

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 2 的相反数是（ ）

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【答案】 B**【解析】****【详解】** 2 的相反数是-2.

故选：B.

2. 计算： $(3a)^2 = (\quad)$

- A. $5a$ B. $3a^2$ C. $6a^2$ D. $9a^2$

【答案】 D**【解析】****【分析】** 根据积的乘方法则计算即可.**【详解】** 解： $(3a)^2 = 9a^2$.

故选：D

【点睛】 此题考查了积的乘方，积的乘方等于各因数乘方的积，熟练掌握积的乘方法则是解题的关键.3. 计算： $(-4) \times \frac{3}{2} = (\quad)$

- A. -6 B. 6 C. -8 D. 8

【答案】 A**【解析】****【分析】** 根据有理数的乘法法则计算即可.**【详解】** 解： $(-4) \times \frac{3}{2} = -6$.

故选：A

【点睛】 此题考查了有理数乘法，两数相乘，同号得正，异号得负，并把绝对值相乘，熟练掌握有理数的乘法法则是解题的关键.

4. 从 6 名男生和 4 名女生的注册学号中随机抽取一个学号，则抽到的学号为男生的概率是（ ）

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】 B**【解析】**

【分析】根据概率公式求解即可.

【详解】解：总人数为10人，

随机抽取一个学号共有10种等可能结果，

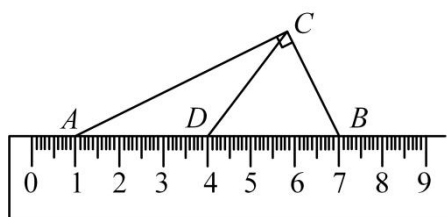
抽到的学号为男生的可能有6种，

则抽到的学号为男生的概率为： $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了概率公式求概率；解题的关键是熟练掌握概率公式.

5. 一技术人员用刻度尺（单位：cm）测量某三角形部件的尺寸. 如图所示，已知 $\angle ACB = 90^\circ$ ，点D为边AB的中点，点A、B对应的刻度为1、7，则 $CD =$ （ ）



A. 3.5cm

B. 3cm

C. 4cm

D. 6cm

【答案】B

【解析】

【分析】由图求得AB的长度，结合直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半即可求解.

【详解】解：由图可知 $AB = 7 - 1 = 6\text{cm}$ ，

在 $\triangle ACB$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点D为边AB的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB = 3\text{cm},$$

故选：B.

【点睛】本题考查直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；解题的关键是熟练掌握该性质.

6. 下列哪个点在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上？（ ）

A. $P_1(1, -4)$

B. $P_2(4, -1)$

C. $P_3(2, 4)$

D. $P_4(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上的点的横纵坐标乘积为4进行判断即可.

【详解】解：A. $\because 1 \times (-4) = -4 \neq 4$, $\therefore P_1(1, -4)$ 不在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上，故选项不符合题意；

B. $\because 4 \times (-1) = -4 \neq 4$, $\therefore P_2(4, -1)$ 不在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上，故选项不符合题意；

C. $\because 2 \times 4 = 8 \neq 4$, $\therefore P_3(2, 4)$ 不在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上，故选项不符合题意；

D. $\because 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$, $\therefore P_4(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图像上，故选项符合题意.

故选：D.

【点睛】此题考查了反比例函数，熟练掌握反比例函数图象上的点的坐标满足函数解析式是解题的关键.

7. 将关于 x 的分式方程 $\frac{3}{2x} = \frac{1}{x-1}$ 去分母可得 ()

A. $3x-3=2x$

B. $3x-1=2x$

C. $3x-1=x$

D. $3x-3=x$

【答案】A

【解析】

【分析】方程两边都乘以 $2x(x-1)$ ，从而可得答案.

【详解】解： $\because \frac{3}{2x} = \frac{1}{x-1}$,

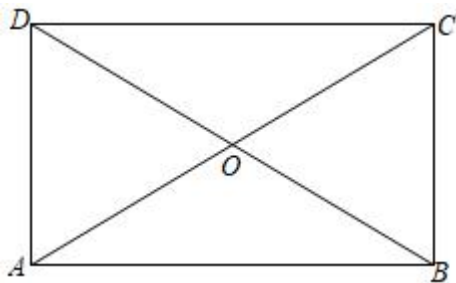
去分母得： $3(x-1) = 2x$,

整理得： $3x-3 = 2x$,

故选 A.

【点睛】本题考查的是分式方程的解法，熟练的把分式方程化为整式方程是解本题的关键.

8. 如图所示，在矩形 $ABCD$ 中， $AB > AD$ ， AC 与 BD 相交于点 O ，下列说法正确的是 ()



A. 点 O 为矩形 $ABCD$ 的对称中心

B. 点 O 为线段 AB 的对称中心

C. 直线 BD 为矩形 $ABCD$ 的对称轴

D. 直线 AC 为线段 BD 的对称轴

【答案】A

【解析】

【分析】由矩形 $ABCD$ 是中心对称图形，对称中心是对角线的交点，线段 AB 的对称中心是线段 AB 的中点，矩形 $ABCD$ 是轴对称图形，对称轴是过一组对边中点的直线，从而可得答案.

【详解】解：矩形 $ABCD$ 是中心对称图形，对称中心是对角线的交点，故 A 符合题意；

线段 AB 的对称中心是线段 AB 的中点，故 B 不符合题意；

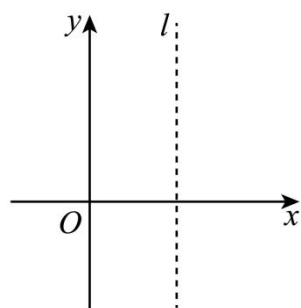
矩形 $ABCD$ 是轴对称图形，对称轴是过一组对边中点的直线，

故 C, D 不符合题意；

故选 A

【点睛】本题考查的是轴对称图形与中心对称图形的含义，矩形的性质，熟记矩形既是中心对称图形也是轴对称图形是解本题的关键.

9. 如图所示，直线 l 为二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像的对称轴，则下列说法正确的是 ()



A. b 恒大于 0

B. a, b 同号

C. a, b 异号

D. 以上说法都不对

【答案】C

【解析】

【分析】先写出抛物线的对称轴方程，再列不等式，再分 $a < 0$, $a > 0$ 两种情况讨论即可.

【详解】解：∵ 直线 l 为二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像的对称轴，

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} > 0,$$

当 $a < 0$ 时，则 $b > 0$,

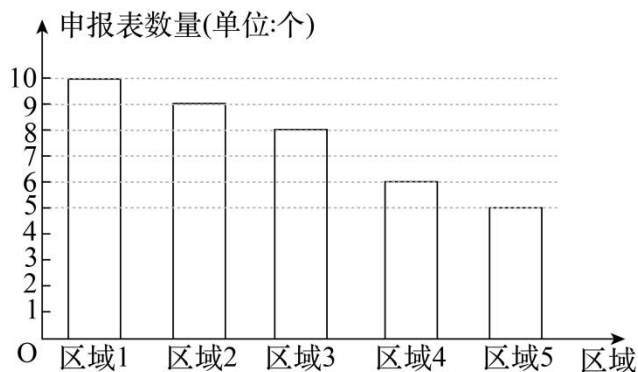
当 $a > 0$ 时，则 $b < 0$,

$\therefore a, b$ 异号，

故选 C.

【点睛】本题考查的是二次函数的性质，熟练的利用对称轴在 y 轴的右侧列不等式是解本题的关键.

10. 申报某个项目时，某 7 个区域提交的申报表数量的前 5 名的数据统计如图所示，则这 7 个区域提交该项目的申报表数量的中位数是 ()



- A. 8 B. 7 C. 6 D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】7个地区的申报数量按照大小顺序排列后，根据中位数的定义即可得到答案.

【详解】解：某7个区域提交的申报表数量按照大小顺序排列后，处在中间位置的申报表数量是6个，故中位数为6.

故选：C

【点睛】此题考查了中位数，一组数据按照大小顺序排列后，处在中间位置的数据或中间两个数的平均数叫做这组数据的中位数，熟练掌握中位数的定义是解题的关键.

二、填空题（本大题共8小题，每小题4分，共32分）

11. 计算： $3a^2 - 2a^2 =$ _____.

【答案】 a^2

【解析】

【分析】直接根据合并同类项法则进行计算即可得到答案.

【详解】解： $3a^2 - 2a^2 = (3 - 2)a^2 = a^2$

故答案为： a^2

【点睛】本题主要考查了合并同类项，掌握合并同类项运算法则是解答本题的关键.

12. 因式分解 $x^2 - 2x + 1 =$ _____.

【答案】 $(x - 1)^2$

【解析】

【分析】直接利用乘法公式分解因式得出答案.

【详解】解： $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$.

故答案为： $(x-1)^2$.

【点睛】此题主要考查了公式法分解因式，正确应用乘法公式是解题关键.

13. 关于 x 的不等式 $\frac{1}{2}x-1>0$ 的解集为_____.

【答案】 $x>2$

【解析】

【分析】根据一元一次不等式的解法即可得出结果.

【详解】解： $\frac{1}{2}x-1>0$,

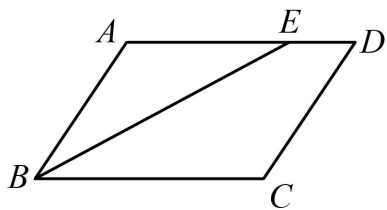
移项，得 $\frac{1}{2}x>1$,

系数化为 1，得 $x>2$.

故答案为： $x>2$.

【点睛】本题考查了一元一次不等式的解法，熟练掌握不等式的性质是本题的关键.

14. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $AB=3$ ， $BC=5$ ， $\angle B$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E ，则 DE 的长为_____.



【答案】 2

【解析】

【分析】根据平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$ ，则 $\angle AEB = \angle CBE$ ，再由角平分线的定义可得 $\angle ABE = \angle CBE$ ，从而求得 $\angle AEB = \angle ABE$ ，则 $AE = AB$ ，从而求得结果.

【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AEB = \angle CBE$,

$\because \angle B$ 的平分线 BE 交 AD 于点 E ,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$,

$\therefore \angle AEB = \angle ABE$,

$\therefore AE = AB$,

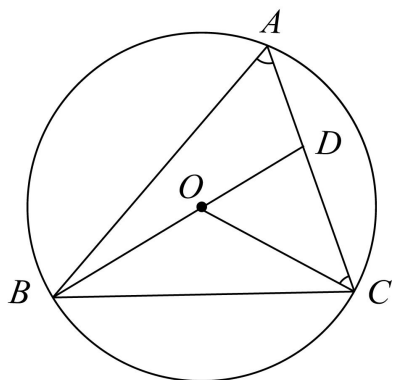
$\because AB=3$ ， $BC=5$,

$\therefore DE = AD - AE = BC - AB = 5 - 3 = 2$,

故答案为：2.

【点睛】本题考查平行四边形的性质、角平分线的定义、等腰三角形的判定，掌握平行四边形的性质是解题的关键.

15. 如图所示，点 A 、 B 、 C 是 $\odot O$ 上不同的三点，点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，连接 BO 、 CO ，并延长线段 BO 交线段 AC 于点 D . 若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle OCD = 40^\circ$ ，则 $\angle ODC =$ _____ 度.



【答案】 80

【解析】

【分析】先根据圆周角定理求出 $\angle BOC$ 的度数，再根据三角形的外角定理即可得出结果.

【详解】解：在 $\odot O$ 中，

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 2 \times 60^\circ = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ODC = \angle BOC - \angle OCD = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$$

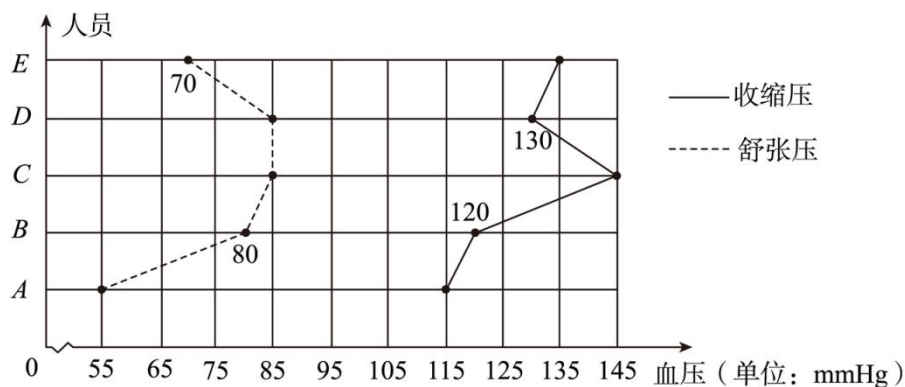
故答案为：80.

【点睛】本题考查了圆周角定理，三角形的外角定理，熟练掌握圆周角定理是本题的关键.

16. 血压包括收缩压和舒张压，分别代表心脏收缩时和舒张时的压力. 收缩压的正常范围是：

20~140mmHg，舒张压的正常范围是：60~90mmHg. 现五人 A 、 B 、 C 、 D 、 E 的血压测量值统计如下：

下：



则这五人中收缩压和舒张压均在正常范围内的人有 _____ 个.

【答案】3

【解析】

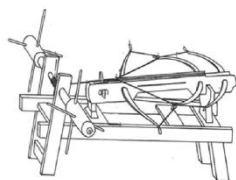
【分析】分析折线统计图即可得出结果.

【详解】解：收缩压在正常范围的有 A 、 B 、 D 、 E ,舒张压在正常范围的有 B 、 C 、 D 、 E ,这五人中收缩压和舒张压均在正常范围内的人有 B 、 D 、 E , 即 3 个,

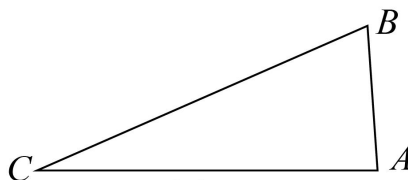
故答案为: 3.

【点睛】本题考查了折线统计图, 熟练识别折线统计图, 从中获得准确信息是本题的关键.

17. 《周礼考工记》中记载有: “.....半矩谓之宣 (xuān), 一宣有半谓之櫪 (zhú)” 意思是: “.....

直角的一半的角叫做宣, 一宣半的角叫做櫪.....”. 即: $1 \text{ 宣} = \frac{1}{2} \text{ 矩}$, $1 \text{ 櫪} = 1\frac{1}{2} \text{ 宣}$ (其中, $1 \text{ 矩} = 90^\circ$),问题: 图 (1) 为中国古代一种强弩图, 图 (2) 为这种强弩图的部分组件的示意图, 若 $\angle A = 1 \text{ 矩}$, $\angle B = 1$ 櫪, 则 $\angle C =$ _____ 度.

(图(1))



(图(2))

【答案】 22.5 或 $22\frac{1}{2}$ 或 $\frac{45}{2}$.

【解析】

【分析】根据矩、宣、櫪的概念计算即可.

【详解】解: 由题意可知,

$$\angle A = 1 \text{ 矩} = 90^\circ,$$

$$\angle B = 1 \text{ 櫪} = 1\frac{1}{2} \text{ 宣} = 1\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \text{ 矩} = 67.5^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ - 67.5^\circ = 22.5^\circ,$$

故答案为: 22.5 .

【点睛】本题考查了新概念的理解, 直角三角形锐角互余, 角度的计算; 解题的关键是新概念的理解, 并正确计算.

18. 已知实数 m 、 x_1 、 x_2 满足: $(mx_1 - 2)(mx_2 - 2) = 4$.①若 $m = \frac{1}{3}$, $x_1 = 9$, 则 $x_2 =$ _____.②若 m 、 x_1 、 x_2 为正整数, 则符合条件的有序实数对 (x_1, x_2) 有 _____ 个

【答案】 ①. 18 ②. 7

【解析】

【分析】 ①把 $m = \frac{1}{3}$, $x_1 = 9$ 代入求值即可;

②由题意知: $(mx_1 - 2), (mx_2 - 2)$ 均为整数, $mx_1 \geq 1, mx_2 \geq 1, mx_1 - 2 \geq -1, mx_2 - 2 \geq -1$, 则

$4 = 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1$, 再分三种情况讨论即可.

【详解】 解: ①当 $m = \frac{1}{3}$, $x_1 = 9$ 时, $(\frac{1}{3} \times 9 - 2) \times (\frac{1}{3}x_2 - 2) = 4$,

解得: $x_2 = 18$;

②当 m, x_1, x_2 为正整数时,

$(mx_1 - 2), (mx_2 - 2)$ 均为整数, $mx_1 \geq 1, mx_2 \geq 1, mx_1 - 2 \geq -1, mx_2 - 2 \geq -1$

而 $4 = 1 \times 4 = 2 \times 2 = 4 \times 1$,

$$\therefore \begin{cases} mx_1 - 2 = 1 \\ mx_2 - 2 = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} mx_1 - 2 = 2 \\ mx_2 - 2 = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} mx_1 - 2 = 4 \\ mx_2 - 2 = 1 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} mx_1 = 3 \\ mx_2 = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} mx_1 = 4 \\ mx_2 = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} mx_1 = 6 \\ mx_2 = 3 \end{cases},$$

当 $\begin{cases} mx_1 = 3 \\ mx_2 = 6 \end{cases}$ 时, $m = 1$ 时, $x_1 = 3, x_2 = 6$; $m = 3$ 时, $x_1 = 1, x_2 = 2$,

故 (x_1, x_2) 为 $(3, 6), (1, 2)$, 共 2 个;

当 $\begin{cases} mx_1 = 4 \\ mx_2 = 4 \end{cases}$ 时, $m = 1$ 时, $x_1 = 4, x_2 = 4$; $m = 2$ 时, $x_1 = 2, x_2 = 2$, $m = 4$ 时, $x_1 = 1, x_2 = 1$

故 (x_1, x_2) 为 $(4, 4), (2, 2), (1, 1)$, 共 3 个;

当 $\begin{cases} mx_1 = 6 \\ mx_2 = 3 \end{cases}$ 时, $m = 1$ 时, $x_1 = 6, x_2 = 3$; $m = 3$ 时, $x_1 = 2, x_2 = 1$,

故 (x_1, x_2) 为 $(6, 3), (2, 1)$, 共 2 个;

综上所述: 共有 $2 + 3 + 2 = 7$ 个.

故答案为: 7.

【点睛】 本题考查了整式方程的代入求值、整式方程的整数解, 因式分解的应用, 及分类讨论的思想方法. 本题的关键及难点是运用分类讨论的思想方法解题.

三、解答题（本大题共 8 小题，共 78 分）

19. 计算： $\sqrt{4} - 2023^0 + 2\cos 60^\circ$

【答案】 2

【解析】

【分析】根据算术平方根的意义，零指数幂的运算法则，特殊角的三角函数值即可得出结果.

【详解】解：原式 $= 2 - 1 + 2 \times \frac{1}{2}$

$$= 1 + 1$$

$$= 2.$$

【点睛】本题考查了算术平方根的意义，零指数幂的运算法则，特殊角的三角函数值，熟练掌握以上知识点是解决本题的关键.

20. 先化简，再求值： $\left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1}{x^2-4}$ ，其中 $x=3$.【答案】 $\frac{1}{x-2}$ ， 1

【解析】

【分析】根据分式的加法和乘法法则可以化简题目中的式子，然后将 x 的值代入化简后的式子即可解答本题.【详解】解：原式 $= \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right) \cdot \frac{x+1}{(x+2)(x-2)}$

$$= \frac{x+2}{x+1} \cdot \frac{x+1}{(x+2)(x-2)}$$

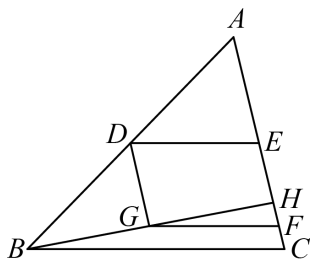
$$= \frac{1}{x-2},$$

当 $x=3$ 时,

$$\text{原式} = \frac{1}{3-2} = 1.$$

【点睛】本题考查分式的化简求值，解答本题的关键是明确分式化简求值的方法.

21. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别为 AB 、 AC 的中点，点 H 在线段 CE 上，连接 BH ，点 G 、 F 分别为 BH 、 CH 的中点.



- (1) 求证：四边形 $DEFG$ 为平行四边形
 (2) $DG \perp BH$, $BD = 3$, $EF = 2$, 求线段 BG 的长度.

【答案】(1) 见解析 (2) $\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 由三角形中位线定理得到 $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$, $GF \parallel BC, GF = \frac{1}{2}BC$, 得到

$GF \parallel DE, GF = DE$, 即可证明四边形 $DEFG$ 为平行四边形;

(2) 由四边形 $DEFG$ 为平行四边形得到 $DG = EF = 2$, 由 $DG \perp BH$ 得到 $\angle DGB = 90^\circ$, 由勾股定理即可得到线段 BG 的长度.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 点 D 、 E 分别为 AB 、 AC 的中点,

$$\therefore DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC,$$

$\because$ 点 G 、 F 分别为 BH 、 CH 的中点.

$$\therefore GF \parallel BC, GF = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore GF \parallel DE, GF = DE,$$

$\therefore$ 四边形 $DEFG$ 为平行四边形;

【小问 2 详解】

$\because$ 四边形 $DEFG$ 为平行四边形,

$$\therefore DG = EF = 2,$$

$$\because DG \perp BH,$$

$$\therefore \angle DGB = 90^\circ,$$

$$\because BD = 3,$$

$$\therefore BG = \sqrt{BD^2 - DG^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}.$$

【点睛】此题考查了中位线定理、平行四边形的判定和性质、勾股定理等知识，证明四边形 $DEFG$ 为平行四边形和利用勾股定理计算是解题的关键.

22. 某花店每天购进16支某种花，然后出售. 如果当天售不完，那么剩下的这种花进行作废处理、该花店记录了10天该种花的日需求量 n (n 为正整数，单位：支)，统计如下表：

日需求量 n	13	14	15	16	17	18
天数	1	1	2	4	1	1

(1) 求该花店在这10天中出现该种花作废处理情形的天数；

(2) 当 $n < 16$ 时，日利润 y (单位：元) 关于 n 的函数表达式为： $y = 10n - 80$ ；当 $n \geq 16$ 时，日利润为80元.

①当 $n = 14$ 时，求该花店这天的利润为多少元？

②求该花店这10天中日利润为70元的日需求量的频率.

【答案】(1) 4天；

(2) ①60元；②该花店这10天中日利润为70元的日需求量的频率为2.

【解析】

【分析】(1) 当 $n < 16$ 时，该种花需要进行作废处理，结合表中数据，符合条件的天数相加即可；

(2) ①当 $n = 14$ 时，代入函数表达式即可求解；

②当 $n < 16$ 时，日利润 y 关于 n 的函数表达式为 $y = 10n - 80$ ；当 $n \geq 16$ 时，日利润为80元， $80 > 70$ ；

即当 $y = 70$ 时求得 n 的值，结合表中数据即可求得频率.

【小问1详解】

解：当 $n < 16$ 时，该种花需要进行作废处理，

则该种花作废处理情形的天数共有： $1 + 1 + 2 = 4$ (天)；

【小问2详解】

①当 $n < 16$ 时，日利润 y 关于 n 的函数表达式为 $y = 10n - 80$ ，

当 $n = 14$ 时， $y = 10 \times 14 - 80 = 60$ (元)；

②当 $n < 16$ 时，日利润 y 关于 n 的函数表达式为 $y = 10n - 80$ ；

当 $n \geq 16$ 时，日利润为80元， $80 > 70$ ，

当 $y = 70$ 时， $70 = 10n - 80$

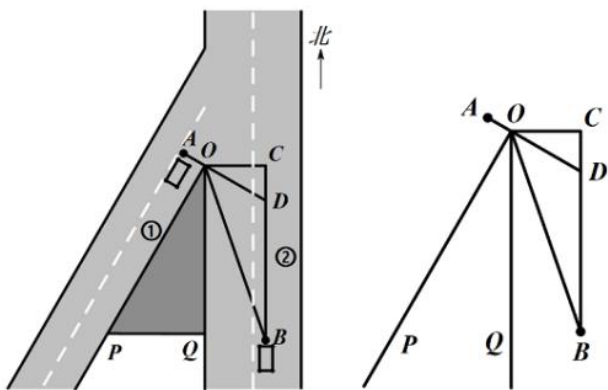
解得： $n=15$ ，

由表可知 $n=15$ 的天数为 2 天，

则该花店这 10 天中日利润为 70 元的日需求量的频率为 2.

【点睛】 本题考查了有理数大小的比较，一次函数求自变量和函数值，统计和频数；解题的关键是理清题意，正确求解.

23. 如图所示，在某交叉路口，一货车在道路①上点 A 处等候“绿灯” 一辆车从被山峰 POQ 遮挡的道路②上的点 B 处由南向北行驶. 已知 $\angle POQ = 30^\circ$ ， $BC \parallel OQ$ ， $OC \perp OQ$ ， $AO \perp OP$ ， 线段 AO 的延长线交直线 BC 于点 D .



(1) 求 $\angle COD$ 的大小；

(2) 若在点 B 处测得点 O 在北偏西 α 方向上，其中 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$ ， $OD=12$ 米. 问该轿车至少行驶多少米

才能发现点 A 处的货车？（当该轿车行驶至点 D 处时，正好发现点 A 处的货车）

【答案】 (1) 30°

(2) 轿车至少行驶 24 米才能发现点 A 处的货车

【解析】

【分析】 (1) 由 $AO \perp OP$ 得到 $\angle POD = 90^\circ$ ， 由 $\angle POQ = 30^\circ$ 得到 $\angle DOQ = 60^\circ$ ， 由 $OC \perp OQ$ 得到 $\angle COQ = 90^\circ$ ， 即可得到 $\angle COD$ 的大小；

(2) 由 $BC \parallel OQ$ 得到 $\angle BCO = 90^\circ$ ， 在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中求得 $CD = \frac{1}{2}OD = 6$ ， 由勾股定理得到 $OC = 6\sqrt{3}$ ，

由 $\tan \alpha = \tan \angle OBC = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{OC}{BC}$ 得到 $BC = 30$ ， 即可得到答案.

【小问 1 详解】

解： $\because AO \perp OP$ ，

$$\therefore \angle POD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POQ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DOQ = \angle POD - \angle POQ = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore OC \perp OQ,$$

$$\therefore \angle COQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = \angle COQ - \angle DOQ = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

即 $\angle COD$ 的大小为 30° ;

【小问 2 详解】

解: $\because BC \parallel OQ$,

$$\therefore \angle BCO = 180^\circ - \angle COQ = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, $\angle COD = 30^\circ$, $OD = 12$,

$$\therefore CD = \frac{1}{2}OD = 6,$$

$$\therefore OC = \sqrt{OD^2 - CD^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \alpha = \tan \angle OBC = \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{OC}{BC},$$

$$\therefore BC = \frac{OC}{\tan \alpha} = 6\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{5} = 30,$$

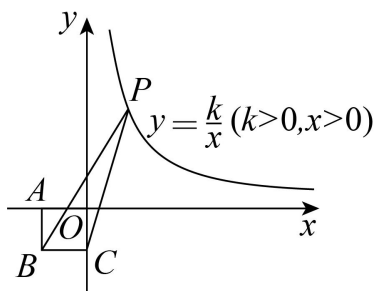
$$\therefore BD = BC - CD = 30 - 6 = 24,$$

即轿车至少行驶 24 米才能发现点 A 处的货车.

【点睛】此题考查了解直角三角形、勾股定理、垂直定义和平行线的性质、方位角的定义等知识, 读懂题意, 熟练掌握直角三角形的性质和锐角三角形函数的定义是解题的关键.

24. 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 四边形 $OABC$ 为正方形, 其中点 A 、 C 分别在 x 轴负半轴, y

轴负半轴上, 点 B 在第三象限内, 点 $A(t, 0)$, 点 $P(1, 2)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图像上



(1) 求 k 的值;

(2) 连接 BP 、 CP ，记 $\triangle BCP$ 的面积为 S ，设 $T = 2S - 2t^2$ ，求 T 的最大值.

【答案】(1) 2

(2) 1

【解析】

【分析】(1) 点 $P(1, 2)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图像上，代入即可得到 k 的值;

(2) 由点 $A(t, 0)$ 在 x 轴负半轴得到 $OA = -t$ ，由四边形 $OABC$ 为正方形得到 $OC = BC = OA = -t$ ，
 $BC \parallel x$ 轴，得 $\triangle BCP$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}t^2 - t$ ，则 $T = -(t+1)^2 + 1$ ，根据二次函数的性质即可得到 T 的最大值.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 点 $P(1, 2)$ 在函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图像上，

$$\therefore 2 = \frac{k}{1},$$

$$\therefore k = 2,$$

即 k 的值为 2;

【小问 2 详解】

$\because$ 点 $A(t, 0)$ 在 x 轴负半轴，

$$\therefore OA = -t,$$

$\because$ 四边形 $OABC$ 为正方形，

$$\therefore OC = BC = OA = -t, \quad BC \parallel x \text{ 轴},$$

$$\therefore \triangle BCP \text{ 的面积为 } S = \frac{1}{2} \times (-t) \times (2 - t) = \frac{1}{2}t^2 - t,$$

$$\therefore T = 2S - 2t^2 = 2\left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) - 2t^2 = -t^2 - 2t = -(t+1)^2 + 1,$$

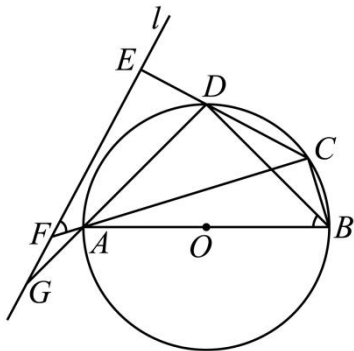
$$\therefore -1 < 0,$$

∴ 抛物线开口向下，

∴ 当 $t = -1$ 时， T 有最大值， T 的最大值是 1.

【点睛】此题考查了二次函数的性质、反比例函数的图象和性质、正方形的性质等知识，数形结合和准确计算是解题的关键.

25. 如图所示，四边形 $ABCD$ 是半径为 R 的 $\odot O$ 的内接四边形， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\angle ABD = 45^\circ$ ，直线 l 与三条线段 CD 、 CA 、 DA 的延长线分别交于点 E 、 F 、 G ，且满足 $\angle CFE = 45^\circ$.



(1) 求证：直线 $l \perp$ 直线 CE ；

(2) 若 $AB = DG$ ；

①求证： $\triangle ABC \cong \triangle GDE$ ；

②若 $R = 1$ ， $CE = \frac{3}{2}$ ，求四边形 $ABCD$ 的周长.

【答案】(1) 见解析；

(2) ①见解析，② $\frac{7}{2} + \sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(1) 在 $\odot O$ 中，根据同弧所对的圆周角相等可得 $\angle ACD = \angle ABD = 45^\circ$ ，结合已知在 $\triangle CFE$ 中根据三角形内角和定理可求得 $\angle FEC = 90^\circ$ ；

(2) ①根据圆内接四边形的性质和邻补角可得 $\angle ABC = \angle GDE$ ，由直径所对的圆周角是直角和 (1) 可得 $\angle ACB = \angle GED$ ，结合已知即可证得 $\triangle ABC \cong \triangle GDE$ (AAS)；

②在 $\odot O$ 中由 $R = 1$ ，可得 $AB = 2$ ，结合题意易证 $DA = DB$ ，在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中由勾股定理可求得 $DA = \sqrt{2}$ ，由①可知易得 $BC + CD = DE + CD = CE$ ，最后代入计算即可求得周长.

【小问 1 详解】

证明：在 $\odot O$ 中，

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AD},$$

$\therefore \angle ACD = \angle ABD = 45^\circ$ ，即 $\angle FCE = 45^\circ$ ，

在 $\triangle CFE$ 中,

$$\because \angle CFE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = 180^\circ - (\angle FCD + \angle CFE) = 90^\circ,$$

即直线 $l \perp$ 直线 CE ;

【小问 2 详解】

① 四边形 $ABCD$ 是半径为 R 的 $\odot O$ 的内接四边形,

$$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\because \angle ADC + \angle GDE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle GDE,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

由 (1) 可知 $\angle GED = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = \angle GED,$$

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle GDE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ABC = \angle GDE \\ \angle ACB = \angle GED, \\ AB = DG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle GDE \text{ (AAS)},$$

② 在 $\odot O$ 中, $R = 1$,

$$\therefore AB = 2R = 2,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ - \angle ABD = 45^\circ,$$

$$\therefore DA = DB,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\therefore DA^2 + DB^2 = AB^2,$$

$$\text{即 } 2DA^2 = 2^2,$$

$$\text{解得: } DA = \sqrt{2},$$

由①可知 $\triangle ABC \cong \triangle GDE$,

$$\therefore BC = DE,$$

$$\therefore BC + CD = DE + CD = CE = \frac{3}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为:

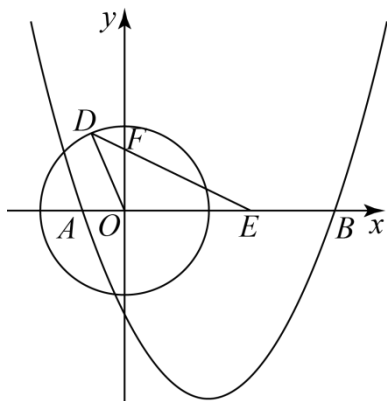
$$DA + AB + BC + CD = DA + AB + CE = 2 + \sqrt{2} + \frac{3}{2} = \frac{7}{2} + \sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查了同弧所对的圆周角相等、三角形内角和定理、垂直的定义、圆内接四边形的性质、邻补角互补、直径所对的圆周角是直角、全等三角形的判定和性质、勾股定理解直角三角形以及周长的计算；解题的关键是灵活运用以上知识，综合求解.

26. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$).

(1) 若 $a = 1$, $c = -1$, 且该二次函数的图像过点 $(2, 0)$, 求 b 的值;

(2) 如图所示, 在平面直角坐标系 Oxy 中, 该二次函数的图像与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < 0 < x_2$, 点 D 在 $\odot O$ 上且在第二象限内, 点 E 在 x 轴正半轴上, 连接 DE , 且线段 DE 交 y 轴正半轴于点 F , $\angle DOF = \angle DEO$, $OF = \frac{3}{2}DF$.



①求证: $\frac{DO}{EO} = \frac{2}{3}$.

②当点 E 在线段 OB 上, 且 $BE = 1$. $\odot O$ 的半径长为线段 OA 的长度的 2 倍, 若 $4ac = -a^2 - b^2$, 求 $2a + b$ 的值.

【答案】 (1) $b = -\frac{3}{2}$

(2) ①见解析; ② 0

【解析】

【分析】 (1) 依题意得出二次函数解析式为 $y = x^2 + bx - 1$, 该二次函数的图像过点 $(2, 0)$, 代入即可求解;

(2) ①证明 $\triangle DOF \sim \triangle DEO$, 根据相似三角形的性质即可求解;

②根据题意可得 $OE = x_2 - 1$, $OD = -2x_1$, 由①可得 $\frac{DO}{EO} = \frac{2}{3}$, 进而得出 $x_2 = 1 - 3x_1$, 由已知可得

$$4\frac{c}{a} + 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0, \text{ 根据一元二次方程根与系数的关系, 可得 } 4(x_1x_2) + 1 + (x_1 + x_2)^2 = 0, \text{ 将 } x_2 = 1 - 3x_1$$

代入, 解关于 x_1 的方程, 进而得出 x_2 , 可得对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because a = 1, c = -1$,

$\therefore$ 二次函数解析式为 $y = x^2 + bx - 1$,

$\because$ 该二次函数的图像过点 $(2, 0)$,

$$\therefore 4 + 4b - 1 = 0$$

$$\text{解得: } b = -\frac{3}{2};$$

【小问 2 详解】

① $\because \angle DOF = \angle DEO, \angle ODF = \angle EDO$,

$$\therefore \triangle DOF \sim \triangle DEO$$

$$\therefore \frac{DF}{DO} = \frac{OF}{EO}$$

$$\therefore \frac{DO}{EO} = \frac{OF}{DF}$$

$$\therefore OF = \frac{3}{2}DF$$

$$\therefore \frac{DO}{EO} = \frac{2}{3};$$

② $\because$ 该二次函数的图像与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, 且 $x_1 < 0 < x_2$,

$$\therefore OA = -x_1, OB = x_2,$$

$$\therefore BE = 1.$$

$$\therefore OE = x_2 - 1,$$

$\because \odot O$ 的半径长为线段 OA 的长度的 2 倍

$$\therefore OD = -2x_1,$$

$$\therefore \frac{DO}{EO} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{-2x_1}{x_2-1} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore 3x_1 + x_2 - 1 = 0,$$

$$\text{即 } x_2 = 1 - 3x_1 \text{ ①},$$

$\therefore$ 该二次函数的图像与 x 轴交于点 $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$,

$\therefore x_1, x_2$ 是方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根,

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

$$\therefore 4ac = -a^2 - b^2, \quad a \neq 0,$$

$$\therefore 4 \cdot \frac{c}{a} + 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = 0,$$

$$\text{即 } 4(x_1x_2) + 1 + (x_1 + x_2)^2 = 0 \text{ ②},$$

$$\text{①代入②, 即 } 4x_1(1-3x_1) + 1 + (x_1 + 1 - 3x_1)^2 = 0,$$

$$\text{即 } 4x_1 - 12x_1^2 + 1 + 1 + 4x_1^2 - 4x_1 = 0,$$

$$\text{整理得 } -8x_1^2 = -2,$$

$$\therefore x_1^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{解得: } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ (正值舍去)}$$

$$\therefore x_2 = 1 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{2}}{2} = 1,$$

$$\therefore b = -2a,$$

$$\therefore 2a + b = 0.$$

【点睛】 本题考查了二次函数的性质，待定系数法求解析式，一元二次方程根与系数的关系，相似三角形的性质与判定，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

