

张家界市 2023 年初中学业水平考试试卷

数 学

考生注意：

本学科试卷共三道大题，23 道小题，满分 100 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. $\frac{1}{2023}$ 的相反数是（ ）

A. $\frac{1}{2023}$

B. $-\frac{1}{2023}$

C. 2023

D. -2023

【答案】B

【解析】

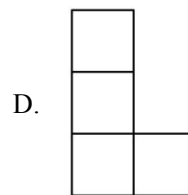
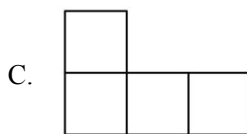
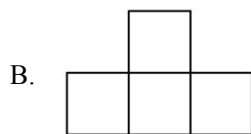
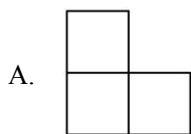
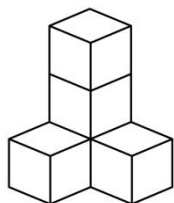
【分析】根据相反数的定义求解即可，只有符号不同的两个数互为相反数。

【详解】解： $\frac{1}{2023}$ 的相反数是 $-\frac{1}{2023}$ 。

故选：B。

【点睛】本题考查了相反数的定义，掌握相反数的定义是解题的关键。

2. 如图是由 5 个完全相同的小正方体组成的立体图形，其主视图是（ ）

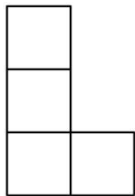


【答案】D

【解析】

【分析】根据从正面看得到的图形是主视图，可得答案。

【详解】解：其主视图有 2 列，从左到右依次有 3、1 个正方形，图形如下：



故选 D.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，掌握从正面看到的图形是主视图是解题关键.

3. 下列运算正确的是 ()

- A. $(x+2)^2 = x^2 + 4$ B. $a^2 \cdot a^4 = a^8$ C. $(2x^3)^2 = 4x^6$ D. $2x^2 + 3x^2 = 5x^4$

【答案】C

【解析】

【分析】根据完全平方公式及合并同类项、积的乘方运算依次判断即可.

【详解】解：A、 $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ，选项计算错误，不符合题意；

B、 $a^2 \cdot a^4 = a^6$ ，选项计算错误，不符合题意；

C、 $(2x^3)^2 = 4x^6$ ，计算正确，符合题意；

D、 $2x^2 + 3x^2 = 5x^2$ ，选项计算错误，不符合题意；

故选：C.

【点睛】题目主要考查完全平方公式及合并同类项、积的乘方运算，熟练掌握运算是解题关键.

4. 下列说法正确的是 ()

A. 扇形统计图能够清楚地反映事物的变化趋势

B. 对某型号电子产品的使用寿命采用全面调查的方式

C. 有一种游戏的中奖概率是 $\frac{1}{5}$ ，则做 5 次这样的游戏一定会有一次中奖

D. 甲、乙两组数据的平均数相等，它们的方差分别是 $S_{\text{甲}}^2 = 0.2$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 0.03$ ，则乙比甲稳定

【答案】D

【解析】

【分析】根据扇形统计图的特点、全面调查及抽样调查的特点，概率的意义及方差的意义依次判断即可.

【详解】解：A、扇形统计图能够清楚地反映事物所占的比例，选项错误，不符合题意；

B、对某型号电子产品的使用寿命调查有破坏性，适合采用抽样调查，选项错误，不符合题意；

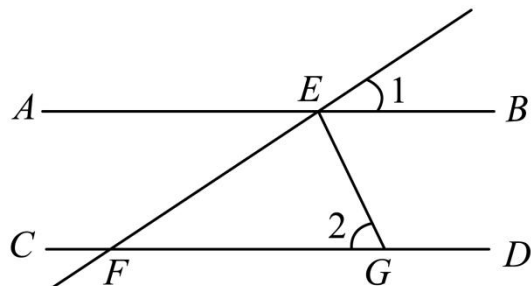
C、有一种游戏的中奖概率是 $\frac{1}{5}$ ，则做 5 次这样的游戏不一定会中奖，选项错误，不符合题意；

D、平均数相等，方差越小，越稳定，选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】题目主要考查扇形统计图的特点、全面调查及抽样调查的特点，概率的意义及方差的意义，熟练掌握运用这些知识点是解题关键.

5. 如图，已知直线 $AB \parallel CD$ ， EG 平分 $\angle BEF$ ， $\angle 1 = 40^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 70° B. 50° C. 40° D. 140°

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle EFG = \angle 1 = 40^\circ$ ， $\angle EFG + \angle BEF = 180^\circ$ ， $\angle EGF = \angle BEG$ ，推得 $\angle BEF = 140^\circ$ ，根据角平分线的性质可求出 $\angle BEG$ 的度数，即可求得 $\angle 2$ 的度数.

【详解】 $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle EFG = \angle 1 = 40^\circ, \quad \angle EFG + \angle BEF = 180^\circ, \quad \angle EGF = \angle BEG,$$

$$\therefore \angle BEF = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ,$$

又 $\because EG$ 平分 $\angle BEF$,

$$\therefore \angle BEG = \frac{1}{2} \angle BEF = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle BEG = 70^\circ$$

故选：A.

【点睛】本题考查平行线的性质和角平分线的性质. 熟练掌握平行线的性质和角平分线的性质是解决本题的关键.

6. 《四元玉鉴》是一部成就辉煌的数学名著，是宋元数学集大成者，也是我国古代水平最高的一部数学著作. 该著作记载了“买椽多少”问题：“六贯二百一十钱，倩人去买几株椽. 每株脚钱三文足，无钱准与一株椽”. 大意是：现请人代买一批椽，这批椽的总售价为 6210 文. 如果每株椽的运费是 3 文，那么少拿一株椽后，剩下的椽的运费恰好等于一株椽的价钱，试问 6210 文能买多少株椽？设 6210 文购买椽的数量为 x 株，则符合题意的方程是 ().

A. $\frac{6210}{x-1} = 3x$

B. $3(x-1) = 6210$

C. $3(x-1) = \frac{6210}{x}$

D. $3(x-1) = \frac{6210}{x-1}$

【答案】C

【解析】

【分析】设 6210 元购买椽的数量为 x 株，根据单价 = 总价 ÷ 数量，求出一株椽的价钱为 $\frac{6210}{x}$ ，再根据少拿一株椽后剩下的椽的运费恰好等于一株椽的价钱，即可列出分式方程，得到答案.

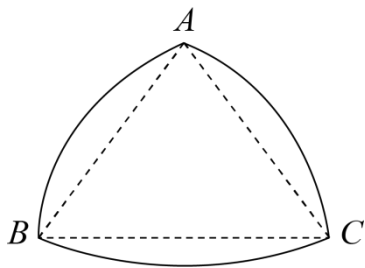
【详解】解：设 6210 元购买椽的数量为 x 株，则一株椽的价钱为 $\frac{6210}{x}$ ，

由题意得： $3(x-1) = \frac{6210}{x}$ ，

故选 C.

【点睛】本题考查了从实际问题中抽象出分式方程，正确理解题意找出等量关系是解题关键.

7. “莱洛三角形”也称为圆弧三角形，它是工业生产中广泛使用的一种图形. 如图，分别以等边 $\triangle ABC$ 的三个顶点为圆心，以边长为半径画弧，三段圆弧围成的封闭图形是“莱洛三角形”. 若等边 $\triangle ABC$ 的边长为 3，则该“莱洛三角形”的周长等于 ()

A. π B. 3π C. 2π D. $2\pi - \sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据等边三角形的性质及弧长公式 $l = \frac{n\pi r}{180}$ 求解即可.

【详解】解： $\because$ 等边三角形 ABC 的边长为 3， $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^\circ$ ，

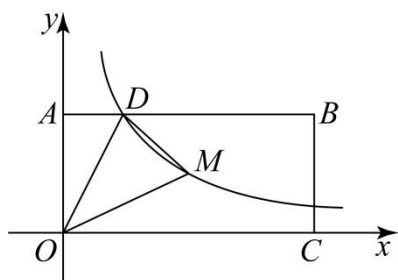
$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{AC} = \frac{60\pi \cdot 3}{180} = \pi,$$

$\therefore$ 该“莱洛三角形”的周长 $= 3 \times \pi = 3\pi$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了等边三角形的性质，弧长公式，熟练掌握等边三角形的性质和弧长公式是解题的关键.

8. 如图，矩形 $OABC$ 的顶点 A, C 分别在 y 轴、 x 轴的正半轴上，点 D 在 AB 上，且 $AD = \frac{1}{4}AB$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象经过点 D 及矩形 $OABC$ 的对称中心 M ，连接 OD, OM, DM 。若 $\triangle ODM$ 的面积为 3，则 k 的值为 ()



- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】设 B 点的坐标为 (a, b) ，根据矩形对称中心的性质得出延长 OM 恰好经过点 B ， $M(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ，确定 $D(\frac{1}{4}a, b)$ ，然后结合图形及反比例函数的意义，得出 $S_{\triangle ODM} = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BDM} = 3$ ，代入求解即可。

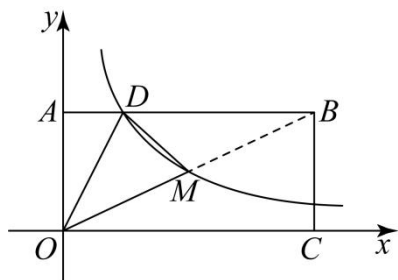
【详解】解：∵ 四边形 $OCBA$ 是矩形，

∴ $AB = OC$ ， $OA = BC$ ，

设 B 点的坐标为 (a, b) ，

∵ 矩形 $OABC$ 的对称中心 M ，

∴ 延长 OM 恰好经过点 B ， $M(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$ ，



∵ 点 D 在 AB 上，且 $AD = \frac{1}{4}AB$ ，

∴ $D(\frac{1}{4}a, b)$ ，

∴ $BD = \frac{3}{4}a$ ，

∴ $S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}BD \cdot h = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}a \times (b - \frac{b}{2}) = \frac{3}{16}ab$

∵ D 在反比例函数的图象上，

$$\therefore \frac{1}{4}ab = k,$$

$$\therefore S_{\triangle ODM} = S_{\triangle AOB} - S_{\triangle AOD} - S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}k - \frac{3ab}{16} = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}ab - \frac{3ab}{16} = 3,$$

$$\text{解得: } ab = 16,$$

$$\therefore k = \frac{1}{4}ab = 4,$$

故选 C.

【点睛】本题考查了矩形的性质，反比例函数图象上点的坐标特征，三角形的面积等知识，熟练掌握和灵活运用相关知识是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

9. “仙境张家界，峰迷全世界”，据统计，2023 年“五一”节假日期间，张家界市各大景区共接待游客约 864000 人次. 将数据 864000 用科学计数法表示为_____.

【答案】 8.64×10^5

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解： $864000 = 8.64 \times 10^5$,

故答案为： 8.64×10^5 .

【点睛】此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

10. 因式分解： $x^2y + 2xy + y =$ _____.

【答案】 $y(x+1)^2$

【解析】

【分析】先提取公因式，然后利用完全平方公式因式分解即可.

【详解】解： $x^2y + 2xy + y = y(x^2 + 2x + 1) = y(x+1)^2$,

故答案为： $y(x+1)^2$.

【点睛】题目主要考查因式分解的方法，熟练掌握提公因式法及公式法是解题关键.

11. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x - m = 0$ 有两个不相等的实数根，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m > -1$

【解析】

【分析】 根据有两个不相等的实数根得到 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) > 0$ ，解不等式即可.

【详解】 解：根据题意，得 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-m) > 0$,

解得 $m > -1$;

故答案为 $m > -1$.

【点睛】 本题考查一元二次方程的判别式，解决问题的关键是掌握判别式和方程根之间的关系：当 $\Delta > 0$ 时，原方程有两个不相等的实数根，当 $\Delta = 0$ 时，原方程有两个相等的实数根，当 $\Delta < 0$ 时，原方程无实数根.

12. 2023 年 4 月 24 日是我国第八个“中国航天日”，某校开展了一次航天知识竞赛，共选拔 8 名选手参加总决赛，他们的决赛成绩分别是 95, 92, 93, 89, 94, 90, 96, 88. 则这 8 名选手决赛成绩的中位数是_____.

【答案】 92.5

【解析】

【分析】 将成绩按照从小到大顺序排列后,根据中位数的定义即可得到答案.

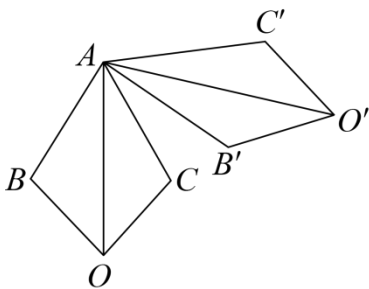
【详解】 解：将决赛成绩从小到大顺序排列为 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 96,

$\therefore$ 中位数为 $\frac{92+93}{2} = 92.5$.

故答案为：92.5.

【点睛】 本题考查了中位数，一组数据按照大小顺序排列后，处在中间位置的数据或中间两个数的平均数叫做这组数据的中位数，熟练掌握中位数的定义是解题的关键.

13. 如图， AO 为 $\angle BAC$ 的平分线，且 $\angle BAC = 50^\circ$ ，将四边形 $ABOC$ 绕点 A 逆时针方向旋转后，得到四边形 $AB'O'C'$ ，且 $\angle OAC' = 100^\circ$ ，则四边形 $ABOC$ 旋转的角度是_____.



【答案】 75°

【解析】

【分析】根据角平分线的性质可得 $\angle BAO = \angle OAC = 25^\circ$ ，根据旋转的性质可得 $\angle BAC = \angle B'AC' = 50^\circ$ ， $\angle B'AO' = \angle O'AC' = 25^\circ$ ，求得 $\angle OAO' = 75^\circ$ ，即可求得旋转的角度。

【详解】 $\because AO$ 为 $\angle BAC$ 的平分线， $\angle BAC = 50^\circ$ ，

$\therefore \angle BAO = \angle OAC = 25^\circ$ ，

$\therefore$ 将四边形 $ABOC$ 绕点 A 逆时针方向旋转后，得到四边形 $AB'OC'$ ，

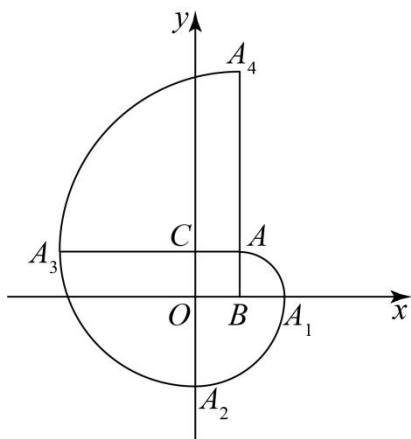
$\therefore \angle BAC = \angle B'AC' = 50^\circ$ ， $\angle B'AO' = \angle O'AC' = 25^\circ$ ，

$\therefore \angle OAO' = \angle OAC' - \angle O'AC' = 100^\circ - 25^\circ = 75^\circ$ ，

故答案为： 75° 。

【点睛】本题考查了角平分线的性质，旋转的性质，熟练掌握以上性质是解题的关键。

14. 如图，在平面直角坐标系中，四边形 $ABOC$ 是正方形，点 A 的坐标为 $(1,1)$ ， $\widehat{AA_1}$ 是以点 B 为圆心， BA 为半径的圆弧； $\widehat{A_1A_2}$ 是以点 O 为圆心， OA_1 为半径的圆弧， $\widehat{A_2A_3}$ 是以点 C 为圆心， CA_2 为半径的圆弧， $\widehat{A_3A_4}$ 是以点 A 为圆心， AA_3 为半径的圆弧，继续以点 B ， O ， C ， A 为圆心按上述作法得到的曲线 $AA_1A_2A_3A_4 \cdots$ 称为正方形的“渐开线”，则点 A_{2023} 的坐标是_____。



【答案】 $(-2023,1)$

【解析】

【分析】将四分之一圆弧对应的 A 点坐标看作顺时针旋转 90° ，再根据 A 、 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 的坐标找到规律即可。

【详解】 $\because A$ 点坐标为 $(1,1)$ ，且 A_1 为 A 点绕 B 点顺时针旋转 90° 所得，

$\therefore A_1$ 点坐标为 $(2,0)$ ，

又 $\because A_2$ 为 A_1 点绕 O 点顺时针旋转 90° 所得，

$\therefore A_2$ 点坐标为 $(0, -2)$,

又 $\because A_3$ 为 A_2 点绕 C 点顺时针旋转 90° 所得,

$\therefore A_3$ 点坐标为 $(-3, 1)$,

又 $\because A_4$ 为 A_3 点绕 A 点顺时针旋转 90° 所得,

$\therefore A_4$ 点坐标为 $(1, 5)$,

由此可得出规律: A_n 为绕 B 、 O 、 C 、 A 四点作为圆心依次循环顺时针旋转 90° , 且半径为 1 、 2 、 3 、 $\dots$ 、 n , 每次增加 1 .

$\because 2023 \div 5 = 505 \dots 3$,

故 A_{2023} 为以点 C 为圆心, 半径为 2022 的 A_{2022} 顺时针旋转 90° 所得

故 A_{2023} 点坐标为 $(-2023, 1)$.

故答案为: $(-2023, 1)$.

【点睛】本题考查了点坐标规律探索, 通过点的变化探索出坐标变化的规律是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 9 个小题, 共计 58 分. 请考生用黑色碳素笔在答题卡相应的题号后的答题区域内作答, 必须写出运算步骤、推理过程或文字说明, 超出答题区域的作答无效)

15. 计算: $|\sqrt{3}| - (4 - \pi)^0 - 2 \sin 60^\circ + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$.

【答案】 4

【解析】

【分析】先化简绝对值, 零次幂及特殊角的三角函数、负整数指数幂, 然后计算加减法即可.

【详解】解: 原式 $= \sqrt{3} - 1 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 5$

$= 4$.

【点睛】题目主要考查绝对值, 零次幂及特殊角的三角函数、负整数指数幂, 熟练掌握各个运算法则是解题关键.

16. 先化简 $\left(x - 1 - \frac{3}{x+1}\right) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$, 然后从 -1 , 1 , 2 这三个数中选一个合适的数代入求值.

【答案】 $x+1$, 2

【解析】

【分析】根据分式的运算法则先化简，然后再由分式有意义的条件代入求值即可.

$$\text{【详解】解：原式} = \left[\frac{(x-1)(x+1)}{x+1} - \frac{3}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$$

$$= \frac{x^2-4}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{x^2-4}$$

$$= x+1,$$

$$\because x \neq -1, x \neq 2,$$

当 $x=1$ 时

$$\text{原式} = 1+1=2.$$

【点睛】题目主要考查分式的化简求值及其有意义的条件，熟练掌握分式的运算法则是解题关键.

17. 为拓展学生视野，某中学组织八年级师生开展研学活动，原计划租用 45 座客车若干辆，但有 15 人没有座位；若租用同样数量的 60 座客车，则多出三辆车，且其余客车恰好坐满. 现有甲、乙两种客车，它们的载客量和租金如下表所示：

	甲型客车	乙型客车
载客量（人/辆）	45	60
租金（元/辆）	200	300

(1) 参加此次研学活动的师生人数是多少？原计划租用多少辆 45 座客车？

(2) 若租用同一种客车，要使每位师生都有座位，应该怎样租用才合算？

【答案】(1) 参加此次研学活动的师生有 600 人，原计划租用 45 座客车 13 辆

(2) 租 14 辆 45 座客车较合算

【解析】

【分析】(1) 设参加此次研学活动的师生有 x 人，原计划租用 45 座客车 y 辆，根据题意列出二元一次方程组求解即可；

(2) 由 (1) 结论求出所需费用比较即可.

【小问 1 详解】

解：设参加此次研学活动的师生有 x 人，原计划租用 45 座客车 y 辆

$$\text{依题意得} \begin{cases} 45y+15=x \\ 60(y-3)=x \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} x = 600 \\ y = 13 \end{cases}$,

答：参加此次研学活动的师生有 600 人，原计划租用 45 座客车 13 辆；

【小问 2 详解】

$\because$ 要使每位师生都有座位，

$\therefore$ 租 45 座客车 14 辆，则租 60 座客车 10 辆，

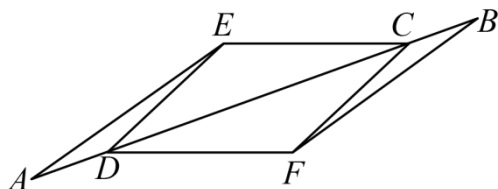
$$14 \times 200 = 2800, \quad 10 \times 300 = 3000,$$

$$\therefore 2800 < 3000$$

$\therefore$ 租 14 辆 45 座客车较合算.

【点睛】题目主要考查二元一次方程组的应用及有理数乘法的应用，理解题意是解题关键.

18. 如图，已知点 A, D, C, B 在同一条直线上，且 $AD = BC$ ， $AE = BF$ ， $CE = DF$.



(1) 求证： $AE \parallel BF$ ；

(2) 若 $DF = FC$ 时，求证：四边形 $DECF$ 是菱形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据题意得出 $AC = BD$ ，再由全等三角形的判定和性质及平行线的判定证明即可；

(2) 方法一：利用全等三角形的判定和性质得出 $DE = CF$ ，又 $EC = DF$ ，再由菱形的判定证明即可；方法二：利用 (1) 中结论得出 $\angle ECA = \angle FDB$ ，结合菱形的判定证明即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because AD = BC$,

$$\therefore AD + DC = BC + DC,$$

即 $AC = BD$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle BFD$ 中，

$$\begin{cases} AC = BD \\ AE = BF \\ CE = DF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BFD (SSS)$$

$$\therefore \angle A = \angle B,$$

$$\therefore AE \parallel BF$$

【小问2详解】

方法一：在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 中，

$$\begin{cases} AE = BF \\ \angle A = \angle B, \\ AD = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF (SAS)$$

$$\therefore DE = CF, \text{ 又 } EC = DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形

$$\therefore DF = FC,$$

$\therefore \square DECF$ 是菱形；

方法二： $\because \triangle AEC \cong \triangle BFD$ ，

$$\therefore \angle ECA = \angle FDB$$

$$\therefore EC \parallel DF,$$

又 $EC = DF$ ，

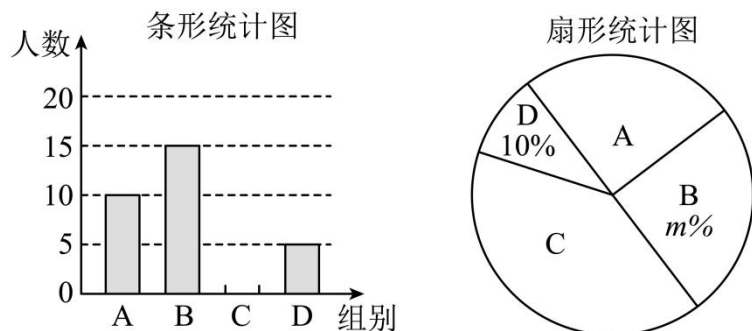
$\therefore$ 四边形 $DECF$ 是平行四边形

$$\therefore DF = FC,$$

$\therefore \square DECF$ 是菱形.

【点睛】题目主要考查全等三角形的判定和性质，菱形的判定和性质，理解题意，熟练掌握运用这些知识点是解题关键.

19. 2022年4月21日新版《义务教育课程方案和课程标准（2022年版）》正式颁布，优化了课程设置，其中将劳动教育从综合实践活动课程中独立出来. 某校为了初步了解学生的劳动教育情况，对九年级学生“参加家务劳动的时间”进行了抽样调查，并将劳动时间 x 分为如下四组（A: $x < 70$ ；B: $70 \leq x < 80$ ；C: $80 \leq x < 90$ ；D: $x \geq 90$ ，单位：分钟）进行统计，绘制了如下不完整的统计图.



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 本次抽取的学生人数为_____人，扇形统计图中 m 的值为_____；
- (2) 补全条形统计图；
- (3) 已知该校九年级有 600 名学生，请估计该校九年级学生中参加家务劳动的时间在 80 分钟（含 80 分钟）以上的学生有多少人？
- (4) 若 D 组中有 3 名女生，其余均是男生，从中随机抽取两名同学交流劳动感受，请用列表法或树状图法，求抽取的两名同学中恰好是一名女生和一名男生的概率。

【答案】(1) 50, 30 (2) 见解析

(3) 300 人

(4) $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】(1) 由 D 组人数及所占百分比得出总人数，然后利用 B 组人数除以总人数即可得出结果；

(2) 用总人数减去各组人数得出 C 组人数，然后补全统计图即可；

(3) 总人数乘以 C 、 D 组所占比例即可；

(4) 方法一、利用列表法求概率；方法二、利用树状图法求概率即可。

【小问 1 详解】

解：根据题意得，本次抽取的人数为： $5 \div 10\% = 50$ 人，

$\therefore B$ 组人数为 15 人，

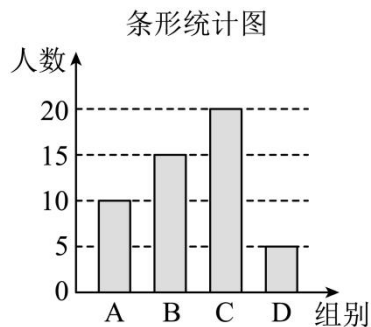
$\therefore 15 \div 50 \times 100\% = 30\%$ ，

故答案为：50；30；

【小问 2 详解】

解： C 组人数为： $50 - 10 - 15 - 5 = 20$ 人，

补全统计图如图所示：



【小问 3 详解】

解： $600 \times \frac{20+5}{50} = 300$ (人)，

答：估计该校九年级学生中参加家务劳动的时间在 80 分钟（含 80 分钟）以上的学生有 300 人；

【小问 4 详解】

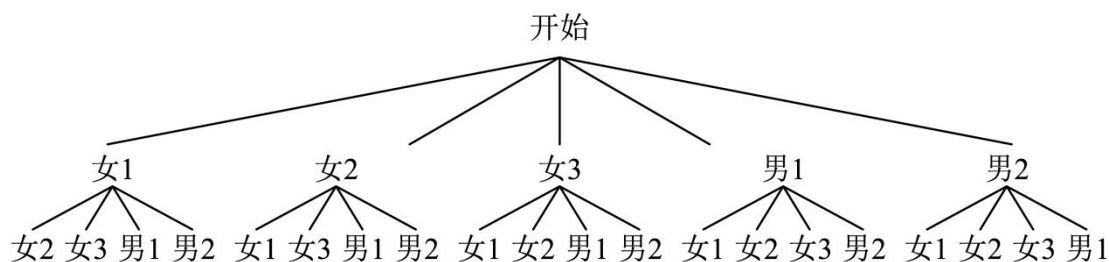
方法一：列表法：

	女 1	女 2	女 3	男 1	男 2
女 1		(女 1, 女 2)	(女 1, 女 3)	(女 1, 男 1)	(女 1, 男 2)
女 2	(女 2, 女 1)		(女 2, 女 3)	(女 2, 男 1)	(女 2, 男 2)
女 3	(女 3, 女 1)	(女 3, 女 2)		(女 3, 男 1)	(女 3, 男 2)
男 1	(男 1, 女 1)	(男 1, 女 2)	(男 1, 女 3)		(男 1, 男 2)
男 2	(男 2, 女 1)	(男 2, 女 2)	(男 2, 女 3)	(男 2, 男 1)	

共有 20 种等可能结果，其中满足条件的有 12 种，

$$\text{故 } P(\text{一男一女}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

方法二：树状图法：如图，

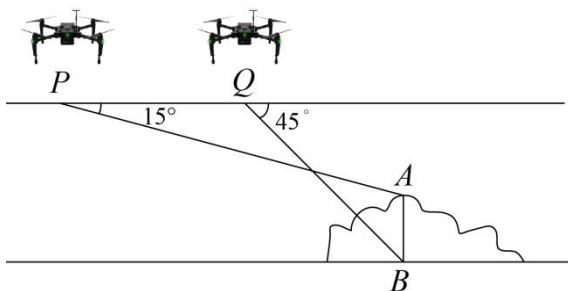


共有 20 种等可能结果，其中满足条件的有 12 种，

$$\text{故 } P(\text{一男一女}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

【点睛】题目主要考查条形统计图与扇形统计图，列表法或树状图法求概率，用样本估计总体等，理解题意，综合运用这些知识点是解题关键.

20. “游张家界山水，逛七十二奇楼”成为今年旅游新特色. 某数学兴趣小组用无人机测量奇楼 AB 的高度，测量方案如图：先将无人机垂直上升至距水平地面 225m 的 P 点，测得奇楼顶端 A 的俯角为 15° ，再将无人机沿水平方向飞行 200m 到达点 Q ，测得奇楼底端 B 的俯角为 45° ，求奇楼 AB 的高度. (结果精确到 1m, 参考数据: $\sin 15^\circ \approx 0.26$, $\cos 15^\circ \approx 0.97$, $\tan 15^\circ \approx 0.27$)

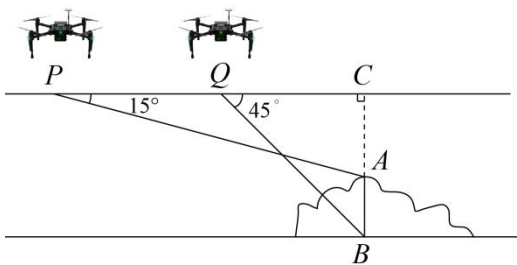


【答案】 110m

【解析】

【分析】 延长 BA ，交 PQ 的延长线于点 C ，根据题意得出 $BC = 225\text{m}$ ， $PQ = 200\text{m}$ ，再由等腰直角三角形得出 $CQ = BC = 225\text{m}$ ，然后解直角三角形即可.

【详解】 解： 延长 BA ，交 PQ 的延长线于点 C ，
则 $\angle ACQ = 90^\circ$



由题意得， $BC = 225\text{m}$ ， $PQ = 200\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCQ$ 中， $\angle BQC = 45^\circ$ ，

则 $CQ = BC = 225\text{m}$

$\therefore PC = PQ + CQ = 425\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PCA$ 中， $\tan \angle APC = \tan 15^\circ = \frac{AC}{PC} = \frac{AC}{425} \approx 0.27$ ，

解得 $AC \approx 114.75\text{m}$ ，

$AB = BC - AC = 225 - 114.75 = 110.25 \approx 110\text{m}$

$\therefore$ 奇楼的高度 AB 约为 110m .

【点睛】 题目主要考查解三角形的应用，理解题意，作出辅助线是解题关键.

21. 阅读下面材料:

将边长分别为 a ， $a + \sqrt{b}$ ， $a + 2\sqrt{b}$ ， $a + 3\sqrt{b}$ 的正方形面积分别记为 S_1 ， S_2 ， S_3 ， S_4 .

$$\begin{aligned}
 \text{则 } S_2 - S_1 &= (a + \sqrt{b})^2 - a^2 \\
 &= [(a + \sqrt{b}) + a] \cdot [(a + \sqrt{b}) - a] \\
 &= (2a + \sqrt{b}) \cdot \sqrt{b} \\
 &= b + 2a\sqrt{b}
 \end{aligned}$$

例如：当 $a = 1$ ， $b = 3$ 时， $S_2 - S_1 = 3 + 2\sqrt{3}$

根据以上材料解答下列问题：

(1) 当 $a = 1$ ， $b = 3$ 时， $S_3 - S_2 = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $S_4 - S_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

(2) 当 $a = 1$ ， $b = 3$ 时，把边长为 $a + n\sqrt{b}$ 的正方形面积记作 S_{n+1} ，其中 n 是正整数，从 (1) 中的计算结果，你能猜出 $S_{n+1} - S_n$ 等于多少吗？并证明你的猜想；

(3) 当 $a = 1$ ， $b = 3$ 时，令 $t_1 = S_2 - S_1$ ， $t_2 = S_3 - S_2$ ， $t_3 = S_4 - S_3$ ， $\dots$ ， $t_n = S_{n+1} - S_n$ ，且

$T = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{50}$ ，求 T 的值.

【答案】 (1) $9 + 2\sqrt{3}$ ， $15 + 2\sqrt{3}$

(2) 猜想结论： $S_{n+1} - S_n = 6n - 3 + 2\sqrt{3}$ ，证明见解析

(3) $7500 + 100\sqrt{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意，直接代入然后利用完全平方公式展开合并求解即可；

(2) 根据题意得出猜想，然后由完全平方公式展开证明即可；

(3) 结合题意利用 (2) 中结论求解即可.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned}
 \text{解： } S_3 - S_2 &= (a + 2\sqrt{b})^2 - (a + \sqrt{b})^2 \\
 &= a^2 + 4a\sqrt{b} + 4b - (a^2 + 2a\sqrt{b} + b) \\
 &= a^2 + 4a\sqrt{b} + 4b - a^2 - 2a\sqrt{b} - b \\
 &= 2a\sqrt{b} + 3b
 \end{aligned}$$

当 $a = 1$ ， $b = 3$ 时，

原式 $= 2\sqrt{3} + 9$ ；

$$\begin{aligned}
 S_4 - S_3 &= (a + 3\sqrt{b})^2 - (a + 2\sqrt{b})^2 \\
 &= a^2 + 6a\sqrt{b} + 9b - (a^2 + 4a\sqrt{b} + 4b) \\
 &= a^2 + 6a\sqrt{b} + 9b - a^2 - 4a\sqrt{b} - 4b \\
 &= 2a\sqrt{b} + 5b
 \end{aligned}$$

当 $a = 1$, $b = 3$ 时,

$$\text{原式} = 2\sqrt{3} + 15;$$

【小问 2 详解】

$$\text{猜想结论: } S_{n+1} - S_n = 6n - 3 + 2\sqrt{3}$$

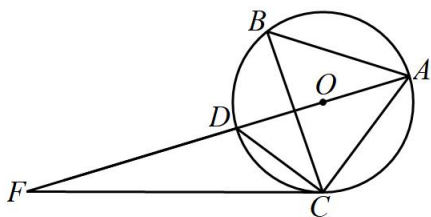
$$\begin{aligned}
 \text{证明: } S_{n+1} - S_n &= (1 + n\sqrt{3})^2 - [1 + (n-1)\sqrt{3}]^2 \\
 &= [2 + (2n-1)\sqrt{3}] \times \sqrt{3} \\
 &= 3(2n-1) + 2\sqrt{3} \\
 &= 6n - 3 + 2\sqrt{3};
 \end{aligned}$$

【小问 3 详解】

$$\begin{aligned}
 T &= t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_{50} \\
 &= S_2 - S_1 + S_3 - S_2 + S_4 - S_3 + \cdots + S_{51} - S_{50} \\
 &= S_{51} - S_1 \\
 &= (1 + 50\sqrt{3})^2 - 1 \\
 &= 7500 + 100\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

【点睛】题目主要考查利用完全平方公式进行计算，理解题意，得出相应规律是解题关键.

22. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD 是 $\odot O$ 的直径, F 是 AD 延长线上一点, 连接 CD , CF , 且 $\angle DCF = \angle CAD$.



(1) 求证: CF 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若直径 $AD = 10$, $\cos B = \frac{3}{5}$, 求 FD 的长.

【答案】(1) 详见解析

(2) $\frac{90}{7}$

【解析】

【分析】(1) 根据直径所对的圆周角是直角, 余角的性质即可求得结论;

(2) 根据已知条件可知 $\triangle FCD \sim \triangle FAC$, 再根据正切的定义和相似三角形的性质得到线段的关系即可求得线段 FD 的长度.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OC ,

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACD = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADC + \angle CAD = 90^\circ$,

又 $\because OC = OD$,

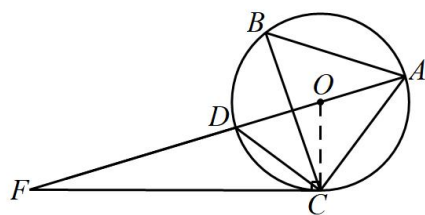
$\therefore \angle ADC = \angle OCD$,

又 $\because \angle DCF = \angle CAD$,

$\therefore \angle DCF + \angle OCD = 90^\circ$,

即 $OC \perp FC$,

$\therefore FC$ 是 $\odot O$ 的切线;



【小问 2 详解】

解: $\because \angle B = \angle ADC$, $\cos B = \frac{3}{5}$,

$\therefore \cos \angle ADC = \frac{3}{5}$,

$\because$ 在 $Rt\triangle ACD$ 中, $\cos \angle ADC = \frac{3}{5} = \frac{CD}{AD}$, $AD = 10$,

$\therefore CD = AD \cdot \cos \angle ADC = 10 \times \frac{3}{5} = 6$,

$\therefore AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = 8$,

$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{3}{4}$,

$$\because \angle FCD = \angle FAC, \angle F = \angle F,$$

$$\therefore \triangle FCD \sim \triangle FAC,$$

$$\therefore \frac{CD}{AC} = \frac{FC}{FA} = \frac{FD}{FC} = \frac{3}{4},$$

$$\text{设 } FD = 3x, \text{ 则 } FC = 4x, AF = 3x + 10,$$

$$\text{又 } \because FC^2 = FD \cdot FA,$$

$$\text{即 } (4x)^2 = 3x(3x + 10),$$

$$\text{解得 } x = \frac{30}{7} \text{ (取正值),}$$

$$\therefore FD = 3x = \frac{90}{7},$$

【点睛】本题考查了圆周角的性质，切线的判定定理，正切的定义，相似三角形的性质和判定，找出正切的定义与相似三角形相似比的关联是解题的关键。

23. 如图，在平面直角坐标系中，已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-2, 0)$ 和点 $B(6, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, 6)$ 。点 D 为线段 BC 上的一动点。

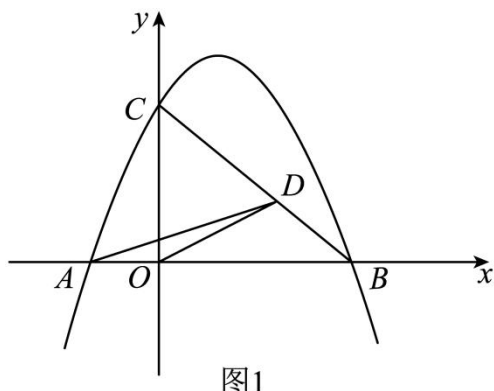


图1

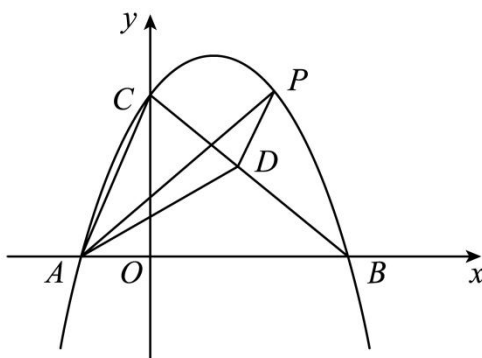


图2

- (1) 求二次函数的表达式；
- (2) 如图 1，求 $\triangle AOD$ 周长的最小值；
- (3) 如图 2，过动点 D 作 $DP \parallel AC$ 交抛物线第一象限部分于点 P ，连接 PA, PB ，记 $\triangle PAD$ 与 $\triangle PBD$ 的面积和为 S ，当 S 取得最大值时，求点 P 的坐标，并求出此时 S 的最大值。

【答案】(1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$

(2) 12

(3) $\left(3, \frac{15}{2}\right), S_{\text{最大值}} = \frac{27}{2}$

【解析】

【分析】(1) 根据题意设抛物线的表达式为 $y = a(x+2)(x-6)$ ，将 $(0, 6)$ 代入求解即可；

(2) 作点 O 关于直线 BC 的对称点 E ，连接 EC 、 EB ，根据点坐特点及正方形的判定得出四边形 $OBEC$ 为正方形， $E(6, 6)$ ，连接 AE ，交 BC 于点 D ，由对称性 $|DE| = |DO|$ ，此时 $|DO| + |DA|$ 有最小值为 AE 的长，再由勾股定理求解即可；

(3) 由待定系数法确定直线 BC 的表达式为 $y = -x + 6$ ，直线 AC 的表达式为 $y = 3x + 6$ ，设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right)$ ，然后结合图形及面积之间的关系求解即可。

【小问 1 详解】

解：由题意可知，设抛物线的表达式为 $y = a(x+2)(x-6)$ ，

将 $(0, 6)$ 代入上式得： $6 = a(0+2)(0-6)$ ，

$$a = -\frac{1}{2}$$

所以抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ；

【小问 2 详解】

作点 O 关于直线 BC 的对称点 E ，连接 EC 、 EB ，

$\because B(6, 0)$ ， $C(0, 6)$ ， $\angle BOC = 90^\circ$ ，

$\therefore OB = OC = 6$ ，

$\because O$ 、 E 关于直线 BC 对称，

$\therefore$ 四边形 $OBEC$ 为正方形，

$\therefore E(6, 6)$ ，

连接 AE ，交 BC 于点 D ，由对称性 $|DE| = |DO|$ ，

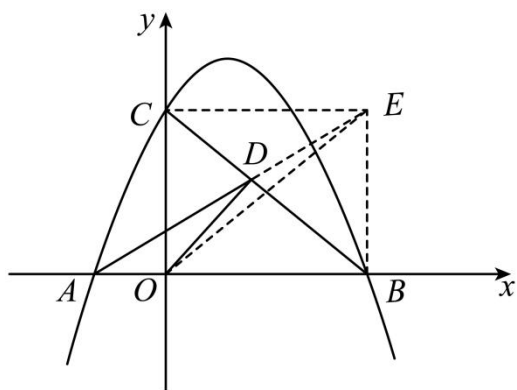
此时 $|DO| + |DA|$ 有最小值为 AE 的长，

$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$\therefore \triangle AOD$ 的周长为 $DA + DO + AO$ ，

$AO = 2$ ， $DA + DO$ 的最小值为 10，

$\therefore \triangle AOD$ 的周长的最小值为 $10 + 2 = 12$ ；



【小问 3 详解】

由已知点 $A(-2, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 6)$,

设直线 BC 的表达式为 $y = kx + b$,

将 $B(6, 0)$, $C(0, 6)$ 代入 $y = kx + b$ 中, $\begin{cases} 6k + b = 0 \\ b = 6 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} k = -1 \\ b = 6 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y = -x + 6$,

同理可得: 直线 AC 的表达式为 $y = 3x + 6$,

$\because PD \parallel AC$,

$\therefore$ 设直线 PD 表达式为 $y = 3x + a$,

由 (1) 设 $P\left(m, -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right)$, 代入直线 PD 的表达式

得: $a = -\frac{1}{2}m^2 - m + 6$,

$\therefore$ 直线 PD 的表达式为: $y = 3x - \frac{1}{2}m^2 - m + 6$,

由 $\begin{cases} y = -x + 6 \\ y = 3x - \frac{1}{2}m^2 - m + 6 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = \frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{4}m \\ y = -\frac{1}{8}m^2 - \frac{1}{4}m + 6 \end{cases}$,

$\therefore D\left(\frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{4}m, -\frac{1}{8}m^2 - \frac{1}{4}m + 6\right)$,

$\because P, D$ 都在第一象限,

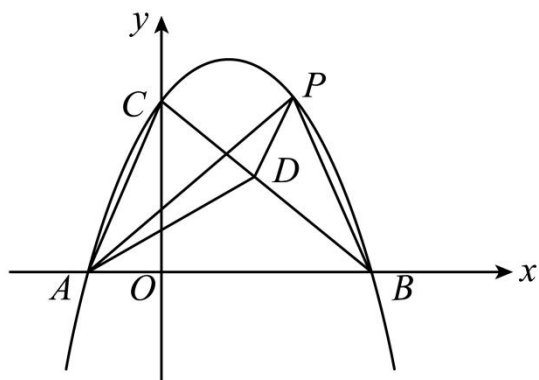
$\therefore S = S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PBD} = S_{\triangle PAB} - S_{\triangle DAB}$

$= \frac{1}{2}|AB|\left[\left(-\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6\right) - \left(-\frac{1}{8}m^2 - \frac{1}{4}m + 6\right)\right]$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times 8 \left(-\frac{3}{8}m^2 + \frac{9}{4}m \right) \\
 &= -\frac{3}{2}m^2 + 9m = -\frac{3}{2}(m^2 - 6m) \\
 &= -\frac{3}{2}(m-3)^2 + \frac{27}{2},
 \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $m=3$ 时，此时 P 点为 $\left(3, \frac{15}{2}\right)$.

$$S_{\text{最大值}} = \frac{27}{2}.$$



【点睛】题目主要考查二次函数的综合应用，包括待定系数

法确定函数解析式，周长最短问题及面积问题，理解题意，熟练掌握运用二次函数的综合性质是解题关键.

