

怀化市 2023 年初中学业水平考试试卷

数学

温馨提示：

1. 本学科试卷分试题卷和答题卡两部分，考试时量为 120 分钟，满分 150 分。

2. 请你将姓名、准考证号等相关信息按要求填涂在答题卡上。

3. 请在答题卡上作答，答在本试题卷上无效。

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分；每小题的四个选项中只有一项是正确的，请将正确选项的代号填涂在答题卡的相应位置上）

1. 下列四个实数中，最小的数是（ ）

A. -5

B. 0

C. $\frac{1}{2}$

D. $\sqrt{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据实数的大小比较法则比较数的大小，再求出最小的数即可。

【详解】 $\because -5 < 0 < \frac{1}{2} < \sqrt{2}$

$\therefore$ 最小的数是：-5

故选：A.

【点睛】本题考查了实数的大小比较，能熟记实数的大小比较法则是解此题的关键。

2. 2023 年 4 月 12 日 21 时，正在运行的中国大科学装置“人造太阳”——世界首个全超导托卡马克东方超环 (EAST) 装置取得重大成果，在第 122254 次实验中成功实现了 403 秒稳态长脉冲高约束模式等离子体运行，创造了托卡马克装置高约束模式运行新的世界纪录。数据 122254 用科学记数法表示为（ ）

A. 12.2254×10^4

B. 1.22254×10^4

C. 1.22254×10^5

D. 0.122254×10^6

【答案】C

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同。

【详解】解：数据 122254 用科学记数法表示为 1.22254×10^5 ，

故选：C.

【点睛】本题考查的知识点是科学记数法——表示较绝对值较大的数。把一个大于等于 10 的数写成科学记数

法 $a \times 10^n$ 的形式时，将小数点放到左边第一个不为 0 的数位后作为 a ，把整数位数减 1 作为 n ，从而确定它的科学记数法形式。

3. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$ C. $(ab^3)^2 = a^2b^9$ D. $5a - 2a = 3$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法、同底数幂的除法、积的乘方和幂的乘方、合并同类项分别计算后，即可得到答案。

【详解】解：A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故选项正确，符合题意；

B. $a^6 \div a^2 = a^4$ ，故选项错误，不符合题意；

C. $(ab^3)^2 = a^2b^6$ ，故选项错误，不符合题意；

D. $5a - 2a = 3a$ ，故选项错误，不符合题意。

故选：A.

【点睛】此题考查了同底数幂的乘法、同底数幂的除法、积的乘方和幂的乘方、合并同类项，熟练掌握运算法则是解题的关键。

4. 剪纸又称刻纸，是中国最古老的民间艺术之一，它是以纸为加工对象，以剪刀（或刻刀）为工具进行创作的艺术。民间剪纸往往通过谐音、象征、寓意等手法提炼、概括自然形态，构成美丽的图案。下列剪纸中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心，进行逐一判断即可。

【详解】解：A、不是轴对称图形，是中心对称图形，故 A 选项不合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 B 选项不合题意。

C、既是轴对称图形又是中心对称图形，故 C 选项符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故 D 选项不合题意.

故选：C.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形，解题的关键在于能够熟练掌握轴对称图形和中心对称图形的定义.

5. 在平面直角坐标系中，点 $P(2, -3)$ 关于 x 轴对称的点 P' 的坐标是 ()

- A. $(-2, -3)$ B. $(-2, 3)$ C. $(2, -3)$ D. $(2, 3)$

【答案】D

【解析】

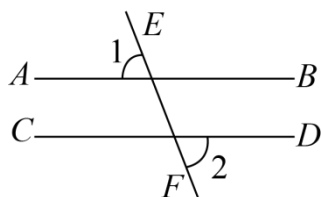
【分析】根据关于 x 轴对称的两个点，横坐标相等，纵坐标互为相反数，即可求解.

【详解】解：点 $P(2, -3)$ 关于 x 轴对称的点 P' 的坐标是 $(2, 3)$,

故选：D.

【点睛】本题考查了关于 x 轴对称的两个点的坐标特征，熟练掌握关于 x 轴对称的两个点，横坐标相等，纵坐标互为相反数是解题的关键.

6. 如图，平移直线 AB 至 CD ，直线 AB ， CD 被直线 EF 所截， $\angle 1 = 60^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



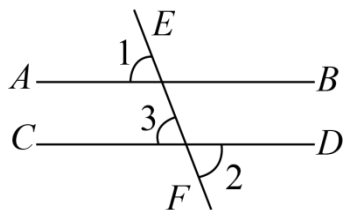
- A. 30° B. 60° C. 100° D. 120°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平移可得 $AB \parallel CD$ ，根据平行线的性质以及对顶角相等，即可求解.

【详解】解：如图所示，



$\because$ 平移直线 AB 至 CD

$\therefore AB \parallel CD$ ， $\angle 1 = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$ ，

又 $\because \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 2 = \angle 1 = 60^\circ$,

故选：B.

【点睛】本题考查了平移的性质，平行线的性质，对顶角相等，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

7. 某县“三独”比赛独唱项目中，5名同学的得分分别是：9.6，9.2，9.6，9.7，9.4.关于这组数据，下列说法正确的是（ ）

- A. 众数是9.6 B. 中位数是9.5 C. 平均数是9.4 D. 方差是0.3

【答案】A

【解析】

【分析】先把5个数据按从小到大的顺序排列，而后用中位数，众数，平均数和方差的定义及计算方法逐一判断.

【详解】解：5个数按从小到大的顺序排列9.2，9.4，9.6，9.6，9.7，

A、9.6出现次数最多，众数是9.6，故正确，符合题意；

B、中位数是9.6，故不正确，不符合题意；

C、平均数是 $\frac{1}{5}(9.2+9.4+9.6 \times 2+9.7)=9.5$ ，故不正确，不符合题意；

D、方差是 $\frac{1}{5} \times [(9.2-9.5)^2 + (9.4-9.5)^2 + 2(9.6-9.5)^2 + (9.7-9.5)^2] = 0.032$ ，故不正确，不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查了中位数，众数，平均数和方差，熟练掌握这些定义及计算方法是解决此类问题的关键.

8. 下列说法错误的是（ ）

- A. 成语“水中捞月”表示的事件是不可能事件
B. 一元二次方程 $x^2 + x + 3 = 0$ 有两个相等的实数根
C. 任意多边形的外角和等于 360°
D. 三角形三条中线的交点叫作三角形的重心

【答案】B

【解析】

【分析】根据不可能事件、根的判别式、多边形的外角和以及三角形的重心的定义分别进行判断即可.

【详解】解：A、成语“水中捞月”表示的事件是不可能事件，故此选项不符合题意；

B、 $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0$ ，则一元二次方程 $x^2 + x + 3 = 0$ 没有实数根，故此选项符合题意；

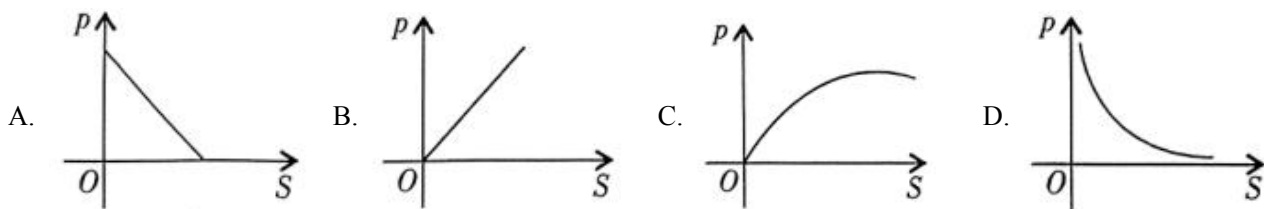
C、任意多边形的外角和等于 360° ，故此选项不符合题意；

D、三角形三条中线的交点叫作三角形的重心，故此选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查不可能事件、根的判别式、多边形的外角和以及三角形的重心的定义，熟练掌握有关知识点是解题的关键.

9. 已知压力 $F(\text{N})$ 、压强 $p(\text{Pa})$ 与受力面积 $S(\text{m}^2)$ 之间有如下关系式： $F = pS$. 当 F 为定值时，下图中大致表示压强 p 与受力面积 S 之间函数关系的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数的定义，即可得到答案.

【详解】解：根据题意得： $P = \frac{F}{S}$,

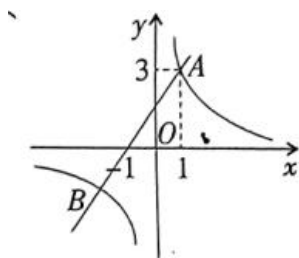
$\therefore$ 当物体的压力 F 为定值时，该物体的压强 P 与受力面积 S 的函数关系式是： $P = \frac{F}{S}$,

则函数图象是双曲线，同时自变量是正数.

故选：D.

【点睛】本题主要考查反比例函数，掌握 $P = \frac{F}{S}$ 以及反比例函数的定义，是解题的关键.

10. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象与过点 $(-1, 0)$ 的直线 AB 相交于 A 、 B 两点. 已知点 A 的坐标为 $(1, 3)$ ，点 C 为 x 轴上任意一点. 如果 $S_{\triangle ABC} = 9$ ，那么点 C 的坐标为 ()



A. $(-3, 0)$

B. $(5, 0)$

C. $(-3, 0)$ 或 $(5, 0)$

D. $(3, 0)$ 或 $(-5, 0)$

【答案】D

【解析】

【分析】反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象过点 $(1, 3)$ ，可得 $y = \frac{3}{x}$ ，进而求得直线 AB 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ ，

得出 B 点的坐标，设 $C(c, 0)$ ，根据 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |c+1| \times \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 9$ ，解方程即可求解。

【详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象过点 $(1, 3)$

$$\therefore k = 1 \times 3 = 3$$

$$\therefore y = \frac{3}{x}$$

设直线 AB 的解析式为 $y = mx + n$ ，

$$\therefore \begin{cases} 3 = m + n \\ 0 = -m + n \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ n = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = \frac{3}{x} \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -2 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore B\left(-2, -\frac{3}{2}\right),$$

设 $C(c, 0)$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times |c+1| \times \left(3 + \frac{3}{2}\right) = 9,$$

解得： $c = 3$ 或 $c = -5$ ，

$\therefore C$ 的坐标为 $(3, 0)$ 或 $(-5, 0)$ ，

故选：D.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例数交点问题，待定系数法求解析式，求得点 B 的坐标是解题的关键。

二、填空题（每小题 4 分，共 24 分；请将答案直接填写在答题卡的相应位置上）

11. 要使代数式 $\sqrt{x-9}$ 有意义，则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq 9$

【解析】

【分析】 根据二次根式有意义的条件得出 $x-9 \geq 0$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 代数式 $\sqrt{x-9}$ 有意义，

$$\therefore x-9 \geq 0,$$

解得： $x \geq 9$,

故答案为： $x \geq 9$.

【点睛】 本题考查了二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

12. 分解因式： $2a^2 - 4a + 2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $2(a-1)^2$

【解析】

【详解】 解： 先提取公因式 2 后继续应用完全平方公式分解即可：

$$\text{原式} = 2(a^2 - 2a + 1) = 2(a-1)^2,$$

故答案为： $2(a-1)^2$.

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx - 2 = 0$ 的一个根为 -1 ，则 m 的值为_____，另一个根为_____.

【答案】 ①. -1 ②. 2

【解析】

【分析】 将 $x=-1$ 代入原方程，解得 m ，根据一元二次方程根与系数的关系，得出 $x_1 \times x_2 = -2$ ，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + mx - 2 = 0$ 的一个根为 -1 ，

$$\therefore 1 - m - 2 = 0$$

解得： $m = -1$,

设原方程的另一个根为 x_2 ，则 $x_1 \cdot x_2 = -2$ ，

$$\therefore x_1 = -1$$

$$\therefore x_2 = 2$$

故答案为：-1,2.

【点睛】本题考查了一元二次方程根的定义，一元二次方程根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

14. 定义新运算： $(a,b) \cdot (c,d) = ac + bd$ ，其中 a, b, c, d 为实数. 例如： $(1,2) \cdot (3,4) = 1 \times 3 + 2 \times 4 = 11$. 如

果 $(2x,3) \cdot (3,-1) = 3$ ，那么 $x =$ _____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据新定义列出一元一次方程，解方程即可求解.

【详解】解： $\because (2x,3) \cdot (3,-1) = 3$

$$\therefore 2x \times 3 + 3 \times (-1) = 3$$

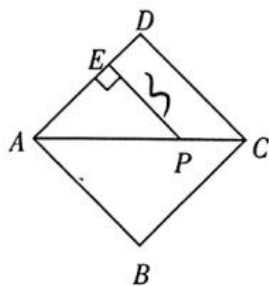
$$\text{即 } 6x = 6$$

$$\text{解得： } x = 1$$

故答案为：1.

【点睛】本题考查了新定义运算，解一元一次方程，根据题意列出方程解题的关键.

15. 如图，点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的一点， $PE \perp AD$ 于点 E ， $PE = 3$. 则点 P 到直线 AB 的距离为_____.

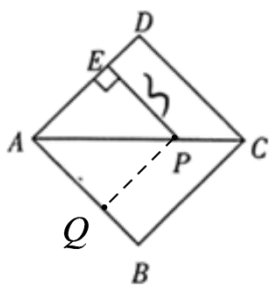


【答案】3

【解析】

【分析】过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于 Q ，证明四边形 $AEPQ$ 是正方形，即可求解.

【详解】解：如图所示，过点 P 作 $PQ \perp AB$ 于 Q ，



$\because$ 点 P 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上的一点, $PE \perp AD$ 于点 E

$\therefore$ 四边形 $AEPQ$ 是矩形, $\angle EAP = 45^\circ$

$\therefore \triangle AEP$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AE = EP$

$\therefore$ 四边形 $AEPQ$ 是正方形,

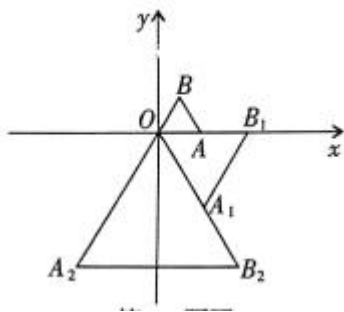
$\therefore PQ = EP = 3$,

即点 P 到直线 AB 的距离为 3

故答案为: 3.

【点睛】本题考查了正方形的性质与判定, 点到直线的距离, 熟练掌握正方形的性质与判定是解题的关键.

16. 在平面直角坐标系中, $\triangle AOB$ 为等边三角形, 点 A 的坐标为 $(1, 0)$. 把 $\triangle AOB$ 按如图所示的方式放置, 并将 $\triangle AOB$ 进行变换: 第一次变换将 $\triangle AOB$ 绕着原点 O 顺时针旋转 60° , 同时边长扩大为 $\triangle AOB$ 边长的 2 倍, 得到 $\triangle A_1OB_1$; 第二次旋转将 $\triangle A_1OB_1$ 绕着原点 O 顺时针旋转 60° , 同时边长扩大为 $\triangle A_1OB_1$ 边长的 2 倍, 得到 $\triangle A_2OB_2$, $\dots$. 依次类推, 得到 $\triangle A_{2023}OB_{2023}$, 则 $\triangle A_{2023}OB_{2023}$ 的边长为_____, 点 A_{2023} 的坐标为_____.



【答案】 ①. 2^{2023} ②. $(2^{2022}, -\sqrt{3} \times 2^{2022})$

【解析】

【分析】根据旋转角度为 60° , 可知每旋转 6 次后点 A 又回到 x 轴的正半轴上, 故点 A_{2023} 在第四象限, 且

$OA_{2023} = 2^{2023}$ ，即可求解.

【详解】解：∵ $\triangle AOB$ 为等边三角形，点 A 的坐标为 $(1, 0)$ ，

∴ $OA = 1$ ，

∴ 每次旋转角度为 60° ，

∴ 6 次旋转 360° ，

第一次旋转后， A_1 在第四象限， $OA_1 = 2$ ，

第二次旋转后， A_2 在第三象限， $OA_2 = 2^2$ ，

第三次旋转后， A_3 在 x 轴负半轴， $OA_3 = 2^3$ ，

第四次旋转后， A_4 在第二象限， $OA_4 = 2^4$ ，

第五次旋转后， A_5 在第一象限， $OA_5 = 2^5$ ，

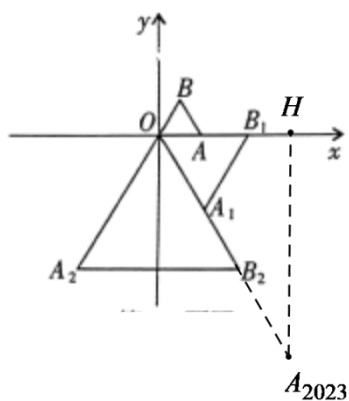
第六次旋转后， A_6 在 x 轴正半轴， $OA_6 = 2^6$ ，

.....

如此循环，每旋转 6 次，点 A 的对应点又回到 x 轴正半轴，

∴ $2023 \div 6 = 337 \cdots 1$ ，

点 A_{2023} 在第四象限，且 $OA_{2023} = 2^{2023}$ ，



如图，过点 A_{2023} 作 $A_{2023}H \perp x$ 轴于 H ，

在 $Rt\triangle OHA_{2023}$ 中， $\angle HOA_{2023} = 60^\circ$ ，

$$\therefore OH = OA_{2023} \cdot \cos \angle HOA_{2023} = 2^{2023} \times \cos 60^\circ = 2^{2023} \times \frac{1}{2} = 2^{2022},$$

$$A_{2023}H = OA_{2023} \cdot \sin \angle HOA_{2023} = 2^{2023} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times 2^{2022},$$

∴ 点 A_{2023} 的坐标为 $(2^{2022}, -\sqrt{3} \times 2^{2022})$.

故答案为: $2^{2023}, (2^{2022}, -\sqrt{3} \times 2^{2022})$.

【点睛】 本题考查图形的旋转, 解直角三角形的应用. 熟练掌握图形旋转的性质, 根据旋转角度找到点的坐标规律是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 86 分)

17. 计算: $1-21+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\sqrt{9}+(\sin 45^{\circ}-1)^0-(-1)$

【答案】 -18

【解析】

【分析】 先计算负整数指数幂、算术平方根、零指数幂、减法运算, 再进行加减混合运算即可.

【详解】 解: $1-21+\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}-\sqrt{9}+(\sin 45^{\circ}-1)^0-(-1)$

$$=1-21+3-3+1+1$$

$$=-18$$

【点睛】 此题考查了实数混合运算, 熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

18. 先化简 $\left(1+\frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a^2-4}{a-1}$, 再从 -1, 0, 1, 2 中选择一个适当的数作为 a 的值代入求值.

【答案】 $\frac{1}{a-2}$, 当 $a=-1$ 时, 原式为 $-\frac{1}{3}$; 当 $a=0$ 时, 原式为 $-\frac{1}{2}$.

【解析】

【分析】 本题先对要求的式子进行化简, 再选取一个适当的数代入即可求出结果.

【详解】 解: $\left(1+\frac{3}{a-1}\right) \div \frac{a^2-4}{a-1}$

$$=\left(\frac{a-1}{a-1}+\frac{3}{a-1}\right) \div \frac{(a+2)(a-2)}{a-1}$$

$$=\frac{a+2}{a-1} \cdot \frac{a-1}{(a+2)(a-2)}$$

$$=\frac{1}{a-2},$$

当 a 取 -2, 1, 2 时分式没有意义,

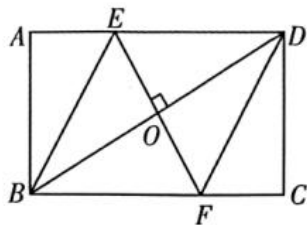
所以 $a=-1$ 或 0,

当 $a = -1$ 时, 原式 $= \frac{1}{-1-2} = -\frac{1}{3}$;

当 $a = 0$ 时, 原式 $= \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$.

【点睛】本题考查分式的化简求值, 解题时要注意先对括号里边进行通分, 再约分化简.

19. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 过对角线 BD 的中点 O 作 BD 的垂线 EF , 分别交 AD , BC 于点 E , F .



(1) 证明: $\triangle BOF \cong \triangle DOE$;

(2) 连接 BE 、 DF , 证明: 四边形 $EBFD$ 是菱形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

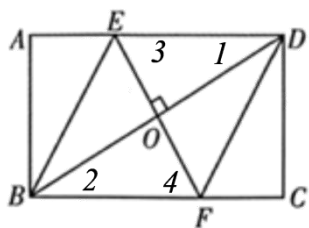
【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质得出 $AD \parallel BC$, 则 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$, 根据 O 是 BD 的中点, 可得 $BO = DO$, 即可证明 $\triangle BOF \cong \triangle DOE$ (AAS);

(2) 根据 $\triangle BOF \cong \triangle DOE$ 可得 $ED = BF$, 进而可得四边形 $EBFD$ 是平行四边形, 根据对角线互相垂直的四边形是菱形, 即可得证.

【小问 1 详解】

证明: 如图所示,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD \parallel BC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$,

$\because O$ 是 BD 的中点,

$\therefore BO = DO$,

在 $\triangle BOF$ 与 $\triangle DOE$ 中

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \\ BO = DO \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOF \cong \triangle DOE (\text{AAS});$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle BOF \cong \triangle DOE$$

$$\therefore ED = BF,$$

$$\text{又} \because ED \parallel BF$$

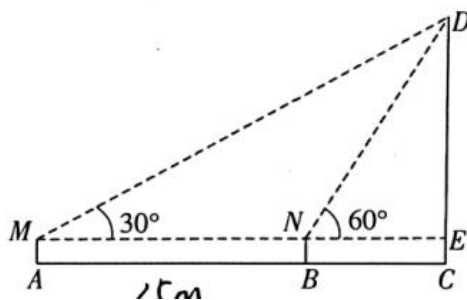
$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是平行四边形,

$$\therefore EF \perp BD$$

$\therefore$ 四边形 $EBFD$ 是菱形.

【点睛】 本题考查了矩形的性质，全等三角形的性质与判定，菱形的判定，熟练掌握特殊四边形的性质与判定是解题的关键.

20. 为弘扬革命传统精神，清明期间，某校组织学生前往怀化市烈士陵园缅怀革命先烈. 大家被革命烈士纪念碑的雄伟壮观震撼，想知道纪念碑的通高 CD （碑顶到水平地面的距离），于是师生组成综合实践小组进行测量. 他们在地面的 A 点用测角仪测得碑顶 D 的仰角为 30° ，在 B 点处测得碑顶 D 的仰角为 60° ，已知 $AB = 35\text{m}$ ，测角仪的高度是 1.5m （ A 、 B 、 C 在同一直线上），根据以上数据求烈士纪念碑的通高 CD .（ $\sqrt{3} \approx 1.732$ ，结果保留一位小数）



【答案】 烈士纪念碑的通高 CD 约为 31.8 米

【解析】

【分析】 根据题意，四边形 $AMNB$, $NBCE$, $AMEC$ 是矩形， $CE = 1.5$ 米， $MN = AB = 35$ 米，根据三角形的外角的性质得出， $\angle NMD = \angle MDN = 30^\circ$ ，等角对等边得出 $ND = NM = 35$ ，进而解 $\text{Rt}\triangle DEN$ ，求得 DE ，最后根据 $CD = DE + CE$ ，即可求解.

【详解】 解：依题意，四边形 $AMNB$, $NBCE$, $AMEC$ 是矩形， $CE = 1.5$ 米， $MN = AB = 35$ 米，

$$\therefore \angle DMN = 30^\circ, \angle DNE = 60^\circ$$

$$\therefore \angle MDN = \angle DNE - \angle DMN = 30^\circ$$

$$\therefore \angle NMD = \angle MDN = 30^\circ,$$

$$\therefore ND = NM = 35 \text{ 米},$$

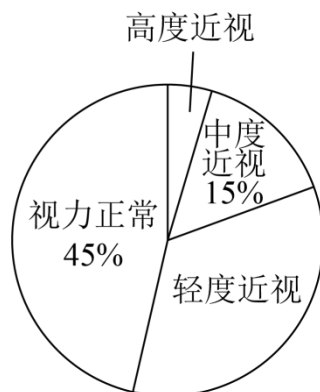
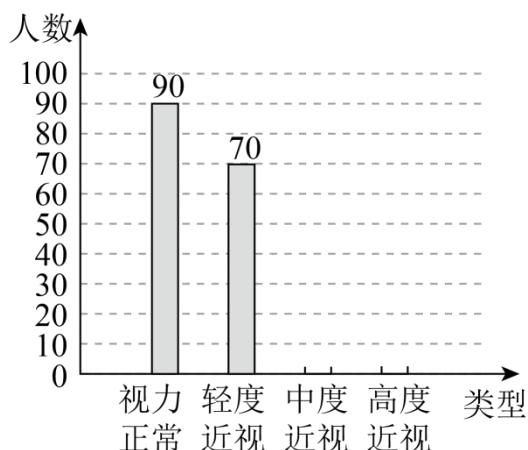
$$\text{在 Rt}\triangle DEN \text{ 中, } \sin \angle DNE = \frac{DE}{DN}$$

$$\therefore DE = DN \cdot \sin 60^\circ = 35 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 30.3 \text{ 米}$$

$$\therefore CD = CE + DE = 1.5 + 30.3 = 31.8 \text{ 米}$$

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握三角函数关系是解题的关键.

21. 近年，“青少年视力健康”受到社会的广泛关注. 某校综合实践小组为了解该校学生的视力健康状况，从全校学生中随机抽取部分学生进行视力调查. 根据调查结果和视力有关标准，绘制了两幅不完整的统计图. 请根据图中信息解答下列问题：



- (1) 所抽取的学生人数为_____；
- (2) 补全条形统计图，并求出扇形统计图中“轻度近视”对应的扇形的圆心角的度数；
- (3) 该校共有学生 3000 人，请估计该校学生中近视程度为“轻度近视”的人数.

【答案】(1) 200 人

(2) 统计图见解析， 126°

(3) 1050 人

【解析】

【分析】(1) 用“视力正常”的人数除以其人数占比即可求出抽取的学生人数；

(2) 先求出“中度近视”的人数，进而求出“轻度近视”的人数，由此补全统计图即可；再用 360° 乘以“轻度近视”的人数占比即可求出对应的圆心角度数；

(3) 用 3000 乘以样本中“轻度近视”的人数占比即可得到答案.

【小问 1 详解】

解： $90 \div 45\% = 200$ 人，

$\therefore$ 所抽取的学生人数为 200 人，

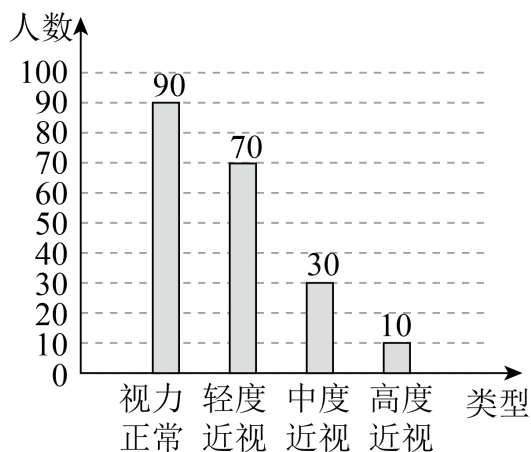
故答案为： 200；

【小问 2 详解】

解： 中度近视的人数为 $200 \times 15\% = 30$ 人，“轻度近视”对应的扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{70}{200} = 126^\circ$

$\therefore$ 高度近视的人数为 $200 - 90 - 70 - 30 = 10$ 人，

补全统计图如下：



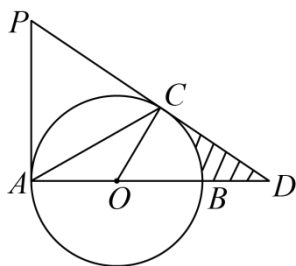
【小问 3 详解】

解： $3000 \times \frac{70}{200} = 1050$ 人，

$\therefore$ 估计该校学生中近视程度为“轻度近视”的人数为 1050 人。

【点睛】 本题主要考查了条形统计图与扇形统计图信息相关联，用样本估计总体，正确读懂统计图是解题的关键。

22. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 P 是 $\odot O$ 外一点， PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ，点 C 为 $\odot O$ 上的一点. 连接 PC 、 AC 、 OC ，且 $PC = PA$ 。



(1) 求证： PC 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 延长 PC 与 AB 的延长线交于点 D ，求证： $PD \cdot OC = PA \cdot OD$ ；

(3) 若 $\angle CAB = 30^\circ$ ， $OD = 8$ ，求阴影部分的面积。

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

$$(3) 8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi$$

【解析】

【分析】(1) 连接 PO ，证明 $\triangle PAO \cong \triangle PCO$ ，即可得证；

(2) 根据 $\sin D = \frac{OC}{OD} = \frac{PA}{PD}$ ，即可得证；

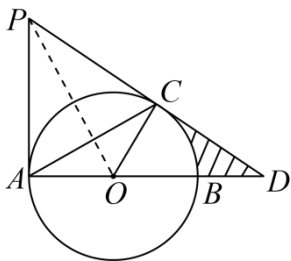
(3) 根据圆周角定理得出 $\angle COD = 2\angle CAB = 60^\circ$ ，进而勾股定理求得 CD ，根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OCD} - S_{\text{扇形}OBC}$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

证明： $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore \angle PAO = 90^\circ$$

如图所示，连接 PO



在 $\triangle PAO$ 与 $\triangle PCO$ 中，

$$\begin{cases} PA = PC \\ OA = OC \\ PO = PO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PCO \text{ (SSS)}$$

$$\therefore \angle PCO = \angle PAO = 90^\circ$$

$\because C$ 为 $\odot O$ 上的一点.

$\therefore PC$ 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

$\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线；

$$\therefore OC \perp PD,$$

$$\therefore \sin D = \frac{OC}{OD} = \frac{PA}{PD}$$

$$\therefore PD \cdot OC = PA \cdot OD$$

【小问 3 详解】

解：∵ $\widehat{BC} = \widehat{BC}$ ， $\angle CAB = 30^\circ$ ， $OD = 8$

$$\therefore \angle COD = 2\angle CAB = 60^\circ,$$

$$\therefore OC \perp PD$$

$$\therefore \angle D = 30^\circ, \quad OC = \frac{1}{2}OD = 4$$

$$\therefore CD = 4\sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\text{阴影}} &= S_{\triangle OCD} - S_{\text{扇形}OBC} = \frac{1}{2} \times CO \times CD - \frac{60}{360} \pi \times CO^2 \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - \frac{1}{6} \times 4^2 \pi \\ &= 8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

【点睛】本题考查了切线的性质与判定，圆周角定理，求含 30° 度角的直角三角形的性质，勾股定理，求扇形面积，熟练掌握以上知识是解题的关键。

23. 某中学组织学生研学，原计划租用可坐乘客 45 人的 A 种客车若干辆，则有 30 人没有座位；若租用可坐乘客 60 人的 B 种客车，则可少租 6 辆，且恰好坐满。

(1) 求原计划租用 A 种客车多少辆？这次研学去了多少人？

(2) 若该校计划租用 A、B 两种客车共 25 辆，要求 B 种客车不超过 7 辆，且每人都有座位，则有哪几种租车方案？

(3) 在 (2) 的条件下，若 A 种客车租金为每辆 220 元，B 种客车租金每辆 300 元，应该怎样租车才最合算？

【答案】(1) 原计划租用 A 种客车 26 辆，这次研学去了 1200 人

(2) 共有 3 种租车方案，方案一：租用 A 种客车 18 辆，则租用 B 种客车 7 辆；方案二：租用 A 种客车 19 辆，则租用 B 种客车 6 辆；方案三：租用 A 种客车 20 辆，则租用 B 种客车 5 辆，

(3) 租用 A 种客车 20 辆，则租用 B 种客车 5 辆才最合算

【解析】

【分析】(1) 设原计划租用 A 种客车 x 辆，根据题意列出一元一次方程，解方程即可求解；

(2) 设租用 A 种客车 a 辆，则租用 B 种客车 $(25-a)$ 辆，根据题意列出一元一次不等式组，解不等式组即可求解；

(3) 分别求得三种方案的费用，进而即可求解。

【小问 1 详解】

解：设原计划租用 A 种客车 x 辆，根据题意得，

$$45x + 30 = 60(x - 6),$$

解得： $x = 26$

所以 $60(26 - 6) = 1200$ (人)

答：原计划租用 A 种客车 26 辆，这次研学去了 1200 人；

【小问 2 详解】

解：设租用 A 种客车 a 辆，则租用 B 种客车 $(25 - a)$ 辆，根据题意，得

$$\begin{cases} 25 - a \leq 7 \\ 45a + 60(25 - a) \geq 1200 \end{cases}$$

解得： $18 \leq a \leq 20$,

$\therefore a$ 为正整数，则 $a = 18, 19, 20$,

$\therefore$ 共有 3 种租车方案，

方案一：租用 A 种客车 18 辆，则租用 B 种客车 7 辆，

方案二：租用 A 种客车 19 辆，则租用 B 种客车 6 辆，

方案三：租用 A 种客车 20 辆，则租用 B 种客车 5 辆，

【小问 3 详解】

$\therefore$ A 种客车租金为每辆 220 元，B 种客车租金每辆 300 元，

$\therefore$ B 种客车越少，费用越低，

方案一：租用 A 种客车 18 辆，则租用 B 种客车 7 辆，费用为 $18 \times 220 + 7 \times 300 = 6060$ 元，

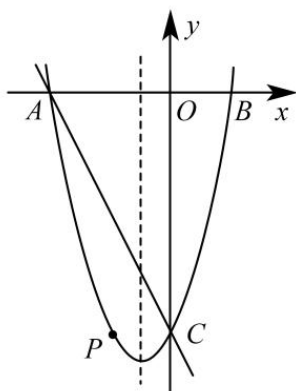
方案二：租用 A 种客车 19 辆，则租用 B 种客车 6 辆，费用为 $19 \times 220 + 6 \times 300 = 5980$ 元，

方案三：租用 A 种客车 20 辆，则租用 B 种客车 5 辆，费用为 $20 \times 220 + 5 \times 300 = 5900$ 元，

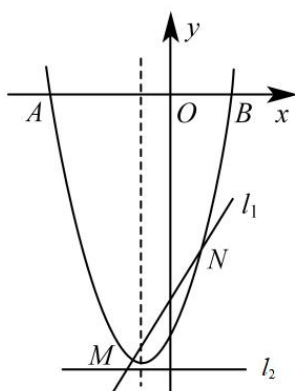
$\therefore$ 租用 A 种客车 20 辆，则租用 B 种客车 5 辆才最合算。

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，一元一次不等式组的应用，根据题意列出一元一次方程与不等式组是解题的关键。

24. 如图一所示，在平面直角坐标系中，抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 与 x 轴交于 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 C 。



图一



备用图

- (1) 求抛物线的函数表达式及顶点坐标；
- (2) 点 P 为第三象限内抛物线上一点，作直线 AC ，连接 PA 、 PC ，求 $\triangle PAC$ 面积的最大值及此时点 P 的坐标；
- (3) 设直线 $l_1: y = kx + k - \frac{35}{4}$ 交抛物线于点 M 、 N ，求证：无论 k 为何值，平行于 x 轴的直线 $l_2: y = -\frac{37}{4}$ 上总存在一点 E ，使得 $\angle MEN$ 为直角。

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 8$

(2) $\triangle PAC$ 面积的最大值为 8，此时点 P 的坐标为 $P(-2, -8)$

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) 如图所示，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D ，交 AC 于点 E ，得出直线 AC 的解析式为 $y = -2x - 8$ ，设 $P(m, m^2 + 2m - 8)$ ，则 $E(m, -2m - 8)$ ，得出 $PE = -(m + 2)^2 + 4$ ，当 PE 取得最大值时， $\triangle PAC$ 面积取得最大值，进而根据二次函数的性质即可求解；

(3) 设 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$ ， MN 的中点坐标为 $Q\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ，联立 $\begin{cases} y = kx + k - \frac{35}{4} \\ y = x^2 + 2x - 8 \end{cases}$ ，消去

y ，整理得： $x^2 + (2 - k)x + k - \frac{3}{4} = 0$ ，得出 $x_1 + x_2 = k - 2$ ， $x_1 x_2 = -k + \frac{3}{4}$ ，则 $Q\left(\frac{1}{2}k - 1, \frac{1}{2}k^2 - \frac{35}{4}\right)$ ，

设 Q 点到 l_2 的距离为 QE ，则 $QE = \frac{1}{2}k^2 - \frac{35}{4} - \left(-\frac{37}{4}\right) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}$ ，依题意， $y_1 + y_2 = k^2 - \frac{35}{2}$ ，

$y_1 - y_2 = x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = k(x_1 - x_2)$ ，得出

$MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (k^2 + 1)^2$, 则 $MN = k^2 + 1$, $\frac{1}{2}MN = QE$, E 点总在 $\odot Q$ 上, MN 为直径, 且 $\odot Q$ 与 $l_2: y = -\frac{37}{4}$ 相切, 即可得证.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 8$, 得

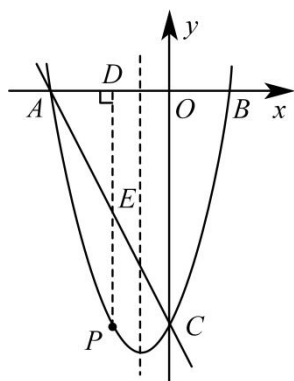
$$\begin{cases} 16a - 4b - 8 = 0 \\ 4a + 2b - 8 = 0 \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases},$

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y = x^2 + 2x - 8$;

【小问 2 详解】

解: 如图所示, 过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D , 交 AC 于点 E ,



图一

由 $y = x^2 + 2x - 8$, 令 $x = 0$,

解得: $y = -8$,

$\therefore C(0, -8)$,

设直线 AC 的解析式为 $y = kx - 8$, 将点 $A(-4, 0)$ 代入得, $-4k - 8 = 0$,

解得: $k = -2$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = -2x - 8$,

设 $P(m, m^2 + 2m - 8)$, 则 $E(m, -2m - 8)$,

$\therefore PE = -2m - 8 - (m^2 + 2m - 8)$

$= -m^2 - 4m$

$$= -(m+2)^2 + 4,$$

当 $m = -2$ 时, PE 的最大值为 4

$$\therefore S_{\triangle PAC} = \frac{1}{2} PE \times OA = \frac{1}{2} \times 4 \times PE = 2PE$$

$\therefore$ 当 PE 取得最大值时, $\triangle PAC$ 面积取得最大值

$\therefore \triangle PAC$ 面积的最大值为 $2 \times 4 = 8$,

$$\text{此时 } m = -2, \quad m^2 + 2m - 8 = 4 - 4 - 8 = -8$$

$$\therefore P(-2, -8)$$

【小问 3 详解】

解: 设 $M(x_1, y_1)$ 、 $N(x_2, y_2)$, MN 的中点坐标为 $Q\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + k - \frac{35}{4} \\ y = x^2 + 2x - 8 \end{cases}, \text{ 消去 } y, \text{ 整理得: } x^2 + (2-k)x + k - \frac{3}{4} = 0,$$

$$\therefore x_1 + x_2 = k - 2, x_1 x_2 = -k + \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k}{2} - 1,$$

$$\therefore \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1}{2}k(x_1 + x_2) + k - \frac{35}{4} = \frac{1}{2}k(k-2) + k - \frac{35}{4} = \frac{1}{2}k^2 - \frac{35}{4},$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{2}k - 1, \frac{1}{2}k^2 - \frac{35}{4}\right),$$

$$\text{设 } Q \text{ 点到 } l_2 \text{ 的距离为 } QE, \text{ 则 } QE = \frac{1}{2}k^2 - \frac{35}{4} - \left(-\frac{37}{4}\right) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2},$$

$$\therefore M(x_1, y_1), N(x_2, y_2),$$

$$\therefore y_1 + y_2 = k^2 - \frac{35}{2}, \quad y_1 - y_2 = x_1^2 - x_2^2 + 2(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) = k(x_1 - x_2)$$

$$\therefore MN^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2 + k^2(x_1 - x_2)^2$$

$$= (x_1 - x_2)^2(1 + k^2)$$

$$= \left[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2\right](1 + k^2)$$

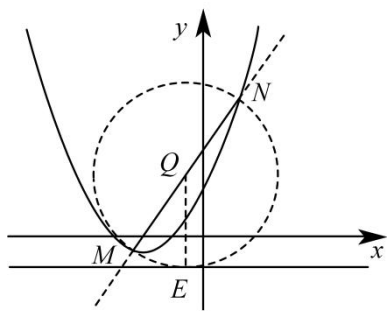
$$= \left[(k-2)^2 + 4k - 3 \right] (k^2 + 1)$$

$$= (k^2 + 1)(k^2 + 1)$$

$$= (k^2 + 1)^2$$

$$\therefore MN = k^2 + 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2}MN = QE$$



$$\therefore QM = QN = QE,$$

$\therefore E$ 点总在 $\odot Q$ 上, MN 为直径, 且 $\odot Q$ 与 $l_2: y = -\frac{37}{4}$ 相切,

$\therefore \angle MEN$ 为直角.

$\therefore$ 无论 k 为何值, 平行于 x 轴的直线 $l_2: y = -\frac{37}{4}$ 上总存在一点 E , 使得 $\angle MEN$ 为直角.

【点睛】 本题考查了二次函数的应用, 一元二次方程根与系数的关系, 切线的性质与判定, 直角所对的弦是直径, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

