.

【点睛】 本题考查了矩形与折叠问题，圆外一点到圆上的距离的最值问题，熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

三、解答题 (本大题有 8 个小题，第 19 – 25 题每题 8 分，第 26 题 10 分，共 56 分，解答应写出必要的文字说明、演算步骤或证明过程)

19. 计算： $\tan 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |-2|$.

【答案】 5

【解析】

【分析】 根据 $\tan 45^\circ = 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $|-2| = 2$ 计算即可.

【详解】 解： $\tan 45^\circ + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |-2|$

$$= 1 + 2 + 2$$

$$= 5 .$$

【点睛】 本题考查了特殊角的三角函数值，负整数指数幂，绝对值，熟练掌握特殊角的三角函数值，负整数指数幂的运算法则是解题的关键.

20. 先化简，再求值： $(a - 3b)(a + 3b) + (a - 3b)^2$ ，其中 $a = -3$, $b = \frac{1}{3}$.

【答案】 $2a^2 - 6ab$ ， 24

【解析】

【分析】 先展开，合并同类项，后代入计算即可.

【详解】 $(a - 3b)(a + 3b) + (a - 3b)^2$

$$= a^2 - 9b^2 + a^2 - 6ab + 9b^2$$

$$= 2a^2 - 6ab$$

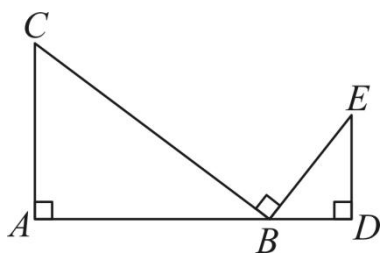
当 $a = -3, b = \frac{1}{3}$ 时,

$$\text{原式} = 2 \times (-3)^2 - 6 \times (-3) \times \frac{1}{3}$$

$$= 24.$$

【点睛】 本题考查了平方差公式，完全平方公式的计算，熟练掌握两个公式是解题的关键.

21. 如图, $CA \perp AD, ED \perp AD$, 点 B 是线段 AD 上的一点, 且 $CB \perp BE$. 已知 $AB = 8, AC = 6, DE = 4$.



(1) 证明: $\triangle ABC \sim \triangle DEB$.

(2) 求线段 BD 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) $BD = 3$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得出 $\angle A = \angle D = 90^\circ, \angle C + \angle ABC = 90^\circ, \angle ABC + \angle EBD = 90^\circ$, 则 $\angle C = \angle EBD$, 即可得证;

(2) 根据 (1) 的结论, 利用相似三角形的性质列出比例式, 代入数据即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AC \perp AD, ED \perp AD$,

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ, \angle C + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because CE \perp BE,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle EBD,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEB;$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ABC \sim \triangle DEB,$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{BD},$$

$$\because AB = 8, AC = 6, DE = 4,$$

$$\therefore \frac{8}{4} = \frac{6}{BD},$$

解得： $BD = 3$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

22. 低碳生活已是如今社会的一种潮流形式，人们的环保观念也在逐渐加深. “低碳环保，绿色出行”成为大家的生活理念，不少人选择自行车出行. 某公司销售甲、乙两种型号的自行车，其中甲型自行车进货价格为每台 500 元，乙型自行车进货价格为每台 800 元. 该公司销售 3 台甲型自行车和 2 台乙型自行车，可获利 650 元，销售 1 台甲型自行车和 2 台乙型自行车，可获利 350 元.

(1) 该公司销售一台甲型、一台乙型自行车的利润各是多少元？

(2) 为满足大众需求，该公司准备加购甲、乙两种型号的自行车共 20 台，且资金不超过 13000 元，最少需要购买甲型自行车多少台？

【答案】 (1) 该公司销售一台甲型、一台乙型自行车的利润分别为 150, 100 元

(2) 最少需要购买甲型自行车 10 台

【解析】

【分析】 (1) 该公司销售一台甲型、一台乙型自行车的利润分别为 x, y 元，根据题意列出二元一次方程组，解方程组即可求解；

(2) 设需要购买甲型自行车 a 台，则购买乙型自行车 $(20 - a)$ 台，依题意列出不等式，解不等式求最小整数解，即可求解.

【小问 1 详解】

解： 该公司销售一台甲型、一台乙型自行车的利润分别为 x, y 元，根据题意得，

$$\begin{cases} 3x + 2y = 650 \\ x + 2y = 350 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 150 \\ y = 100 \end{cases},$$

答： 该公司销售一台甲型、一台乙型自行车的利润分别为 150, 100 元；

【小问 2 详解】

设需要购买甲型自行车 a 台，则购买乙型自行车 $(20 - a)$ 台，依题意得，

$$500a + 800(20 - a) \leq 13000,$$

解得： $a \geq 10$ ，

$\therefore a$ 为正整数，

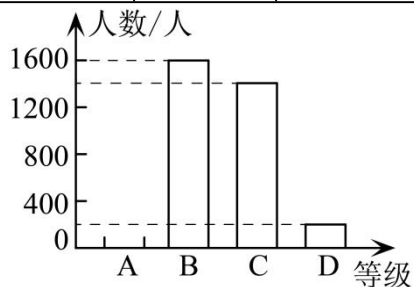
$\therefore a$ 的最小值为 10，

答：最少需要购买甲型自行车 10 台.

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用，一元一次不等式的应用，根据题意列出方程组以及不等式是解题的关键.

23. 某市对九年级学生进行“综合素质”评价，评价的结果为 A（优）、B（良好）、C（合格）、D（不合格）四个等级. 现从中随机抽测了若干名学生的“综合素质”等级作为样本进行数据处理，并作出了如下频数分布图和如图（八）所示的条形统计图（不完整）. 请根据图表中的信息回答下列问题.

等级	频数	频率
A	a	0.2
B	1600	b
C	1400	0.35
D	200	0.05



- (1) 求频数分布表中 a , b 的值.
- (2) 补全条形统计图.
- (3) 该市九年级学生约 80000 人，试估计该市有多少名九年级学生可以评为“A”级.

【答案】 (1) a 的值为 800， b 的值为 0.4 .

(2) 见解析. (3) 16000

【解析】

【分析】 (1) 根据 D 等级的频数和频率即可求出样本容量，进而求出 a 的值，然后用 B 的频数除以样本数量即可求出 b 的值；

(2) 按照统计图的画法补全即可；

(3) 用总体数量乘以 A 等级的频率即可求解.

【小问 1 详解】

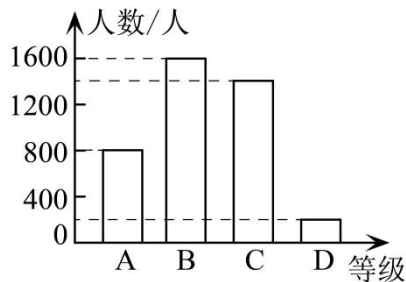
解：样本容量： $200 \div 0.05 = 4000$,

则 $a = 4000 \times 0.2 = 800$, $b = 1600 \div 4000 = 0.4$

故 a 的值为 800 , b 的值为 0.4 .

【小问 2 详解】

解：如图



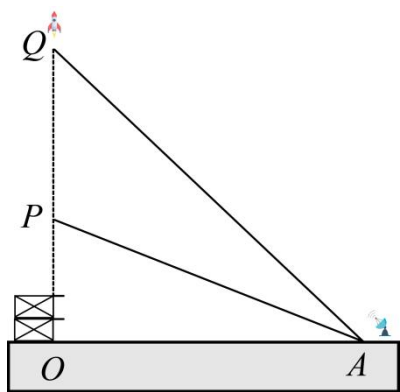
【小问 3 详解】

解： $80000 \times 0.2 = 16000$ (名)

答：该市约有 16000 名九年级学生可以评为“A”级.

【点睛】本题主要考查了条形统计图的运用，能读懂统计图，并熟练掌握频数、频率的概念是求解的关键.

24. 我国航天事业捷报频传，2023 年 5 月 30 日，被誉为“神箭”的长征二号 F 运载火箭托举神舟十六号载人飞船跃入苍穹中国空间站应用与发展阶段首次载人发射任务取得圆满成功，如图（九），有一枚运载火箭从地面 O 处发射，当火箭到达 P 处时，地面 A 处的雷达站测得 AP 距离是 5000m，仰角为 23° . 9s，火箭直线到达 Q 处，此时地面 A 处雷达站测得 Q 处的仰角为 45° . 求火箭从 P 到 Q 处的平均速度（结果精确到 1m/s）.（参考数据： $\sin 23^\circ \approx 0.39, \cos 23^\circ \approx 0.92, \tan 23^\circ \approx 0.42$ ）



【答案】火箭从 P 到 Q 处的平均速度为 294m/s

【解析】

【分析】根据题意得出 $\angle PAO = 23^\circ$, $\angle QAO = 45^\circ$, $\angle QOA = 90^\circ$, $AP = 5000\text{m}$, 分别解 $\text{Rt}\triangle AOP$, $\text{Rt}\triangle AOQ$, 求得 OQ, OP , 进而根据路程除以时间即可求解.

【详解】解：依题意，得 $\angle PAO = 23^\circ$ ， $\angle QAO = 45^\circ$ ， $\angle QOA = 90^\circ$ ， $AP = 5000\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOP$ 中， $AO = AP \cdot \cos \angle PAO = 5000 \times \cos 23^\circ \approx 5000 \times 0.92 = 4600\text{m}$ ，

$OP = AP \cdot \sin \angle PAO = 5000 \times \sin 23^\circ \approx 5000 \times 0.39 = 1950\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOQ$ 中， $OQ = AO \cdot \tan \angle QAO = 4600 \times \tan 45^\circ = 4600\text{m}$ ，

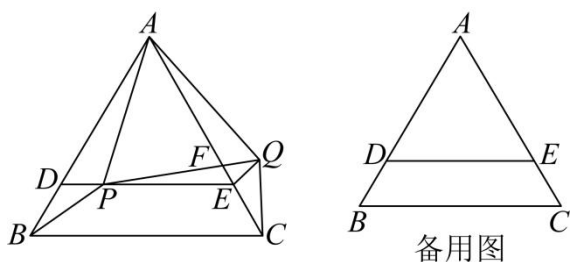
$\therefore QP = OQ - OP = 4600 - 1950 = 2650\text{m}$ ，

$\therefore$ 火箭从 P 到 Q 处的平均速度为 $\frac{QP}{9} = \frac{2650}{9} \approx 294\text{m/s}$ ，

答：火箭从 P 到 Q 处的平均速度为 294m/s 。

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键。

25. 如图，在等边三角形 ABC 中， D 为 AB 上的一点，过点 D 作 BC 的平行线 DE 交 AC 于点 E ，点 P 是线段 DE 上的动点（点 P 不与 D 、 E 重合）。将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针方向旋转 60° ，得到 $\triangle ACQ$ ，连接 EQ 、 PQ ， PQ 交 AC 于 F 。



(1) 证明：在点 P 的运动过程中，总有 $\angle PEQ = 120^\circ$ 。

(2) 当 $\frac{AP}{DP}$ 为何值时， $\triangle AQF$ 是直角三角形？

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据等边三角形的性质，利用四点共圆知识解答即可。

(2) 只有 $\angle AFQ = 90^\circ$ ， $\triangle AQF$ 是直角三角形，解答即可。

【小问 1 详解】

$\because$ 等边三角形 ABC ，

$\therefore AB = BC = CA$ ， $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60^\circ$ ，

$\because DE \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AEP = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABP$ 绕点 A 逆时针方向旋转 60° , 得到 $\triangle ACQ$,

$\therefore \angle PAQ = 60^\circ, AP = AQ$,

$\therefore \triangle APQ$ 是等边三角形,

$\therefore \angle AQP = \angle APQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle AQP = \angle AEP = 60^\circ$,

$\therefore A, P, E, Q$ 四点共圆,

$\therefore \angle APQ = \angle AEQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle PEQ = \angle AEP + \angle AEQ = 120^\circ$.

【小问 2 详解】

如图, 根据题意, 只有当 $\angle AFQ = 90^\circ$ 时, 成立,

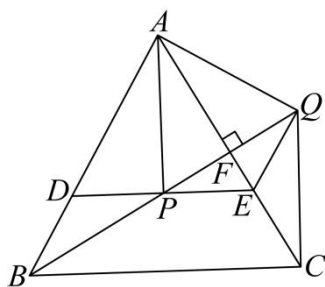
$\therefore \triangle ABP$ 绕点 A 逆时针方向旋转 60° , 得到 $\triangle ACQ$,

$\therefore \angle PAQ = 60^\circ, AP = AQ$,

$\therefore \triangle APQ$ 是等边三角形,

$\therefore \angle PAQ = 60^\circ$,

$\therefore \angle AFQ = 90^\circ$,



$\therefore \angle PAF = \angle QAF = 30^\circ$,

$\therefore$ 等边三角形 ABC ,

$\therefore \angle ABC = \angle BCA = \angle CAB = 60^\circ$,

$\therefore DE \parallel BC$,

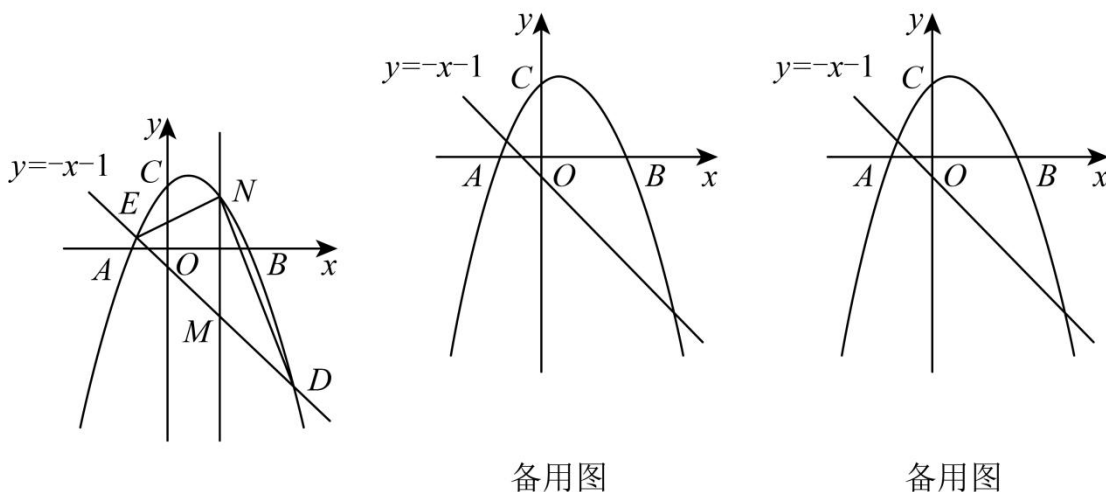
$\therefore \angle ADP = \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle DAP = 30^\circ, \angle APD = 90^\circ$,

$$\therefore \tan \angle ADP = \tan 60^\circ = \frac{AP}{PD} = \sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，平行线的性质，四点共圆，特殊角的三角函数值，熟练掌握等边三角形的性质，平行线的性质，四点共圆，特殊角的三角函数值是解题的关键。

26. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + x + c$ 经过点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(4, 0)$ ，且与直线 $l: y = -x - 1$ 交于 D, E 两点（点 D 在点 E 的右侧），点 M 为直线 l 上的一动点，设点 M 的横坐标为 t 。



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 过点 M 作 x 轴的垂线，与抛物线交于点 N . 若 $0 < t < 4$ ，求 $\triangle NED$ 面积的最大值.
- (3) 抛物线与 y 轴交于点 C ，点 R 为平面直角坐标系上一点，若以 B, C, M, R 为顶点的四边形是菱形，请求出所有满足条件的点 R 的坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

(2) $7\sqrt{14}$

(3) R 点为 $R\left(\frac{3-\sqrt{39}}{2}, \frac{-5+\sqrt{39}}{2}\right)$ 或 $R\left(\frac{3+\sqrt{39}}{2}, \frac{-\sqrt{39}-5}{2}\right)$ 或 $R\left(\frac{-5-\sqrt{39}}{2}, \frac{3+\sqrt{39}}{2}\right)$ 或 $R\left(\frac{-5+\sqrt{39}}{2}, \frac{3-\sqrt{39}}{2}\right)$ 或 $R\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) 根据题意，联立抛物线与直线，求得点 D, E 的横坐标，表示出 MN 的长，根据二次函数的性质求得 MN 的最大值，根据 $S_{\triangle END} = \frac{1}{2}(x_D - x_E) \times MN$ 即可求解；

(3) 根据题意，分别求得 BC, BM^2, CM^2 ，①当 BC 为对角线时， $MB = CM$ ，②当 BC 为边时，分

$BM = BC$, $BC = MC$, 根据勾股定理即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + x + c$ 经过点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(4, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2 + c = 0 \\ 16a + 4 + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 与直线 $l: y = -x - 1$ 交于 D 、 E 两点, (点 D 在点 E 的右侧)

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \\ y = -x - 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 2 + \sqrt{14} \\ y = -3 - \sqrt{14} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 - \sqrt{14} \\ y = -3 + \sqrt{14} \end{cases},$$

$\therefore D(2 + \sqrt{14}, -\sqrt{14} - 3), E(2 - \sqrt{14}, \sqrt{14} - 3)$,

$\therefore x_D - x_E = (2 + \sqrt{14}) - (2 - \sqrt{14}) = 2\sqrt{14}$,

$\because$ 点 M 为直线 l 上的一动点, 设点 M 的横坐标为 t .

则 $M(t, -t - 1)$, $N\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + t + 4\right)$,

$\therefore MN = -\frac{1}{2}t^2 + t + 4 - (-t - 1) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 5 = -\frac{1}{2}(t - 2)^2 + 7$, 当 $t = 2$ 时, MN 取得最大值为 7,

$\therefore S_{\triangle END} = \frac{1}{2}(x_D - x_E) \times MN$,

$\therefore$ 当 MN 取得最大值时, $S_{\triangle END}$ 最大,

$\therefore S_{\triangle END} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{14} \times 7 = 7\sqrt{14}$,

$\therefore \triangle NED$ 面积的最大值 $7\sqrt{14}$;

【小问 3 详解】

$\because$ 抛物线与 y 轴交于点 C ,

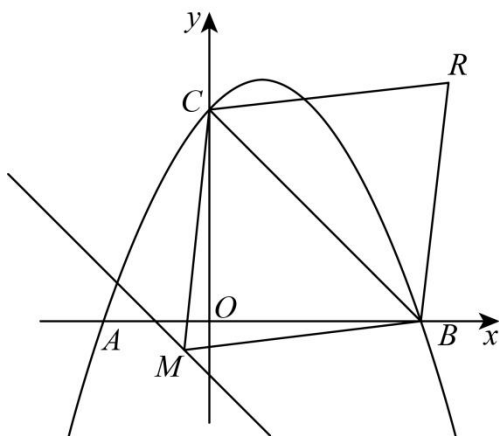
$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4, \text{ 当 } x=0 \text{ 时, } y=4, \text{ 即 } C(0,4),$$

$$\therefore B(4,0), M(t, -t-1)$$

$$\therefore BC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2},$$

$$BM^2 = (4-t)^2 + (-t-1)^2 = 2t^2 - 6t + 17, \quad CM^2 = t^2 + (t+5)^2 = 2t^2 + 10t + 25,$$

①当 BC 为对角线时, $MB = CM$,



$$\therefore 2t^2 - 6t + 17 = 2t^2 + 10t + 25,$$

$$\text{解得: } t = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore M\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$\therefore BC, MR$ 的中点重合,

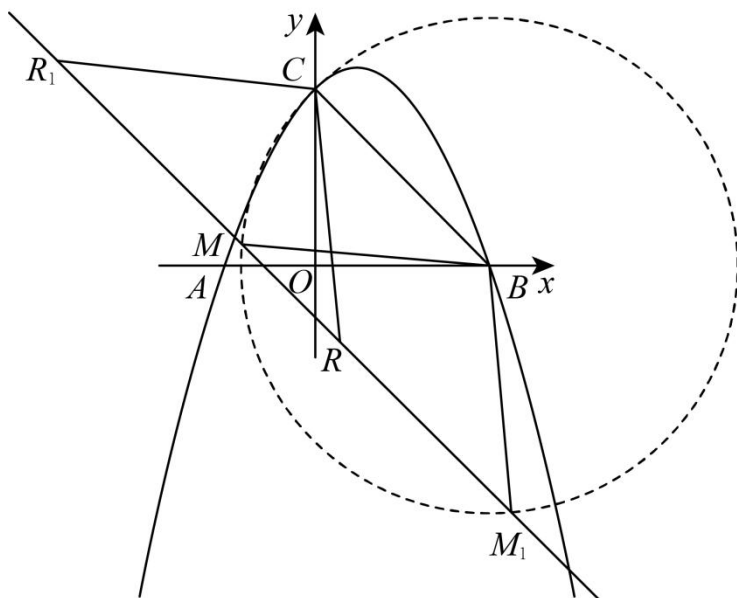
$$\therefore \begin{cases} R_x - \frac{1}{2} = 4 \\ R_y - \frac{1}{2} = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} R_x = \frac{9}{2} \\ R_y = \frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\therefore R\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right),$$

②当 BC 为边时,

当四边形 $BMRC$ 为菱形, $BM = BC$



$$\therefore 2t^2 - 6t + 17 = (4\sqrt{2})^2,$$

$$\text{解得: } t = \frac{3-\sqrt{39}}{2} \text{ 或 } t = \frac{3+\sqrt{39}}{2},$$

$$\therefore -t-1 = -\frac{3-\sqrt{39}}{2}-1 = \frac{-5+\sqrt{39}}{2} \text{ 或 } -t-1 = -\frac{3+\sqrt{39}}{2}-1 = \frac{-5-\sqrt{39}}{2},$$

$$\therefore M\left(\frac{3-\sqrt{39}}{2}, \frac{-5+\sqrt{39}}{2}\right) \text{ 或 } M\left(\frac{3+\sqrt{39}}{2}, \frac{-\sqrt{39}-5}{2}\right),$$

由 CM, BR 的中点重合,

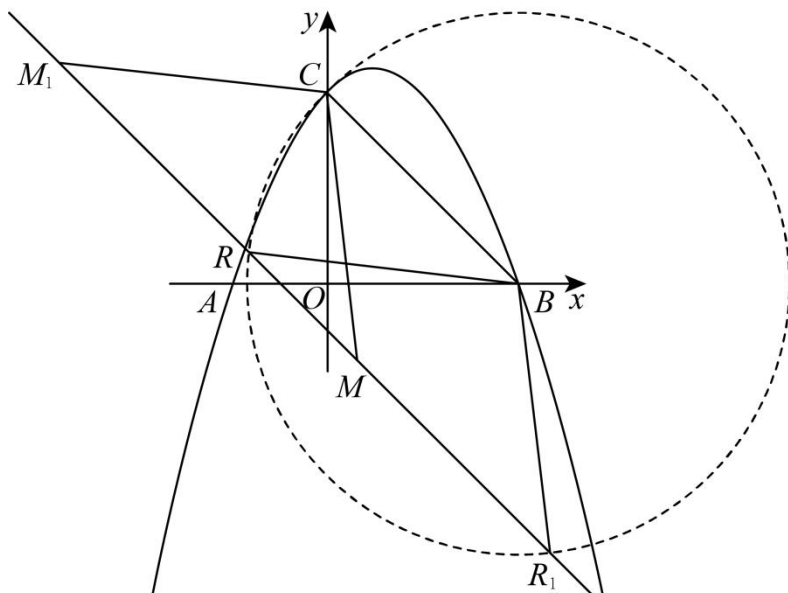
$$\therefore \begin{cases} R_x + 4 = \frac{3-\sqrt{39}}{2} + 0 \\ R_y + 0 = \frac{-5+\sqrt{39}}{2} + 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} R_x + 4 = \frac{3+\sqrt{39}}{2} + 0 \\ R_y + 0 = \frac{-5-\sqrt{39}}{2} + 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} R_x = \frac{-5-\sqrt{39}}{2} \\ R_y = \frac{3+\sqrt{39}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} R_x = \frac{-5+\sqrt{39}}{2} \\ R_y = \frac{3-\sqrt{39}}{2} \end{cases},$$

$$\therefore R\left(\frac{-5-\sqrt{39}}{2}, \frac{3+\sqrt{39}}{2}\right) \text{ 或 } R\left(\frac{-5+\sqrt{39}}{2}, \frac{3-\sqrt{39}}{2}\right),$$

当 $BC = MC$ 时;

如图所示, 即四边形 $CMRB$ 是菱形,



点 R 的坐标即为四边形 $BMRC$ 为菱形时, M 的坐标,

$$\therefore R \text{ 点为 } R\left(\frac{3-\sqrt{39}}{2}, \frac{-5+\sqrt{39}}{2}\right) \text{ 或 } R\left(\frac{3+\sqrt{39}}{2}, \frac{-\sqrt{39}-5}{2}\right),$$

综上所述, R 点为 $R\left(\frac{3-\sqrt{39}}{2}, \frac{-5+\sqrt{39}}{2}\right)$ 或 $R\left(\frac{3+\sqrt{39}}{2}, \frac{-\sqrt{39}-5}{2}\right)$ 或 $R\left(\frac{-5-\sqrt{39}}{2}, \frac{3+\sqrt{39}}{2}\right)$ 或

$$R\left(\frac{-5+\sqrt{39}}{2}, \frac{3-\sqrt{39}}{2}\right) \text{ 或 } R\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right).$$

【点睛】本题考查了二次函数的性质，面积问题，菱形的性质与判定，勾股定理，熟练掌握二次函数的性质，细心的计算是解题的关键.

