

2023 年湘潭市初中学业水平考试

数学试题卷

考试时量：120 分钟 满分：120 分

考生注意：

本试卷分试题卷和答题卡两部分，全卷共四道大题，26 道小题。请考生将解答过程全部填（涂）写在答题卡上，写在试题卷上无效，考试结束后，将试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的 4 个选项中，只有一项符合题目要求，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上）

1. 中国的汉字既象形又表意，不但其形美观，而且寓意深刻，观察下列汉字，其中是轴对称图形的是（ ）

- A. 爱 B. 我 C. 中 D. 华

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义逐项判断即可。

【详解】解：将选项 A，B，D 中的汉字沿某直线折叠后不能与本身重合，所以不符合题意；将图 C 中的汉字沿过中心的竖直方向的直线折叠直线两旁的部分能够重合，所以符合题意。

故选：C。

【点睛】本题主要考查了轴对称图形的判断，掌握定义是解题的关键。即将一个图形沿某直线折叠，直线两旁的部分能够重合，这样的图形是轴对称图形。

2. 若代数式 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则 x 的取值范围是（ ）

- A. $x < 1$ B. $x \leq 1$ C. $x > 1$ D. $x \geq 1$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件列出关于 x 的不等式，求出 x 的取值范围即可。

【详解】解：由题意得， $x - 1 \geq 0$ ，
解得 $x \geq 1$ 。

故选：D。

【点睛】本题主要考查二次根式有意义的条件，解题的关键是掌握要使二次根式有意义，其被开方数应非负数。

3. 下列计算正确的是（ ）

- A. $a^8 \div a^2 = a^4$ B. $a + a^2 = a^3$ C. $(a^2)^3 = a^5$ D. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. $a^8 \div a^2 = a^6$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $a + a^2 \neq a^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

C. $(a^2)^3 = a^6$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，熟练掌握以上运算法则是解题的关键.

4. 某校组织青年教师教学竞赛活动，包含教学设计和现场教学展示两个方面. 其中教学设计占20%，现场展示占80%. 某参赛教师的教学设计90分，现场展示95分，则她的最后得分为（ ）

- A. 95分 B. 94分 C. 92.5分 D. 91分

【答案】B

【解析】

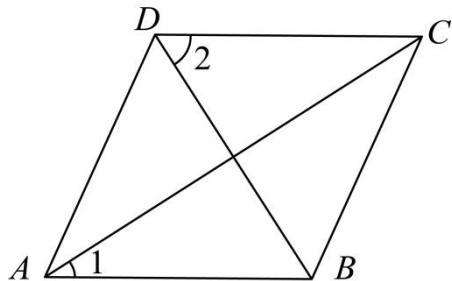
【分析】根据加权平均数进行计算即可求解.

【详解】解：依题意，她的最后得分为 $90 \times 20\% + 95 \times 80\% = 94$ 分，

故选：B.

【点睛】本题考查了加权平均数，熟练掌握加权平均数的求法是解题的关键.

5. 如图，菱形ABCD中，连接AC，BD，若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为（ ）



- A. 20° B. 60° C. 70° D. 80°

【答案】C

【解析】

【分析】根据菱形的性质可得 $BD \perp AC, AB \parallel CD$ ，则 $\angle 1 = \angle ACD, \angle ACD + \angle 2 = 90^\circ$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形

$$\therefore BD \perp AC, AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle ACD, \angle ACD + \angle 2 = 90^\circ,$$

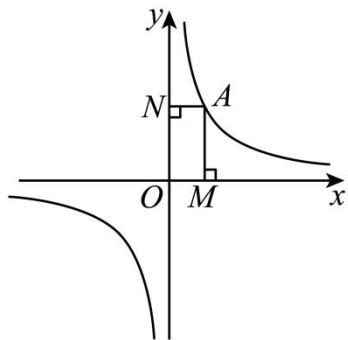
$$\therefore \angle 1 = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了菱形的性质，熟练掌握是菱形的性质解题的关键.

6. 如图，平面直角坐标系中， O 是坐标原点，点 A 是反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图像上的一点，过点 A 分别作 $AM \perp x$ 轴于点 M ， $AN \perp y$ 轴于点 N ，若四边形 $AMON$ 的面积为 2. 则 k 的值是 ()



A. 2

B. -2

C. 1

D. -1

【答案】A

【解析】

【分析】证明四边形 $ANOM$ 是矩形，根据反比例函数的 k 值的几何意义，即可解答.

【详解】解： $\because AM \perp x$ 轴于点 M ， $AN \perp y$ 轴于点 N ， $\angle MON = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AMON$ 是矩形，

$\because$ 四边形 $AMON$ 的面积为 2，

$$\therefore |k| = 2,$$

$\because$ 反比例函数在第一、三象限，

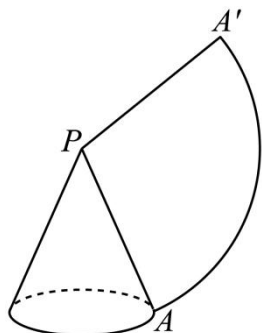
$$\therefore k = 2,$$

故选：A.

【点睛】本题考查了矩形的判定，反比例函数的 k 值的几何意义，熟知在一个反比例函数图像上任取一点，

过点分别作 x 轴, y 轴的垂线段, 与坐标轴围成的矩形面积为 $|k|$ 是解题的关键.

7. 如图, 圆锥底面圆的半径为 4, 则这个圆锥的侧面展开图中 $\widehat{AA'}$ 的长为 ()



A. 4π

B. 6π

C. 8π

D. 16π

【答案】C

【解析】

【分析】根据底面周长等于 $\widehat{AA'}$ 的长, 即可求解.

【详解】解: 依题意, $\widehat{AA'}$ 的长 $= 2\pi \times 4 = 8\pi$,

故选: C.

【点睛】本题考查了圆锥的侧面展开图的弧长, 熟练掌握圆锥底面周长等于 $\widehat{AA'}$ 的长是解题的关键.

8. 某校组织九年级学生赴韶山开展研学活动, 已知学校离韶山 50 千米, 师生乘大巴车前往, 某老师因有事情, 推迟了 10 分钟出发, 自驾小车以大巴车速度的 1.2 倍前往, 结果同时到达. 设大巴车的平均速度为 x 千米/时, 则可列方程为 ()

A. $\frac{50}{x} = \frac{50}{1.2x} + \frac{1}{6}$

B. $\frac{50}{x} + 10 = \frac{50}{1.2x}$

C. $\frac{50}{x} = \frac{50}{1.2x} + 10$

D. $\frac{50}{x} + \frac{1}{6} = \frac{50}{1.2x}$

【答案】A

【解析】

【分析】设大巴车的平均速度为 x 千米/时, 则老师自驾小车的平均速度为 $1.2x$ 千米/时, 根据时间的等量关系列出方程即可.

【详解】解: 设大巴车的平均速度为 x 千米/时, 则老师自驾小车的平均速度为 $1.2x$ 千米/时,

根据题意列方程为: $\frac{50}{x} = \frac{50}{1.2x} + \frac{1}{6}$,

故答案为: A.

【点睛】本题考查了分式方程的应用, 找到等量关系是解题的关键.

二、选择题 (本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分. 在每小题给出的 4 个选项中, 有多项符

合题目要求，全部选对的得 3 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分，请将正确答案的选项代号涂在答题卡相应的位置上)

9. 下列选项中正确的是 ()

- A. $8^0 = 1$ B. $|-8| = 8$ C. $-(-8) = 8$ D. $\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$

【答案】 ABC

【解析】

【分析】根据零次幂可判断 A，根据绝对值的意义可判断 B，化简多重符号可判断 C，根据二次根式的性质可判断 D，从而可得答案.

【详解】解： $8^0 = 1$ ，故 A 符合题意，

$|-8| = 8$ ，故 B 符合题意；

$-(-8) = 8$ ，故 C 符合题意；

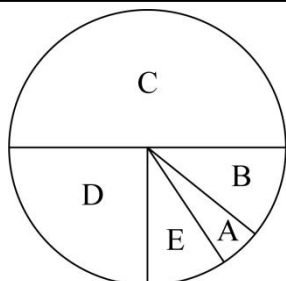
$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ，故 D 不符合题意；

故选 ABC

【点睛】本题考查的是零次幂的含义，绝对值的含义，化简多重符号，二次根式的性质，熟记运算法则是解本题的关键.

10. 2023 年湘潭中考体育考查了投掷实心球的项目，为了解某校九年级男生投掷实心球水平，随机抽取了若干名男生的成绩（单位：米），列出了如下所示的频数分布表并绘制了扇形图：

类别	A	B	C	D	E
成绩	$6 \leq x < 7$	$7 \leq x < 8$	$8 \leq x < 9$	$9 \leq x < 10$	$10 \leq x < 11$
频数	2	6	25	12	5



则下列说法正确的是 ()

- A. 样本容量为 50 B. 成绩在 $9 \leq x < 10$ 米的人数最多
C. 扇形图中 C 类对应的圆心角为 180° D. 成绩在 $7 \leq x < 8$ 米的频率为 0.1

【答案】AC

【解析】

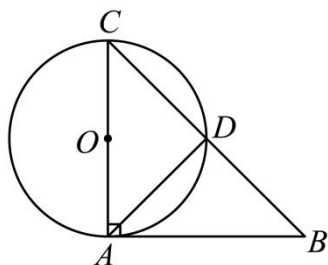
【分析】结合扇形统计图和统计表格，对选项逐一判断，即可解答.

【详解】解：样本容量为 $2+6+25+12+5=50$ ，故 A 正确；根据统计表，可得成绩在 $8 \leq x < 9$ 米的人数最多，故 B 错误；扇形图中 C 类对应的圆心角为 $\frac{25}{50} \times 360^\circ = 180^\circ$ ，故 C 正确；根据统计表，可得成绩在 $7 \leq x < 8$ 米的频率为 $6 \div 50 = 0.12$ ，故 D 错误，

故选：AC.

【点睛】本题考查了扇形统计图和统计表的结合，能通过统计表格准确地得到所需数据是解题的关键.

11. 如图， AC 是 $\odot O$ 的直径， CD 为弦，过点 A 的切线与 CD 延长线相交于点 B，若 $AB = AC$ ，则下列说法正确的是（ ）

A. $AD \perp BC$ B. $\angle CAB = 90^\circ$ C. $DB = AB$ D. $AD = \frac{1}{2}BC$

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据 AC 是 $\odot O$ 的直径，可得 $AD \perp BC$ ，根据 AB 是 $\odot O$ 的切线，可得 $AC \perp AB$ ，根据 $AB = AC$ ，可得 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，进而可得 $AD = \frac{1}{2}BC$ ，即可判断 A，B，D 选项，根据 $\triangle ADB$ 是直角三角形， AB 是斜边，则 $AB > DB$ ，即可判断 C 选项.

【详解】解： $\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径， $\therefore AD \perp BC$ ，故 A 选项正确， $\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线， $\therefore AC \perp AB$ ， $\therefore \angle CAB = 90^\circ$ ，故 B 选项正确， $\because AB = AC$ $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\therefore AD \perp BC$ ，

$$\therefore CD = DB,$$

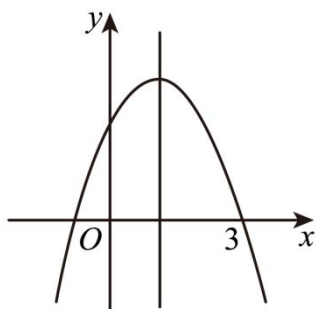
$$\therefore AD = \frac{1}{2}BC, \text{ 故 D 选项正确}$$

$\because \triangle ADB$ 是直角三角形, AB 是斜边, 则 $AB > DB$, 故 C 选项错误,

故选: ABD.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质, 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 直径所对的圆周角是直角, 切线的性质, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

12. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $(3, 0)$, 则下列结论中正确的是 ()



A. $a > 0$

B. $c > 0$

C. $b^2 - 4ac < 0$

D. $9a + 3b + c = 0$

【答案】BD

【解析】

【分析】根据图象的开口方向可判断选项 A; 根据图象与 y 轴的交点位置, 可判断选项 B; 根据抛物线和 x 轴的交点个数可判断选项 C; $x = 3$ 时函数值的情况, 可判断选项 D.

【详解】解: A、由函数图象得, 抛物线开口向下, 故 $a < 0$, 故 A 错误;

B、图象与 y 轴的交点在原点上方, 故 $c > 0$, 故 B 正确;

C、因为抛物线和 x 轴有两个交点, 故 $b^2 - 4ac > 0$, 故 C 错误.

D、当 $x = 3$ 时, $y = 9a + 3b + c = 0$, 故 D 正确;

故选: BD.

【点睛】本题考查了二次函数的图象和系数的关系, 解题的关键是熟练掌握二次函数的有关性质、以及二次函数的图象的特点.

三、填空题 (本题共 4 个小题, 每小题 3 分, 共 12 分. 请将答案写在答题卡相应的位置上)

13. 数轴上到原点的距离小于 $\sqrt{5}$ 的点所表示的整数有_____. (写出一个即可)

【答案】2 (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据实数与数轴的对应关系，得出所求数的绝对值小于 $\sqrt{5}$ ，且为整数，再利用无理数的估算即可求解.

【详解】解：设所求数为 a ，由于在数轴上到原点的距离小于 $\sqrt{5}$ ，则 $|a| < \sqrt{5}$ ，且为整数，

则 $-\sqrt{5} < a < \sqrt{5}$ ，

$\because \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$ ，即 $2 < \sqrt{5} < 3$ ，

$\therefore a$ 可以是 ± 2 或 ± 1 或 0 .

故答案为：2（答案不唯一）.

【点睛】本题考查了实数与数轴，无理数的估算，掌握数轴上的点到原点距离的意义是解题的关键.

14. 已知实数 a, b 满足 $(a-2)^2 + |b+1| = 0$ ，则 $a^b =$ _____.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

【分析】由非负数的性质可得 $a-2=0$ 且 $b+1=0$ ，求解 a, b 的值，再代入计算即可.

【详解】解： $\because (a-2)^2 + |b+1| = 0$ ，

$\therefore a-2=0$ 且 $b+1=0$ ，

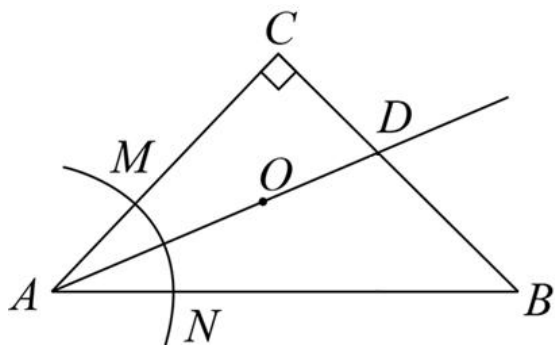
解得： $a=2, b=-1$ ；

$\therefore a^b = 2^{-1} = \frac{1}{2}$ ；

故答案为： $\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查的是绝对值的非负性，偶次方的非负性的应用，负整数指数幂的含义，理解非负数的性质，熟记负整数指数幂的含义是解本题的关键.

15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，按以下步骤作图：①以点 A 为圆心，以小于 AC 长为半径作弧，分别交 AC, AB 于点 M, N ；②分别以 M, N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径作弧，在 $\angle BAC$ 内两弧交于点 O ；③作射线 AO ，交 BC 于点 D . 若点 D 到 AB 的距离为1，则 CD 的长为_____.

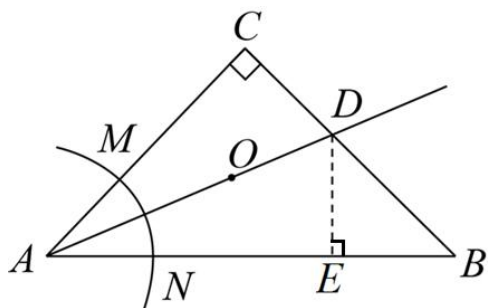


【答案】 1

【解析】

【分析】 根据作图可得 AD 为 $\angle CAB$ 的角平分线，根据角平分线的性质即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，依题意 $DE = 1$ ，



根据作图可知 AD 为 $\angle CAB$ 的角平分线，

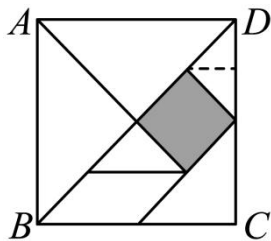
$\therefore DC \perp AC, DE \perp AB$

$\therefore CD = DE = 1$ ，

故答案为： 1.

【点睛】 本题考查了作角平分线，角平分线的性质，熟练掌握基本作图以及角平分线的性质是解题的关键.

16. 七巧板是我国民间广为流传的一种益智玩具，某同学用边长为 4dm 的正方形纸板制作了一副七巧板 (如图)，由 5 个等腰直角三角形，1 个正方形和 1 个平行四边形组成. 则图中阴影部分的面积为 _____ dm^2 .

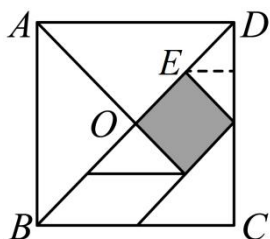


【答案】 2

【解析】

【分析】 根据正方形的性质，以及七巧板的特点，求得 OE 的长，即可求解.

【详解】 解：如图所示，



依题意, $OD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = 2\sqrt{2}$, $OE = \frac{1}{2} OD = \sqrt{2}$

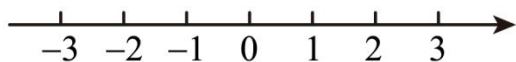
$\therefore$ 图中阴影部分的面积为 $OE^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$

故答案为: 2.

【点睛】本题考查了正方形的性质, 勾股定理, 七巧板, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 10 个小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 请将解答过程写在答题卡相应位置上)

17. 解不等式组: $\begin{cases} 7x-14 \leq 0 \textcircled{1} \\ 2(x+3) > x+4 \textcircled{2} \end{cases}$, 并把它的解集在数轴上表示出来.



【答案】不等式组的解集为: $-2 < x \leq 2$. 画图见解析

【解析】

【分析】先解不等式组中的两个不等式, 再在数轴上表示两个不等式的解集, 从而可得答案.

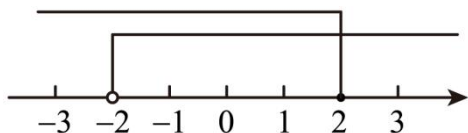
【详解】解: $\begin{cases} 7x-14 \leq 0 \textcircled{1} \\ 2(x+3) > x+4 \textcircled{2} \end{cases}$,

由①得: $x \leq 2$,

由②得: $2x+6 > x+4$,

$\therefore x > -2$,

在数轴上表示其解集如下:



$\therefore$ 不等式组的解集为: $-2 < x \leq 2$.

【点睛】本题考查的是一元一次不等式组的解法, 在数轴上表示不等式组的解集, 掌握不等式组的解法与步骤是解本题的关键.

18. 先化简，再求值： $\left(1 + \frac{2}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2+x}{x^2-9}$ ，其中 $x=6$ 。

【答案】 $\frac{x}{x-3}$ ；2

【解析】

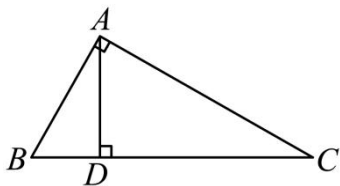
【分析】先将括号部分通分相加，相乘时，将两个分式的分子和分母因式分解，进行化简，最后代入求值即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \left(1 + \frac{2}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2+x}{x^2-9} \\ &= \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{2}{x+1}\right) \cdot \frac{x^2+x}{x^2-9}, \\ &= \frac{x+3}{x+1} \cdot \frac{x(x+1)}{(x+3)(x-3)}, \\ &= \frac{x}{x-3}, \end{aligned}$$

当 $x=6$ 时，原式 $=2$ 。

【点睛】本题考查了分式的化简求值，熟练将分式化简是解题的关键。

19. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， AD 是斜边 BC 上的高。



(1) 证明： $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ ；

(2) 若 $AB=6$ ， $BC=10$ ，求 BD 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $BD = \frac{18}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据三角形高的定义得出 $\angle ADB=90^\circ$ ，根据等角的余角相等，得出 $\angle BAD=\angle C$ ，结合公共角 $\angle B=\angle B$ ，即可得证；

(2) 根据 (1) 的结论，利用相似三角形的性质即可求解。

【小问1详解】

证明： $\because \angle BAC=90^\circ$ ， AD 是斜边 BC 上的高。

$\therefore \angle ADB=90^\circ$ ， $\angle B+\angle C=90^\circ$

$$\therefore \angle B + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle C$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle B$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBA,$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle ABD \sim \triangle CBA$$

$$\therefore \frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB},$$

$$\text{又 } AB = 6, BC = 10$$

$$\therefore BD = \frac{AB^2}{CB} = \frac{36}{10} = \frac{18}{5}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

20. 为落实“双减”政策要求，丰富学生课余生活，某校七年级根据学生需求，组建了四个社团供学生选择：

A（合唱社团）、B（硬笔书法社团）、C（街舞社团）、D（面点社团）. 学生从中任意选择两个社团参加活动.

(1) 小明对这 4 个社团都很感兴趣，如果他随机选择两个社团，请列举出所有的可能结果；

(2) 小宇和小江在选择过程中，首先都选了社团 C（街舞社团），第二个社团他俩决定随机选择，请用列表法或树状图求他俩选到相同社团的概率.

【答案】 (1) AB, AC, AD, BC, BD, CD

$$(2) \frac{1}{3}$$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意列举出所有可能结果；

(2) 根据列表法求概率即可求解.

【小问 1 详解】

解：依题意，他随机选择两个社团，所有的可能结果为 AB, AC, AD, BC, BD, CD ；

【小问 2 详解】

解：列表如下，

	A	B	D
A	AA	AB	AD
B	BA	BB	BD

D	DA	DB	DD
-----	------	------	------

共有 9 种等可能结果，其中符合题意的有 3 种，

$\therefore$ 他俩选到相同社团的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查的是根据概率公式求概率，用列表法求概率．解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

21. 教育部正式印发《义务教育劳动课程标准（2022 年版）》，劳动课成为中小学的一门独立课程，湘潭市中小学已经将劳动教育融入学生的日常学习和生活中，某校倡导同学们从帮助父母做一些力所能及的家务做起，培养劳动意识，提高劳动技能．小明随机调查了该校 10 名学生某周在家做家务的总时间，并对数据进行统计分析，过程如下：

收集数据：在家做家务时间：（单位：小时）

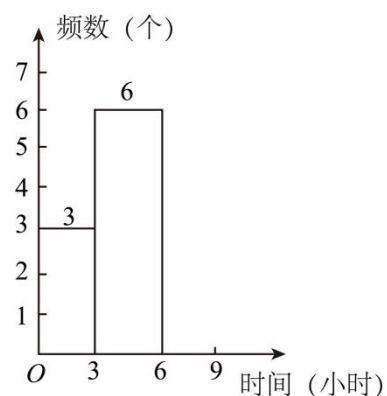
1 5 4 1 a 3 2 b 3 4

整理数据：

时间段	$0 \leq x < 3$	$3 \leq x < 6$	$6 \leq x < 9$
人数	3	6	m

分析数据：

统计量	平均数	中位数	众数
数据	3.4	3.5	4



请结合以上信息回答下列问题：

- (1) $m =$ _____，并补全频数直方图；
- (2) 数据统计完成后，小明发现有两个数据不小心丢失了．请根据图表信息找回这两个数据．若 $a < b$ ，则 $a =$ _____， $b =$ _____；
- (3) 根据调查结果，请估计该校 2000 名学生在这一周劳动时间不少于 3 小时的人数．

【答案】(1) 1; 频数直方图见解析

(2) 4; 7 (3) 1400 人

【解析】

【分析】(1) 用被调查的总人数减去其余两个时间段的人数，补全频数直方图即可；

(2) 通过 (1) 可得在家做家务时间段为 $6 \leq x < 9$ 有 1 人，故 $b \geq 6$ ，则 $3 \leq a < 6$ ，利用众数为 4，可知 $a = 4$ ，再利用平均数求得 b 即可；

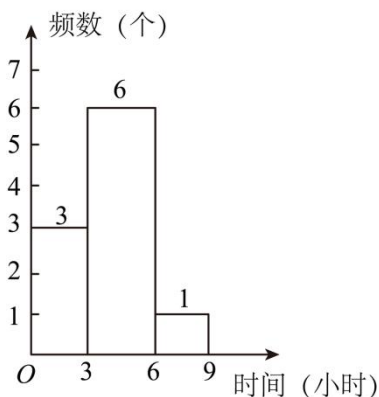
(3) 用 2000 乘调查的学生中劳动时间不少于 3 小时的人数的占比，即可解答.

【小问 1 详解】

解：根据题意，可得 $m = 10 - 3 - 6 = 1$ ，

故答案为：1，

补全频数直方图，如图所示：



【小问 2 详解】

解：∵在家做家务时间段为 $6 \leq x < 9$ 有 1 人，且 $a < b$ ，

∴ $b \geq 6$ ，

观察数据，可得在家做家务时间段为 $3 \leq x < 6$ 的是 3, 3, 4, 4, 5, 有 5 人，比表格中的数据少一人，故 $3 \leq a < 6$ ，

∵众数为 4，在已知数据中在家做家务时间为 4 和 3 的各 2 人，

∴ $a = 4$ ，

根据平均数，可得方程 $(1 + 5 + 4 + 1 + 4 + 3 + 2 + b + 3 + 4) \div 10 = 3.4$ ，

解得 $b = 7$ ，

故答案为：4; 7;

【小问 3 详解】

解： $2000 \times \frac{6+1}{10} = 1400$ (人)，

答：该校 2000 名学生在这一周劳动时间不少于 3 小时的人数约为 1400 人.

【点睛】本题考查了频数直方图，平均数的概念，众数的概念，用样本估计总量，熟知上述概念是解题的

关键.

22. 我国航天事业发展迅速, 2023 年 5 月 30 日 9 时 31 分, 神舟十六号载人飞船成功发射, 某玩具店抓住商机, 先购进了 1000 件相关航天模型玩具进行试销, 进价为 50 元/件.

(1) 设每件玩具售价为 x 元, 全部售完的利润为 y 元. 求利润 y (元) 关于售价 x (元/件) 的函数表达式;

(2) 当售价定为 60 元/件时, 该玩具销售火爆, 该店继续购进一批该种航天模型玩具, 并从中拿出这两批玩具销售利润的 20% 用于支持某航模兴趣组开展活动, 在成功销售完毕后, 资助经费恰好 10000 元, 请问该商店继续购进了多少件航天模型玩具?

【答案】(1) $y = 1000x - 50000$;

(2) 该商店继续购进了 4000 件航天模型玩具.

【解析】

【分析】(1) 根据总利润=单件利润×销售量, 可求得利润 y (元) 关于售价 x (元/件) 的函数表达式;

(2) 设商店继续购进了 m 件航天模型玩具, 根据“销售利润的 20% 恰好 10000 元”列一元一次方程, 解之即可.

【小问 1 详解】

解: 因每件玩具售价为 x 元,

依题意得 $y = 1000(x - 50) = 1000x - 50000$;

【小问 2 详解】

解: 设商店继续购进了 m 件航天模型玩具, 则总共有 $(m + 1000)$ 件航天模型玩具,

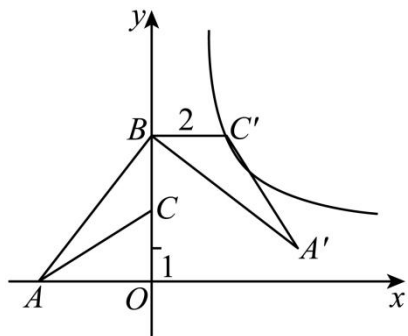
依题意得: $(m + 1000)(60 - 50) \times 20\% = 10000$,

解得 $m = 4000$,

答: 该商店继续购进了 4000 件航天模型玩具.

【点睛】本题考查了一次函数的应用, 一元一次方程的应用, 理解题意找到题目蕴含的相等关系, 并据此列出方程或函数解析式是解题的关键.

23. 如图, 点 A 的坐标是 $(-3, 0)$, 点 B 的坐标是 $(0, 4)$, 点 C 为 OB 中点, 将 $\triangle ABC$ 绕着点 B 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'BC'$.



(1) 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图像经过点 C' ，求该反比例函数的表达式；

(2) 一次函数图像经过 A 、 A' 两点，求该一次函数的表达式。

【答案】(1) $y = \frac{8}{x}$

(2) $y = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7}$

【解析】

【分析】(1) 由点 B 的坐标是 $(0, 4)$ ，点 C 为 OB 中点，可得 $C(0, 2)$ ， $OC = BC = 2$ ，由旋转可得：

$BC' = BC = 2$ ， $\angle CBC' = 90^\circ$ ，可得 $C'(2, 4)$ ，可得 $k = 2 \times 4 = 8$ ，从而可得答案；

(2) 如图，过 A' 作 $A'H \perp BC$ 于 H ，则 $\angle AOB = \angle A'HB = 90^\circ$ ，而 $\angle ABA' = 90^\circ$ ， $AB = A'B$ ，证明 $\triangle ABO \cong \triangle BA'H$ ，可得 $AO = BH = 3$ ， $OB = A'H = 4$ ， $A'(4, 1)$ ，设直线 AA' 为 $y = mx + n$ ，再建立方程组求解即可。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 B 的坐标是 $(0, 4)$ ，点 C 为 OB 中点，

$\therefore C(0, 2)$ ， $OC = BC = 2$ ，

由旋转可得： $BC' = BC = 2$ ， $\angle CBC' = 90^\circ$ ，

$\therefore C'(2, 4)$ ，

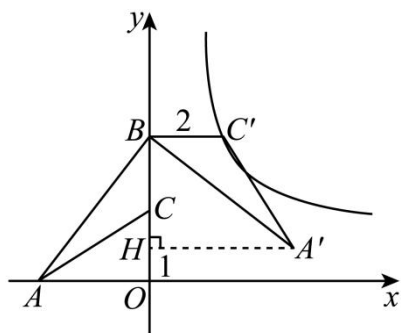
$\therefore k = 2 \times 4 = 8$ ，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = \frac{8}{x}$ ；

【小问 2 详解】

如图，过 A' 作 $A'H \perp BC$ 于 H ，

则 $\angle AOB = \angle A'HB = 90^\circ$ ，而 $\angle ABA' = 90^\circ$ ， $AB = A'B$ ，



$$\therefore \angle ABO + \angle BAO = 90^\circ = \angle ABO + \angle A'BO,$$

$$\therefore \angle BAO = \angle A'BO,$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BA'H,$$

$$\therefore AO = BH = 3, \quad OB = A'H = 4,$$

$$\therefore OH = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore A'(4, 1),$$

设直线 AA' 为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} -3m + n = 0 \\ 4m + n = 1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} m = \frac{1}{7} \\ n = \frac{3}{7} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AA' \text{ 为 } y = \frac{1}{7}x + \frac{3}{7}.$$

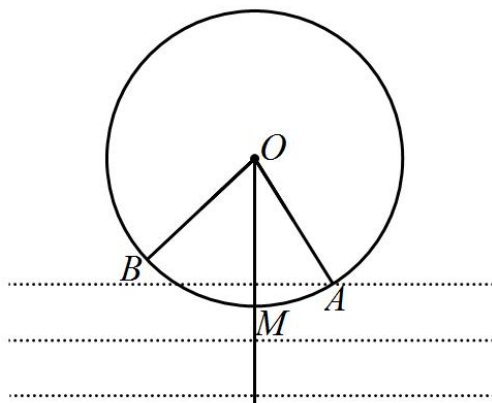
【点睛】 本题考查的是旋转的性质，利用待定系数法求解一次函数与反比例函数的解析式，全等三角形的判定与性质，熟练的求解 $A'(4, 1)$ 是解本题的关键.

24. 问题情境：筒车是我国古代发明的一种水利灌溉工具，既经济又环保，明朝科学家徐光启在《农政全书》中用图画描绘了筒车的工作原理（如图①）。假定在水流量稳定的情况下，筒车上的每一个盛水筒都按逆时针做匀速圆周运动，每旋转一周用时 120 秒。

问题设置：把筒车抽象为一个半径为 r 的 $\odot O$ 。如图②， OM 始终垂直于水平面，设筒车半径为 2 米。当 $t = 0$ 时，某盛水筒恰好位于水面 A 处，此时 $\angle AOM = 30^\circ$ ，经过 95 秒后该盛水筒运动到点 B 处。（参考数据， $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$ ）



图①



图②

问题解决：

- (1) 求该盛水筒从 A 处逆时针旋转到 B 处时， $\angle BOM$ 的度数；
- (2) 求该盛水筒旋转至 B 处时，它到水面的距离。（结果精确到 0.1 米）

【答案】(1) $\angle BOM = 45^\circ$ ；

(2) 该盛水筒旋转至 B 处时，它到水面的距离为 0.3 米。

【解析】

【分析】(1) 先求得该盛水筒的运动速度，再利用周角的定义即可求解；

(2) 作 $BC \perp OM$ 于点 C ，在 $\text{Rt}\triangle OAD$ 中，利用含 30° 度角的直角三角形的性质以及勾股定理求得 OD 的长，在 $\text{Rt}\triangle OBC$ 中，利用勾股定理求得 OC 的长，据此即可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 旋转一周用时 120 秒，

$$\therefore \text{每秒旋转 } \frac{360^\circ}{120} = 3^\circ,$$

当经过 95 秒后该盛水筒运动到点 B 处时， $\angle AOB = 360^\circ - 3^\circ \times 95 = 75^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOM = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOM = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ;$$

【小问 2 详解】

解：作 $BC \perp OM$ 于点 C ，设 OM 与水平面交于点 D ，则 $OD \perp AD$ ，

APE 的形状是否发生改变? 请说明理由.

【答案】 (1) 见解析; (2) $\triangle APE$ 是等腰直角三角形, 理由见解析; (3) $\triangle APE$ 的形状不改变, 见解析

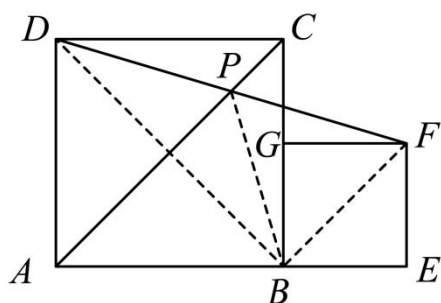
【解析】

【分析】(1) 连接 BD , BF , BP , 根据正方形的性质求出 $\angle DBF = 90^\circ$, 证明 $\triangle APD \cong \triangle APB$, 推出 $BP = DP$, 再利用余角的性质求出 $\angle PBF = \angle PFB$, 推出 $PB = PF$ 即可;

(2) 根据正方形的性质直接得到 $\angle CAE = \angle PEA = 45^\circ$, 推出 $AP = EP, \angle APE = 90^\circ$, 得到 $\triangle APE$ 是等腰直角三角形;

(3) 延长 EP 至点 M ，使 $PM = EP$ ，连接 MA, MD ，证明 $\triangle MPD \cong \triangle EPF$ (SAS)，得到 $DM = EF, \angle DMP = \angle PEF$ ，推出 $BG \parallel DM$ ，设 DF 交 BC 于点 H ，交 BG 于点 N ，得到 $\angle MDN = \angle DNB$ ，由 $AD \parallel BC$ 得到 $\angle ADN = \angle BHN$ ，推出 $\angle ADM = \angle BHN + \angle BNH = 180^\circ - \angle HBN$ ，进而得到 $\angle ADM = \angle ABE$ ，再证明 $\triangle ADM \cong \triangle ABE$ (SAS)，得到 $AM = AE$ ， $\angle DAM = \angle BAE$ ，证得 $\angle APE = 90^\circ$ ，再由 $\angle MAE = 90^\circ$ ，根据等腰三角形的三线合一的性质求出 $\angle MAP = \angle PAE = 45^\circ$ ，即可证得 $\triangle APE$ 是等腰直角三角形。

【详解】(1) 证明: 连接 BD , BF , BP , 如图,



图①

∵ 四边形 $ABCD$, $BEFG$ 都是正方形,

$$\therefore \angle CBD = 45^\circ = \angle FBG.$$

$$\therefore \angle DBF = 90^\circ,$$

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle DAC = \angle BAC = 45^\circ.$$

又 $\because AP = AP$,

$$\therefore \triangle APD \cong \triangle APB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BP = DP,$$

$\therefore \angle PDB = \angle PBD$,
 $\therefore \angle PDB + \angle PFB = 90^\circ = \angle PBD + \angle PBF$,
 $\therefore \angle PBF = \angle PFB$,
 $\therefore PB = PF$,
 $\therefore PD = PF$, 即点 P 恰为 DF 的中点;

(2) $\triangle APE$ 是等腰直角三角形, 理由如下:

$\therefore$ 四边形 $ABCD$, $BEFG$ 都是正方形,

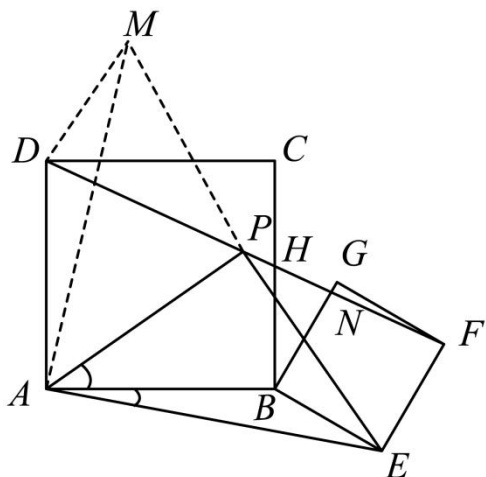
$\therefore \angle CAE = \angle PEA = 45^\circ$

$\therefore AP = EP, \angle APE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle APE$ 是等腰直角三角形;

(3) $\triangle APE$ 的形状不改变,

延长 EP 至点 M , 使 $PM = EP$, 连接 MA, MD ,



图③

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 、四边形 $BEFG$ 都是正方形,

$\therefore AB = AD, \angle BAD = \angle ABC = \angle EBG = 90^\circ, BE = EF, BG \parallel EF$,

$\therefore$ 点 P 为 DF 的中点,

$\therefore PD = PF$,

$\therefore \angle DPM = \angle EPF$,

$\therefore \triangle MPD \cong \triangle EPF$ (SAS),

$\therefore DM = EF, \angle DMP = \angle PEF$,

$\therefore BE = DM, DM \parallel EF$,

$\therefore BG \parallel DM$,

设 DF 交 BC 于点 H , 交 BG 于点 N ,

$$\therefore \angle MDN = \angle DNB,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADN = \angle BHN,$$

$$\because \angle BHN + \angle BNH + \angle HBN = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle ADN + \angle MDN = \angle BHN + \angle BNH = 180^\circ - \angle HBN,$$

$$\because \angle ABE = 360^\circ - \angle ABC - \angle EBG - \angle HBN = 180^\circ - \angle HBN,$$

$$\therefore \angle ADM = \angle ABE,$$

$$\text{又} \because AD = AB,$$

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ABE (\text{SAS}),$$

$$\therefore AM = AE, \angle DAM = \angle BAE,$$

$$\because PM = EP,$$

$$\therefore AP \perp ME, \text{ 即 } \angle APE = 90^\circ,$$

$$\because \angle DAM + \angle MAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle MAB = 90^\circ, \text{ 即 } \angle MAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MAP = \angle PAE = 45^\circ,$$

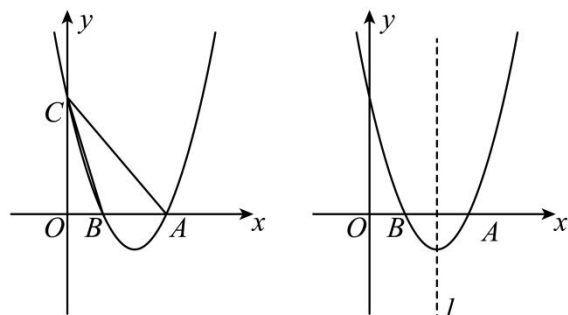
$$\therefore \angle PEA = 45^\circ = \angle PAE,$$

$$\therefore AP = EP,$$

$$\therefore \triangle APE \text{ 是等腰直角三角形.}$$

【点睛】此题考查了正方形的性质，全等三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，平行线的性质等，(3) 中作辅助线利用中点构造全等三角形是解题的难点，熟练掌握各性质和判定定理是解题的关键.

26. 如图，二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于 C 点，其中 $B(1, 0)$, $C(0, 3)$.



(备用图)

(1) 求这个二次函数的表达式;

(2) 在二次函数图象上是否存在点 P ，使得 $S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$ ？若存在，请求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 点 Q 是对称轴 l 上一点，且点 Q 的纵坐标为 a ，当 $\triangle QAC$ 是锐角三角形时，求 a 的取值范围.

【答案】(1) $y = x^2 - 4x + 3$

(2) $P(2, -1)$ 或 $P\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $P\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$

(3) $\frac{3+\sqrt{17}}{2} < a < 5$ 或 $-1 < a < \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) 根据 $S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$ ，可得 P 到 AC 的距离等于 B 到 AC 的距离，进而作出两条 AC 的平行线，求得解析式，联立抛物线即可求解；

(3) 根据题意，求得当 $\triangle QAC$ 是直角三角形时的 a 的值，进而观察图象，即可求解，分 $a > 0$ 和 $a < 0$ 两种情况讨论，分别计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：将点 $B(1, 0)$ ， $C(0, 3)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，得

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$ ；

【小问 2 详解】

$$\because y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1,$$

顶点坐标为 $(2, 1)$ ，

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时， } x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\text{解得： } x_1 = 1, x_2 = 3$$

$\therefore A(3, 0)$ ，则 $OA = 3$

$\therefore C(0,3)$, 则 $OC = 3$

$\therefore \triangle AOC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$$

$\therefore P$ 到 AC 的距离等于 B 到 AC 的距离,

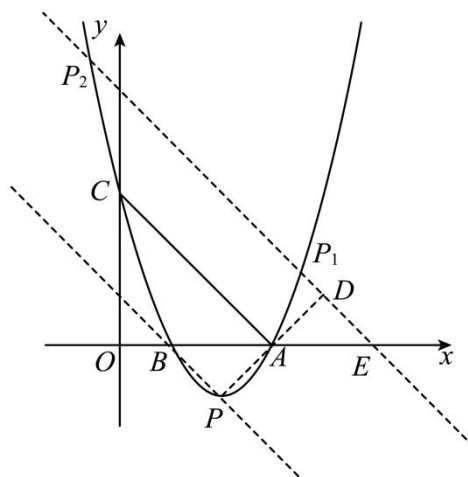
$\therefore A(3,0)$, $C(0,3)$, 设直线 AC 的解析式为 $y = kx + 3$

$$\therefore 3k + 3 = 0$$

解得: $k = -1$

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -x + 3$,

如图所示, 过点 B 作 AC 的平行线, 交抛物线于点 P ,



设 BP 的解析式为 $y = -x + d$, 将点 $B(1,0)$ 代入得,

$$-1 + d = 0$$

解得: $d = 1$

$\therefore$ 直线 BP 的解析式为 $y = -x + 1$,

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$\therefore P(2,-1)$,

$$\therefore PA = \sqrt{(3-2)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, PB = \sqrt{(2-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, AB = 3-1 = 2$$

$$\therefore PA^2 + PB^2 = AB^2$$

$\therefore \triangle ABP$ 是等腰直角三角形，且 $\angle APB = 90^\circ$ ，

如图所示，延长 PA 至 D ，使得 $AD = PA$ ，过点 D 作 AC 的平行线 DE ，交 x 轴于点 E ，则 $DA = PA$ ，
则符合题意的点 P 在直线 DE 上，

$\because \triangle APB$ 是等腰直角三角形， $DE \parallel AC, AC \perp PD$

$\therefore \angle DAE = \angle BAP = 45^\circ, PD \perp DE$

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AE = \sqrt{2}AD = \sqrt{2}AP = 2$

$\therefore E(5, 0)$

设直线 DE 的解析式为 $y = -x + e$

$\therefore -5 + e = 0$

解得： $e = 5$

$\therefore$ 直线 DE 的解析式为 $y = -x + 5$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 5 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{7 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore P\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{7 + \sqrt{17}}{2}\right) \text{ 或 } P\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right)$$

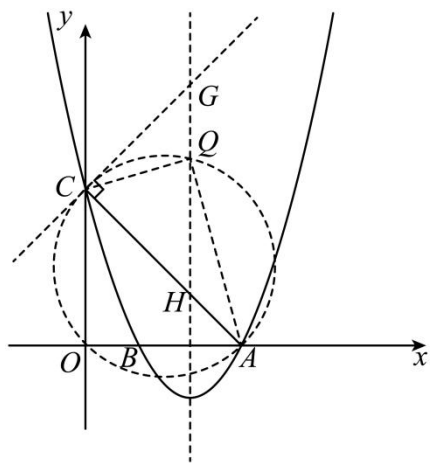
综上所述， $P(2, -1)$ 或 $P\left(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{7 + \sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $P\left(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{7 - \sqrt{17}}{2}\right)$ ；

【小问 3 详解】

①当 $a > 0$ 时，如图所示，过点 C 作 $CG \perp AC$ 交 $x = 2$ 于点 G ，

当点 Q 与点 G 重合时， $\triangle ACQ$ 是直角三角形，

当 $\angle AQC = 90^\circ$ 时， $\triangle ACQ$ 是直角三角形，



设 AC 交 $x=2$ 于点 H ,

$\because$ 直线 AC 的解析式为 $y=-x+3$,

则 $H(2,1)$,

$$\therefore CH = \sqrt{2^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2},$$

$\because \angle CHG = \angle OCH = 45^\circ$,

$\therefore \triangle CHG$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore HG = \sqrt{2}CH = \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$

$\therefore G(2,5)$,

设 $Q(2, q)$, 则 $AQ^2 = 1^2 + q^2, CQ^2 = 2^2 + (q-3)^2 = q^2 - 6q + 13$

$$\because AC^2 = 3^2 + 3^2 = 18$$

$$\therefore 18 = q^2 - 6q + 13 + 1^2 + q^2$$

$$\text{解得: } q = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ (舍去) 或 } q = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$$

$$\therefore Q\left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$\because \triangle QAC$ 是锐角三角形

$$\therefore \frac{3+\sqrt{17}}{2} < a < 5;$$

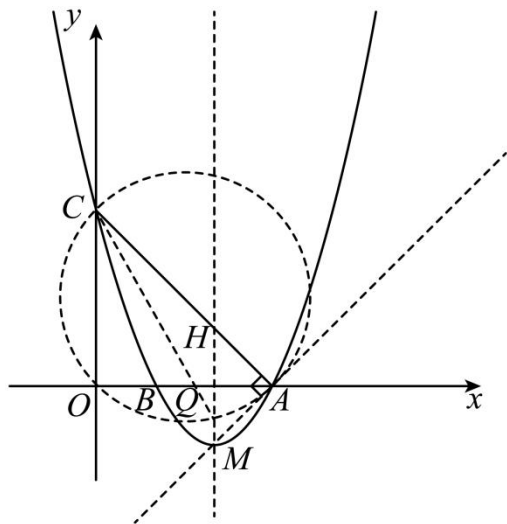
当 $a < 0$ 时, 如图所示,

同理可得 $AQ^2 + QC^2 = AC^2$

$$\text{即} \therefore 18 = q^2 - 6q + 13 + 1^2 + q^2$$

$$\text{解得: } q = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } q = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \text{ (舍去)}$$

由 (2) 可得 $AM \perp AC$ 时, $M(2, -1)$



$$\therefore -1 < a < \frac{3-\sqrt{17}}{2}$$

综上所述, 当 $\triangle QAC$ 是锐角三角形时, $\frac{3+\sqrt{17}}{2} < a < 5$ 或 $-1 < a < \frac{3-\sqrt{17}}{2}$.

【点睛】 本题考查了二次函数综合运用, 面积问题, 角度问题, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

