

永州市 2023 年初中学业水平考试数学（试题卷）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分．每个小题只有一个正确选项，请将正确的选项填涂到答题卡上）

1. 我国古代数学名著《九章算术》中对正负数的概念注有“今两算得失相反，要令正负以名之”、如：粮库把运进 30 吨粮食记为“+30”，则“-30”表示（ ）

- A. 运出 30 吨粮食 B. 亏损 30 吨粮食 C. 卖掉 30 吨粮食 D. 吃掉 30 吨粮食

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意明确“正”和“负”所表示的意义，再根据题意即可求解．

【详解】解：粮库把运进 30 吨粮食记为“+30”，则“-30”表示运出 30 吨粮食．

故选：A

【点睛】本题考查了正负数的意义，理解“正”和“负”分别表示相反意义的量是解题关键．

2. 企业标志反映了思想、理念等企业文化，在设计上特别注重对称美，下列企业标志图为中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据中心对称图形的定义进行逐一判断即可：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心．

【详解】解：A. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

C. 是中心对称图形，故此选项符合题意；

D. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

故选 C.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形的定义，解题的关键在于能够熟练掌握中心对称图形的定义．

3. 下列多边形中，内角和等于 360° 的是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】根据 n 边形内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 分别求解后，即可得到答案【详解】解：A. 三角形内角和是 180° ，故选项不符合题意；B. 四边形内角和为 $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$ ，故选项符合题意；C. 五边形内角和为 $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$ ，故选项不符合题意；D. 六边形内角和为 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ ，故选项不符合题意.

故选：B.

【点睛】此题考查了 n 边形内角和，熟记 n 边形内角和公式 $(n-2) \cdot 180^\circ$ 是解题的关键.4. 关于 x 的一元一次方程 $2x + m = 5$ 的解为 $x = 1$ ，则 m 的值为 ()

A. 3

B. -3

C. 7

D. -7

【答案】A

【解析】

【分析】把 $x = 1$ 代入 $2x + m = 5$ 再进行求解即可.【详解】解：把 $x = 1$ 代入 $2x + m = 5$ 得： $2 + m = 5$ ，解得： $m = 3$.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了一元一次方程的解，以及解一元一次方程，解题的关键是掌握使一元一次方程左右两边相等的未知数的值是一元一次方程的解，以及解一元一次方程的方法和步骤.

5. 下列各式计算结果正确的是 ()

A. $3x + 2x = 5x^2$ B. $\sqrt{9} = \pm 3$ C. $(2x)^2 = 2x^2$ D. $2^{-1} = \frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项的运算法则，二次根式的运算，积的乘方运算法则，以及负整数幂运算法则，逐个进行计算即可.

【详解】解：A、 $3x + 2x = 5x$ ，故 A 不正确，不符合题意；B、 $\sqrt{9} = 3$ ，故 B 不正确，不符合题意；

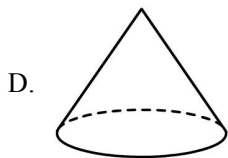
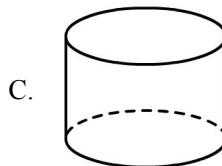
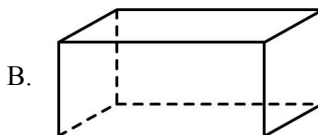
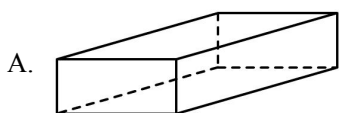
C、 $(2x)^2 = 4x^2$ ，故 C 不正确，不符合题意；

D、 $2^{-1} = \frac{1}{2}$ ，故 D 正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题主要考查了合并同类项的运算法则，二次根式的运算，积的乘方运算法则，以及负整数幂运算法则，解题的关键是熟练掌握相关运算法则并熟练运用.

6. 下列几何体中，其三视图的主视图和左视图都为三角形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据三视图的意义判断即可.

【详解】A. 主视图和左视图都为长方形，不符合题意；

B. 主视图和左视图都为长方形，不符合题意；

C. 主视图和左视图都为长方形，不符合题意；

D. 主视图和左视图都为三角形，符合题意，

故选 D.

【点睛】本题考查了几何体的三视图，熟练掌握三视图的意义是解题的关键.

7. 某县 2020 年人均可支配收入为 2.36 万元，2022 年达到 2.7 万元，若 2020 年至 2022 年间每年人均可支配收入的增长率都为 x ，则下面所列方程正确的是（ ）

A. $2.7(1+x)^2 = 2.36$

B. $2.36(1+x)^2 = 2.7$

C. $2.7(1-x)^2 = 2.36$

D. $2.36(1-x)^2 = 2.7$

【答案】B

【解析】

【分析】设 2020 年至 2022 年间每年人均可支配收入的增长率都为 x ，根据题意列出一元二次方程即可.

【详解】解：设 2020 年至 2022 年间每年人均可支配收入的增长率都为 x ，根据题意得，

$$2.36(1+x)^2 = 2.7,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键.

8. 今年2月，某班准备从《在希望的田野上》《我和我的祖国》《十送红军》三首歌曲中选择两首进行排练，参加永州市即将举办的“唱响新时代，筑梦新征程”合唱选拔赛，那么该班恰好选中前面两首歌曲的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 1

【答案】B

【解析】

【分析】根据概率公式，即可解答.

【详解】解：从三首歌曲中选择两首进行排练，有《在希望的田野上》《我和我的祖国》、《在希望的田野上》《十送红军》、《我和我的祖国》《十送红军》共三种选择方式，

故选到前两首的概率是 $\frac{1}{3}$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了根据概率公式计算概率，排列出总共可能的情况的数量是解题的关键.

9. 已知点 $M(2, a)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上，其中 a, k 为常数，且 $k > 0$ ，则点 M 一定在（ ）

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】A

【解析】

【分析】根据反比例函数中的 $k > 0$ ，可知反比例函数经过第一、三象限，再根据点 M 点的横坐标判断点 M 所在的象限，即可解答

【详解】解：∵ $k > 0$ ，

∴ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过第一、三象限，

故点 M 可能在第一象限或者第三象限，

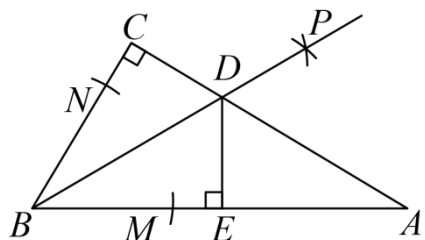
∵ $M(2, a)$ 的横坐标大于 0，

∴ $M(2, a)$ 一定在第一象限，

故选：A.

【点睛】本题考查了判断反比例函数所在的象限，判断点所在的象限，熟知反比例函数的图象所经过的象限与 k 值的关系是解题的关键.

10. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，以 B 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 AB ， BC 于点 M ， N ，再分别以 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的定长为半径画弧，两弧交于点 P ，作射线 BP 交 AC 于点 D ，作 $DE \perp AB$ ，垂足为 E ，则下列结论不正确的是（ ）



- A. $BC = BE$ B. $CD = DE$ C. $BD = AD$ D. BD 一定经过 $\triangle ABC$ 的内心

【答案】C

【解析】

【分析】根据作图可得 BP 是 $\angle CBA$ 的角平分线，根据角平分线的性质得出 $DC = DE$ ，即可判断 B，证明 $\text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle BED$ ，根据全等三角形的性质，即可判断 A，根据三角形内心的定义，即可判断 D 选项，假设 $BD = AD$ 成立，得出 $\angle A = 30^\circ$ ，即可判断 C 选项.

【详解】解：根据作图可得 BP 是 $\angle CBA$ 的角平分线，点 D 在 BP 上， $DC \perp BC$ ， $DE \perp AB$ ，

$\therefore DC = DE$ ，故 B 选项正确，

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ ， $\text{Rt}\triangle BED$ 中，

$$\begin{cases} CD = DE \\ BD = BD \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle BED$ (HL),

$\therefore BC = BE$ ，故 A 选项正确；

$\therefore BP$ 是 $\angle CBA$ 的角平分线，三角形的内心是三条角平分线的交点，

$\therefore BD$ 一定经过 $\triangle ABC$ 的内心，故 D 选项正确；

若 $BD = AD$ ，则 $DB = DA$ ， $\angle DBA = \angle A$ ，

又 $\angle DBC = \angle DBA$ ，

则 $\angle A + \angle DBA + \angle DBC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 30^\circ$ ，而题目没有给出这个条件，故 C 选项不一定正确，

故选：C.

【点睛】本题考查了作角平分线，三角形角平分线的定义，全等三角形的性质与判定，三角形的内心的定义，熟练掌握基本作图是解题的关键.

二、填空题（本大题共 8 个小题，每小题 4 分，共 32 分．请将答案填在答题卡的答案栏内）

11. -0.5 ， 3 ， -2 三个数中最小的数为_____.

【答案】 -2

【解析】

【分析】根据有理数比较大小的法则即可求出答案.

【详解】解：∵ -0.5 ， -2 ， 3 三个数中，只有 3 是正数，

∴ 3 最大.

∵ $|-0.5| = 0.5$ ， $|-2| = 2$ ，

∴ $0.5 < 2$ ，

∴ $-0.5 > -2$.

∴ -2 最小.

故答案为： -2 .

【点睛】本题考查了有理数比较大小，解题的关键在于熟练掌握有理数比较大小的方法：正数始终大于负数；两个负数比较，绝对值大的反而小.

12. $2a^2$ 与 $4ab$ 的公因式为_____.

【答案】 $2a$

【解析】

【分析】根据确定公因式的确定方法：系数取最大公约数；字母取公共字母；字母指数取最低次的，即可解答.

【详解】解：根据确定公因式的方法，可得 $2a^2$ 与 $4ab$ 的公因式为 $2a$ ，

故答案为： $2a$.

【点睛】本题考查了公因式的确定，掌握确定公因式的方法是解题的关键.

13. 已知 x 为正整数，写出一个使 $\sqrt{x-3}$ 在实数的范围内没有意义的 x 值是_____.

【答案】 1 （答案不唯一）

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件，可得当 $x-3 < 0$ 时， $\sqrt{x-3}$ 没有意义，解不等式，即可解答.

【详解】解：当 $x-3 < 0$ 时， $\sqrt{x-3}$ 没有意义，

解得 $x < 3$ ，

$\because x$ 为正整数，

$\therefore x$ 可取 1, 2,

故答案为：1.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，熟知根号下的式子小于零时，二次根式无意义，是解题的关键.

14. 甲、乙两队学生参加学校仪仗队选拔，两队队员的平均身高均为 1.72m，甲队队员身高的方差为 1.2，乙队队员身高的方差为 5.6，若要求仪仗队身高比较整齐，应选择_____队较好.

【答案】甲

【解析】

【分析】根据方差的意义判断即可.

【详解】 $\because S_{\text{甲}}^2 = 1.2, S_{\text{乙}}^2 = 5.6$,

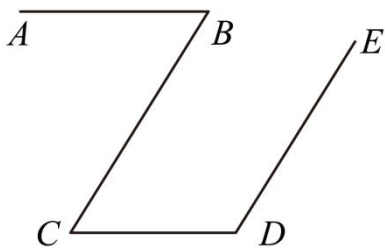
$\therefore S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2$,

$\therefore$ 估计这两支仪仗队身高比较整齐的是甲，

故答案为：甲.

【点睛】本题主要考查样本估计总体、方差，解题的关键是掌握方差是反映一组数据的波动大小的一个量. 方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好.

15. 如图， $AB \parallel CD, BC \parallel ED, \angle B = 80^\circ$ ，则 $\angle D =$ _____度.



【答案】100

【解析】

【分析】根据 $AB \parallel CD, \angle B = 80^\circ$ ，得出 $\angle C = 80^\circ$ ，根据 $BC \parallel ED$ ，即可得出 $\angle D = 180^\circ - \angle C$ ，即可求解.

【详解】解：∵ $AB \parallel CD$, $\angle B = 80^\circ$,

$$\therefore \angle C = \angle B = 80^\circ,$$

$$\therefore BC \parallel ED,$$

$$\therefore \angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ,$$

故答案为：100.

【点睛】本题主要考查了平行线的性质，解题的关键是熟练掌握两直线平行，内错角相等，同旁内角互补.

16. 若关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-4} - \frac{m}{4-x} = 1$ (m 为常数) 有增根，则增根是_____.

【答案】 $x = 4$

【解析】

【分析】根据使分式的分母为零的未知数的值，是方程的增根，计算即可.

【详解】∵ 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-4} - \frac{m}{4-x} = 1$ (m 为常数) 有增根，

$$\therefore x - 4 = 0,$$

解得 $x = 4$,

故答案为： $x = 4$.

【点睛】本题考查了分式方程的解法，增根的理解，熟练掌握分式方程的解法是解题的关键.

17. 已知扇形的半径为 6，面积为 6π ，则扇形圆心角的度数为_____度.

【答案】 60

【解析】

【分析】根据扇形的面积公式即可求出答案.

【详解】解：设扇形圆心角的度数为 n ，

$$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = 6\pi,$$

∵ 扇形的半径为 6，

$$\therefore \frac{n\pi \times 6^2}{360} = 6\pi$$

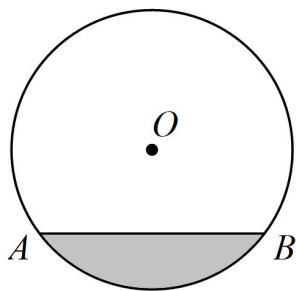
$$\therefore n = 60^\circ.$$

故答案为：60.

【点睛】本题考查了扇形的面积公式，解题的关键在于熟练掌握扇形的面积公式： $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$.

18. 如图， $\odot O$ 是一个盛有水的容器的横截面， $\odot O$ 的半径为 10cm. 水的最深处到水面 AB 的距离为 4cm，

则水面 AB 的宽度为_____ cm.

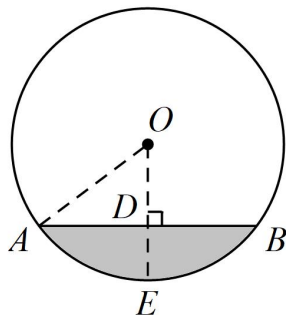


【答案】 16

【解析】

【分析】 过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 E ，则 $AD = DB = \frac{1}{2}AB$ ，依题意，得出 $OD = 6$ ，进而在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中，勾股定理即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 O 作 $OD \perp AB$ 于点 D ，交 $\odot O$ 于点 E ，则 $AD = DB = \frac{1}{2}AB$ ，



$\therefore$ 水的最深处到水面 AB 的距离为 4cm， $\odot O$ 的半径为 10cm.

$\therefore OD = 10 - 4 = 6$ cm,

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$\therefore AB = 2AD = 16$ cm

故答案为：16.

【点睛】 本题考查了垂径定理的应用，勾股定理，熟练掌握垂径定理是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 8 个小题，共 8 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 解关于 x 的不等式组
$$\begin{cases} 2x - 2 > 0 \\ 3(x - 1) - 7 < -2x \end{cases}$$

【答案】 $1 < x < 2$

【解析】

【分析】 分别解不等式组的两个不等式，再取两个不等式的解集的公共部分，即为不等式组的解集.

【详解】解：
$$\begin{cases} 2x-2>0\text{①} \\ 3(x-1)-7<-2x\text{②} \end{cases}$$

解①得， $x>1$ ，

解②得， $x<2$ ，

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $1<x<2$ 。

【点睛】 本题考查了解一元一次不等式组的解集，取两个不等式的解集的公共部分的口诀为：“大大取大，小小取小，大小小大取中间，大大小小则无解”，熟知上述口诀是解题的关键。

20. 先化简，再求值： $\left(1-\frac{1}{x+1}\right) \div \frac{x}{x^2+2x+1}$ ，其中 $x=2$ 。

【答案】 $x+1$; 3

【解析】

【分析】 先对分式通分、因式分解、约分等化简，化成最简分式，后代入求值。

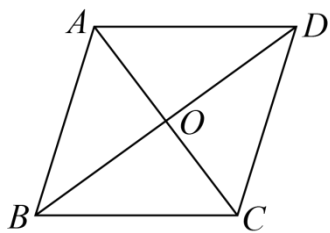
【详解】
$$\begin{aligned} & \left(1-\frac{1}{x+1}\right) \div \frac{x}{x^2+2x+1} \\ &= \frac{x}{x+1} \times \frac{(x+1)^2}{x} \\ &= x+1; \end{aligned}$$

当 $x=2$ 时，

原式 $= 2+1=3$ 。

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，运用因式分解，通分，约分等技巧化简是解题的关键。

21. 如图，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，其对角线相交于点 O ， $OA=3$, $BD=8$, $AB=5$ 。



(1) $\triangle AOB$ 是直角三角形吗？请说明理由；

(2) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形。

【答案】 (1) $\triangle AOB$ 是直角三角形，理由见解析。

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形对角线互相平分可得 $BO = \frac{1}{2}BD = 4$ ，再根据勾股定理的逆定理，即可得出结论；

(2) 根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形，即可求证。

【小问 1 详解】

解： $\triangle AOB$ 是直角三角形，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore BO = \frac{1}{2}BD = 4,$$

$$\because OA^2 + OB^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = AB^2,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是直角三角形。

【小问 2 详解】

证明：由 (1) 可得： $\triangle AOB$ 是直角三角形，

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

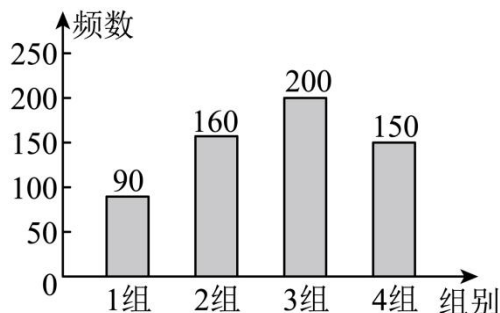
即 $AC \perp BD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形。

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质，勾股定理的逆定理，菱形的判定，解题的关键是掌握平行四边形对角线互相平分，对角线互相垂直的平行四边形是菱形。

22. 今年 3 月 27 日是第 28 个全国中小学生安全教育日。某市面向中小学生举行了一次关于心理健康、预防欺凌、防漏水、应急疏散等安全专题知识竞赛，共有 18360 名学生参加本次竞赛。为了解本次竞赛成绩情况，随机抽取了 n 名学生的成绩 x （成绩均为整数，满分为 100 分）分成四个组：1 组 $(60 \leq x < 70)$ 、2 组 $(70 \leq x < 80)$ 、3 组 $(80 \leq x < 90)$ 、4 组 $(90 \leq x < 100)$ ，并绘制如下图所示频数分布图



(1) $n =$ _____；所抽取的 n 名学生成绩的中位数在第 _____ 组；

(2) 若成绩在第 4 组才为优秀，则所抽取的 n 名学生中成绩为优秀的频率为 _____；

(3) 试估计 18360 名参赛学生中，成绩大于或等于 70 分的人数。

【答案】(1) 600, 3

(2) 25%

(3) 成绩大于或等于 70 分的人数约为 15606 人

【解析】

【分析】(1) 将各组的频数相加，即可求出 n 的值，再根据中位数的定义，即可得出中位数所在组数；

(2) 用第 4 组的频数除以抽取的学生总数，即可求解；

(3) 用总人数乘以成绩大于或等于 70 分的人数所占百分比，即可求解.

【小问 1 详解】

解: $n = 90 + 160 + 200 + 150 = 600$,

$\therefore 600 \div 2 = 300$,

$\therefore$ 抽取的 n 名学生成绩的中位数为第 300 名学生和第 301 名学生成绩的平均数,

$\therefore 90 + 160 = 250 < 300$, $90 + 160 + 200 = 450 > 300$,

$\therefore$ 抽取的 n 名学生成绩的中位数在第 3 组;

故答案为: 600, 3;

【小问 2 详解】

解: 所抽取的 n 名学生中成绩为优秀的频率 $= \frac{150}{600} \times 100\% = 25\%$,

故答案为: 25%;

【小问 3 详解】

解: $18360 \times \frac{160 + 200 + 150}{600} = 15606$ (人),

答: 成绩大于或等于 70 分的人数约为 15606 人.

【点睛】本题主要考查了频数和频率的定义，用样本估计总体，解题的关键是正确识别统计图，根据统计图，获取需要数据进行求解.

23. 永州市道县陈树湘纪念馆中陈列的陈树湘雕像高 2.9 米 (如图 1 所示), 寓意陈树湘为中国革命“断肠明志”牺牲时的年龄为 29 岁. 如图 2, 以线段 AB 代表陈树湘雕像, 一参观者在水平地面 BN 上 D 处为陈树湘雕拍照, 相机支架 CD 高 0.9 米, 在相机 C 处观测雕像顶端 A 的仰角为 45° , 然后将相机架移到 MN 处拍照, 在相机 M 处观测雕像顶端 A 的仰角为 30° , 求 D 、 N 两点间的距离 (结果精确到 0.1 米, 参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.732$)



图1

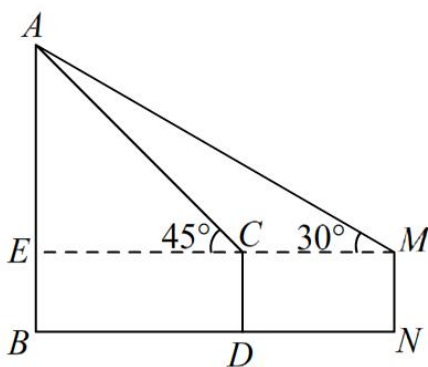


图2

【答案】1.5

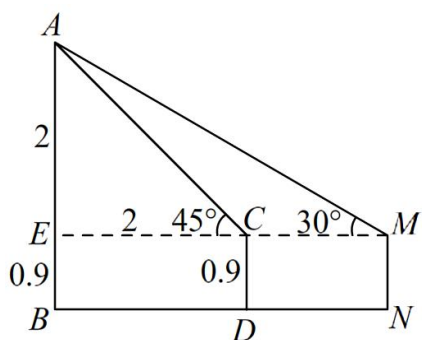
【解析】

【分析】如图， $AB = 2.9$ ， $CD = 0.9$ ，四边形 $EBNM$ ，四边形 $EBDC$ 是矩形，四边形 $CDNM$ 是矩形， $\text{Rt}\triangle AEC$ 中， $\angle ACE = 45^\circ$ ， $AE = AB - EB = 2$ ， $EC = AE = 2$ ， $\text{Rt}\triangle AEM$ 中， $\angle AME = 30^\circ$ ，

$\tan 30^\circ = \frac{AE}{EM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $EM = \sqrt{3}AE = 2\sqrt{3}$ ，进一步求得 $CM = EM - EC > 1.5$ ，所以

$DN = CM = 1.5$ 。

【详解】如图， $AB = 2.9$ 米， $CD = 0.9$ 米



四边形 $EBNM$ ，四边形 $EBDC$ 是矩形，四边形 $CDNM$ 是矩形

$\therefore EB = CD = MN = 0.9$ 米， $DN = CM$

$\because \text{Rt}\triangle AEC$ 中， $\angle ACE = 45^\circ$ ，

$\therefore AE = AB - EB = AB - CD = 2.9 - 0.9 = 2$ 米，

$\therefore EC = AE = 2$ 米

$\because \text{Rt}\triangle AEM$ 中， $\angle AME = 30^\circ$ ，

$\therefore \tan 30^\circ = \frac{AE}{EM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore EM = \sqrt{3}AE = 2\sqrt{3}$ 米

$$\therefore CM = EM - EC = 2\sqrt{3} - 2 \approx 1.732 - 2 = 1.5 \text{ 米}$$

$$\therefore DN = CM = 1.5 \text{ 米}$$

【点睛】本题考查解直角三角形，矩形的判定和性质，观察图形，确定组合图形中，通过直角三角形、矩形之间的位置关系确定线段间的数量关系是解题的关键.

24. 小明观察到一个水龙头因损坏而不断地向外滴水，为探究其漏水造成的浪费情况，小明用一个带有刻度的量筒放在水龙头下面装水，每隔一分钟记录量筒中的总水量，但由于操作延误，开始计时的时候量筒中已经有少量水，因而得到如下表的一组数据：

时间 t (单位：分钟)	1	2	3	4	5	...
总水量 y (单位：毫升)	7	12	17	22	27	...

(1) 探究：根据上表中的数据，请判断 $y = \frac{k}{t}$ 和 $y = kt + b$ (k, b 为常数) 哪一个能正确反映总水量 y 与时间 t 的函数关系？并求出 y 关于 t 的表达式；

(2) 应用：

①请你估算小明在第 20 分钟测量时量筒的总水量是多少毫升？

②一个人一天大约饮用 1500 毫升水，请你估算这个水龙头一个月（按 30 天计）的漏水量可供一人饮用多少天.

【答案】(1) $y = kt + b$ 能正确反映总水量 y 与时间 t 的函数关系； $y = 5t + 2$

(2) ①102 毫升； ②144 天

【解析】

【分析】(1) 观察表格，可发现前一分钟比后一分钟少 5 毫升的水，故可得 $y = kt + b$ 能正确反映总水量 y 与时间 t 的函数关系，再选取两组数据代入函数解析式，根据待定系数法，即可得到 y 关于 t 的表达式；

(2) ①将 $t = 20$ 代入函数，即可解答；

②由解析式可知，每分钟滴水量为 5 毫升，故可算出 1 个月的总滴水量，再除以一个人每天的饮水量，即可解答.

【小问 1 详解】

解：观察表格，可发现前一分钟比后一分钟少 5 毫升的水，故可得 $y = kt + b$ 能正确反映总水量 y 与时间 t 的函数关系，

$$\text{把 } \begin{cases} t=1 \\ y=7 \end{cases}, \begin{cases} t=2 \\ y=12 \end{cases} \text{ 代入 } y = kt + b,$$

$$\text{可得} \begin{cases} 7 = k + b \\ 12 = 2k + b \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = 5 \\ b = 2 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 t 的表达式 $y = 5t + 2$;

【小问 2 详解】

①当 $t = 20$ 时, $y = 5 \times 20 + 2 = 102$,

故小明在第 20 分钟测量时量筒的总水量是 102 毫升,

答: 小明在第 20 分钟测量时量筒的总水量是 102 毫升.

②由解析式可知, 每分钟的滴水量为 5 毫升,

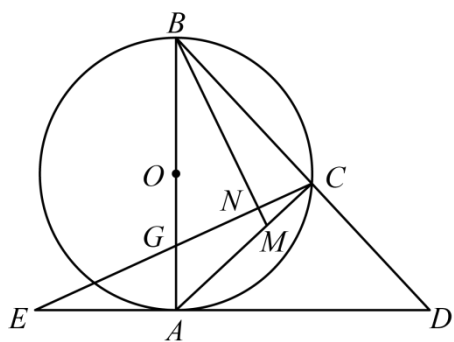
30 天 $= (30 \times 24 \times 60)$ 分钟 $= 43200$ 分钟,

可供一人饮水天数 $\frac{43200 \times 5}{1500} = 144$ 天,

答: 这个水龙头一个月 (按 30 天计) 的漏水量可供一人饮用 144 天.

【点睛】本题考查了待定系数法求一次函数, 一次函数的应用, 正确读懂题意, 求得正确的一次函数解析式是解题的关键.

25. 如图, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 延长 BC 到点 D , 使得 $\angle BAC = \angle BDA$, 点 E 在 DA 的延长线上, 点 M 在线段 AC 上, CE 交 BM 于 N , CE 交 AB 于 G .



(1) 求证: ED 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AC = \sqrt{6}$, $BD = 5$, $AC > CD$, 求 BC 的长;

(3) 若 $DE \cdot AM = AC \cdot AD$, 求证: $BM \perp CE$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 3

(3) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 由 AB 是 $\odot O$ 的直径得到 $\angle ACB = 90^\circ$ ，则 $\angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$ ，由 $\angle BAC = \angle BDA$ 得到 $\angle BDA + \angle ABC = 90^\circ$ ，则 $\angle BAD = 90^\circ$ ，结论得证；

(2) 证明 $\triangle ACB \sim \triangle DCA$ ，则 $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{BD - BC}$ ，可得 $\frac{BC}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{5 - BC}$ ，解得 $BC = 2$ 或 3 ，由 $AC > CD$ 即可得到 BC 的长；

(3) 先证明 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ ，则 $\frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD}$ ，得到 $AC \cdot AD = CD \cdot AB$ ，由 $DE \cdot AM = AC \cdot AD$ 得到 $DE \cdot AM = CD \cdot AB$ ，则 $\frac{AM}{DC} = \frac{AB}{DE}$ ，由同角的余角相等得到 $\angle BAM = \angle CDE$ ，则 $\triangle AMB \sim \triangle DCE$ ，得 $\angle E = \angle ABM$ ，进一步得到 $\angle EGA + \angle E = \angle ABM + \angle BGN = 90^\circ$ ，则 $\angle BNG = 90^\circ$ ，即可得到结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = \angle BDA,$$

$$\therefore \angle BDA + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$\therefore ED$ 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

$$\because \angle BAC = \angle BDA, \angle ACB = \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle DCA,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{BD - BC},$$

$$\therefore \frac{BC}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{5 - BC},$$

解得 $BC = 2$ 或 3 ，

当 $BC = 2$ 时， $CD = BD - BC = 3$ ，

当 $BC = 3$ 时， $CD = BD - BC = 2$ ，

$$\because AC > CD, \text{ 即 } \sqrt{6} > CD,$$

$$\therefore BC = 3;$$

【小问 3 详解】

$BC \perp BE, PH = FC$ ，求点 P 的横坐标.

【答案】(1) $y = -x^2 + 4x + 5$

(2) $\frac{5}{4}$

(3) $\frac{5+\sqrt{5}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据顶点式坐标公式和待定系数法分别求出 a ， b ， c 值，即可求出抛物线解析式.

(2) 利用抛物线的解析式可知道 B 点坐标，从而求出直线 BF 的解析式，从而设 $G(m, -m+5)$ ，根据直线 OP 的解析式 $y = \frac{y_1}{x_1}x$ 可推出 $m = \frac{5x_1}{x_1 + y_1}$ ，从而可以用 x_1, y_1 表达 GT 长度，在观察图形可知

$\frac{S_{\triangle BPG}}{S_{\triangle BOG}} = \frac{PH}{GT} - 1$ ，将其 GT 和 PH 长度代入，即可将面积比转化成二次函数的形式，根据 P 横坐标取值范

围以及此二次函数的图像性质即可求出 $\frac{S_{\triangle BPG}}{S_{\triangle BOG}}$ 的最大值.

(3) 根据正方形的性质和 $FC = PH$ 可求出 $PT = MC$ ，再利用 $\triangle EOB \cong \triangle CMB$ 相似和 $OB = MB$ 可推出 $OE = MC$ ，设 $E(0, d)$ ，即可求出直线 AP 的解析式，用 a 表达 P 点的横纵坐标，最后代入抛物线解析式，求出 d 的值即可求出 P 点横坐标.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a ， b ， c 为常数) 经过点 $F(0, 5)$ ，顶点坐标为 $(2, 9)$ ，

$$\therefore c = 5, \quad -\frac{b}{2a} = 2, \quad \frac{4ac - b^2}{4a} = 9,$$

$$\therefore \begin{cases} b = -4a \\ \frac{20a - b^2}{4a} = 9 \end{cases},$$

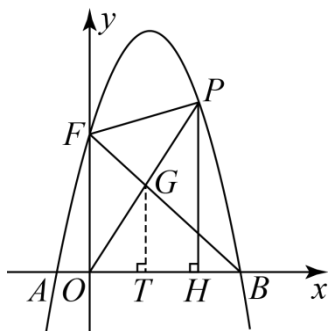
$$\therefore \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

∴ 抛物线的解析式为： $y = -x^2 + 4x + 5$.

故答案为： $y = -x^2 + 4x + 5$.

【小问 2 详解】

解：过点 G 作 $GT \perp x$ 轴于点 T ，如图所示，



$\because$ 抛物线的解析式为： $y = -x^2 + 4x + 5$ ，且与 x 轴交于 A ， B 两点，

$$\therefore B(5, 0),$$

$$\therefore F(0, 5),$$

设直线 BF 的解析式为： $y = kx + b'$ ，则 $\begin{cases} 5k + b' = 0 \\ b' = 5 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b' = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 BF 的解析式为： $y = -x + 5$.

$\therefore G$ 在直线 BF 上， $G(m, -m + 5)$ ，

$\therefore G$ 在直线 OP 上， OP 的解析式为： $y = \frac{y_1}{x_1}x$ ，

$$\therefore -m + 5 = \frac{y_1}{x_1}m,$$

$$\therefore m = \frac{5x_1}{x_1 + y_1}.$$

$$\therefore GT = -m + 5 = -\frac{5x_1}{x_1 + y_1} + 5 = \frac{5y_1}{x_1 + y_1}$$

$$\therefore S_{\triangle BPG} = S_{\triangle BPO} - S_{\triangle BOG},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BPG}}{S_{\triangle BOG}} = \frac{S_{\triangle BPO} - S_{\triangle BOG}}{S_{\triangle BOG}} = \frac{S_{\triangle BPO}}{S_{\triangle BOG}} - 1 = \frac{\frac{1}{2} \times 5 \times PH}{\frac{1}{2} \times 5 \times GT} - 1 = \frac{PH}{GT} - 1.$$

$$\therefore \frac{PH}{GT} = \frac{y_1}{\frac{5y_1}{x_1 + y_1}} = \frac{x_1 + y_1}{5}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BPG}}{S_{\triangle BOG}} = \frac{PH}{GT} - 1 = \frac{x_1 + y_1}{5} - 1$$

$$\therefore P(x_1, -x_1^2 + 4x_1 + 5),$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BPG}}{S_{\triangle BOG}} = \frac{x_1 + y_1}{5} - 1 = \frac{x_1 - x_1^2 + 4x_1 + 5}{5} - 1 = -\frac{1}{5} \left(x_1 - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{4}.$$

$$\therefore x_1 \geq \frac{5}{2}, \quad -\frac{1}{5} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } \frac{S_{\triangle BPG}}{S_{\triangle BOG}} \text{ 有最大值, 且最大值为: } -\frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{5}{4} = \frac{5}{4}.$$

故答案为: $\frac{5}{4}$.

【小问3 详解】

解: $\because BC \perp BE,$

$$\therefore \angle MBC + \angle MBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBE + \angle MBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBE = \angle MBC,$$

$$\therefore \angle CMB = \angle EOB = 90^\circ,$$

$$\therefore MB = BO,$$

$$\therefore \triangle EOB \cong \triangle CMB (ASA),$$

设 $EO = d$, $E(0, d),$

$$\therefore PH = FC = FM + MC = 5 + d,$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 4x + 5$, 且与 x 轴交于 A, B 两点,

$$\therefore A(-1, 0).$$

设直线 AP 的解析式为： $y = mx + n$ ， 则 $\begin{cases} n = d \\ -m + n = 0 \end{cases}$ ，

$$\therefore \begin{cases} m = d \\ n = d \end{cases} ,$$

$\therefore$ 直线 AP 的解析式为： $y = dx + d$.

$\because PH = d + 5$ ， P 在直线 AP 上，

$$\therefore d + 5 = dx + d ,$$

$$\therefore x = \frac{5}{d} ,$$

$$\therefore -x^2 + 4x + 5 = dx + d ,$$

$$\therefore x^2 + (d - 4)x + (d - 5) = 0 ,$$

$$\therefore (x + 1)[x + (d - 5)] = 0 \quad (\text{十字相乘法}),$$

$$\text{由 } x = \frac{5}{d}, \text{ 得: } d = \frac{5}{x},$$

$$(x + 1)\left(x + \frac{5}{x} - 5\right) = 0 ,$$

$$\therefore (x + 1) = 0, \left(x + \frac{5}{x} - 5\right) = 0$$

$$\therefore x_1 = -1 ,$$

$$x + \frac{5}{x} - 5 = 0 , \text{ 即 } x^2 - 5x + 5 = 0 ,$$

$$\text{解得: } x_2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}, \quad x_3 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} ,$$

$$\therefore x \geq \frac{5}{2} ,$$

$$\therefore x = \frac{5+\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 点横坐标为: } x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

【点睛】 本题考查的是二次函数的综合应用题，属于压轴题，解题的关键在于能否将面积问题和二次函数有效结合.

