

2023 年常德市初中学业水平考试

数学试题卷

考生注意：

1. 请考生在试题卷首填写好准考证号及姓名。
2. 请将答案填写在答题卡上，填写在试题卷上的无效。
3. 本学科试题卷共 4 页，七道大题，满分 120 分，考试时量 120 分钟。

一、选择题（本大题 8 个小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. 3 的相反数是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据互为相反数的两个数的符号相反即可解答。

【详解】解：∵ 3 的相反数是 -3 ，

故选 B。

【点睛】本题考查了相反数的定义，理解相反数的定义是解题的关键。

2. 下面算法正确的是（ ）

- A. $(-5)+9=-(9-5)$ B. $7-(-10)=7-10$ C. $(-5)+0=-5$ D. $(-8)+(-4)=8+4$

【答案】C

【解析】

【分析】根据有理数的加减法则计算即可。

【详解】A、 $(-5)+9=9-5$ ，故 A 不符合题意；

B、 $7-(-10)=7+10$ ，故 B 不符合题意；

C、 $(-5)+0=-5$ ，故 C 符合题意；

D、 $(-8)+(-4)=- (8+4)$ ，故 D 不符合题意；

故选：C。

【点睛】本题主要考查有理数的加减法，解答的关键是对相应的运算法则的掌握。

3. 不等式组 $\begin{cases} x-3 < 2 \\ 3x+1 \geq 2x \end{cases}$ 的解集是（ ）

A. $x < 5$

B. $1 \leq x < 5$

C. $-1 \leq x < 5$

D. $x \leq -1$

【答案】C

【解析】

【分析】分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可.

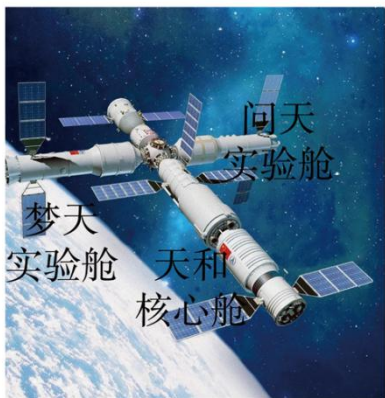
$$\text{【详解】} \begin{cases} x-3 < 2 \text{①} \\ 3x+1 \geq 2x \text{②} \end{cases}$$

解不等式①，移项，合并同类项得， $x < 5$ ；解不等式②，移项，合并同类项得， $x \geq -1$ 故不等式组的解集为： $-1 \leq x < 5$.

故选：C.

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键.

4. 我市“神十五”航天员张陆和他的两位战友已于2023年6月4日回到地球家园，“神十六”的三位航天员已在中国空间站开始值守，空间站的主体结构包括天和核心舱、问天实验舱和梦天实验舱，假设“神十六”甲、乙、丙三名航天员从核心舱进入问天实验舱和梦天实验舱开展实验的机会均等，现在要从这三名航天员中选2人各进入一个实验舱开展科学实验，则甲、乙两人同时被选中的概率为()



A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{4}$

D. $\frac{1}{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】用列表法表示出所有等可能得结果，然后利用概率公式求解即可.

【详解】

	甲	乙	丙
甲		(乙, 甲)	(丙, 甲)

乙	(甲, 乙)		(丙, 乙)
丙	(甲, 丙)	(乙, 丙)	

有表格可得，一共有 6 种等可能得结果，其中甲、乙两人同时被选中的结果有 2 种，

$\therefore$ 甲、乙两人同时被选中的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

故选：B.

【点睛】本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

5. 若 $a^2 + 3a - 4 = 0$ ，则 $2a^2 + 6a - 3 = ()$

A. 5

B. 1

C. -1

D. 0

【答案】A

【解析】

【分析】把 $a^2 + 3a - 4 = 0$ 变形后整体代入求值即可.

【详解】 $\because a^2 + 3a - 4 = 0$,

$$\therefore a^2 + 3a = 4$$

$$\therefore 2a^2 + 6a - 3 = 2(a^2 + 3a) - 3 = 2 \times 4 - 3 = 5,$$

故选：A.

【点睛】本题考查代数式求值，利用整体思想是解题的关键.

6. 下列命题正确的是()

A. 正方形的对角线相等且互相平分

B. 对角互补的四边形是平行四边形

C. 矩形的对角线互相垂直

D. 一组邻边相等的四边形是菱形

【答案】A

【解析】

【分析】根据正方形、平行四边形、矩形、菱形的各自性质和构成条件进行判断即可.

【详解】A、正方形的对角线相等且互相垂直平分，描述正确；

B、对角互补的四边形不一定是平行四边形，只是内接于圆，描述错误；

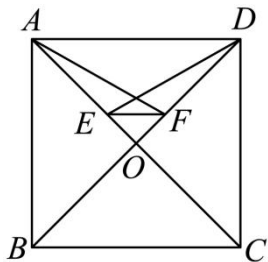
C、矩形的对角线不一定垂直，但相等，描述错误；

D、一组邻边相等的平行四边形才构成菱形，描述错误.

故选：A.

【点睛】本题考查平行四边形、矩形、菱形、正方形的性质和判定，解题的关键是熟练掌握各类特殊四边形的判定和性质.

7. 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , E, F 分别为 AO, DO 上的一点, 且 $EF \parallel AD$, 连接 AF, DE . 若 $\angle FAC = 15^\circ$, 则 $\angle AED$ 的度数为()



- A. 80° B. 90° C. 105° D. 115°

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据正方形的性质得到 $\angle OAD = \angle ODA = 45^\circ$, $AO = DO$, 然后结合 $EF \parallel AD$ 得到 $OE = OF$, 然后证明出 $\triangle AOF \cong \triangle DOE$ (SAS), 最后利用三角形内角和定理求解即可.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA = 45^\circ, \quad AO = DO$$

$$\because EF \parallel AD$$

$$\therefore \angle OEF = \angle OAD = 45^\circ, \quad \angle OFE = \angle ODA = 45^\circ$$

$$\therefore \angle OEF = \angle OFE$$

$$\therefore OE = OF$$

$$\text{又} \because \angle AOF = \angle DOE = 90^\circ, \quad AO = DO$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle DOE \text{ (SAS)}$$

$$\therefore \angle ODE = \angle FAC = 15^\circ$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ODA - \angle ODE = 30^\circ$$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle OAD - \angle ADE = 105^\circ$$

故选：C.

【点睛】此题考查了正方形的性质，全等三角形的性质和判定，等腰直角三角形三角形的性质等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

8. 观察下边的数表（横排为行，竖排为列），按数表中的规律，分数 $\frac{20}{2023}$ 若排在第 a 行 b 列，则 $a-b$ 的值为()

$\frac{1}{1}$			
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{1}$		
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{1}$	
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{1}$

.....

A. 2003

B. 2004

C. 2022

D. 2023

【答案】C

【解析】

【分析】观察表中的规律发现，分数的分子是几，则必在第几列；只有第一列的分数，分母与其所在行数一致.

【详解】观察表中的规律发现，分数的分子是几，则必在第几列；只有第一列的分数，分母与其所在行数一致，故 $\frac{20}{2023}$ 在第 20 列，即 $b = 20$ ；向前递推到第 1 列时，分数为 $\frac{20-19}{2023+19} = \frac{1}{2042}$ ，故分数 $\frac{20}{2023}$ 与分数 $\frac{1}{2042}$ 在同一行. 即在第 2042 行，则 $a = 2042$.

$\therefore a - b = 2042 - 20 = 2022$.

故选：C.

【点睛】本题考查了数字类规律探索的知识点，解题的关键善于发现数字递变的周期性和趋向性.

二、填空题（本大题 8 个小题，每小题 3 分，满分 24 分）

9. 计算： $(a^2b)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 a^6b^3

【解析】

【详解】试题分析：根据积的乘方运算法则可得 $(a^2b)^3 = a^6b^3$.

考点：积的乘方运算法则.

10. 分解因式： $a^3 + 2a^2b + ab^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(a+b)^2$

【解析】

【分析】首先提公因式，原式可化为 $a(a^2 + 2ab + b^2)$ ，再利用公式法进行因式分解可得结果.

【详解】解： $a^3 + 2a^2b + b^3 = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)^2$ ，

故答案为： $a(a + b)^2$.

【点睛】本题主要考查的是因式分解的运算，掌握因式分解运算的顺序“一提，二套，三分组，十字相乘做辅助”，利用合适方法进行因式分解，注意分解要彻底.

11. 要使二次根式 $\sqrt{x-4}$ 有意义，则 x 应满足的条件是_____.

【答案】 $x \geq 4$

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件求解即可.

【详解】根据题意得： $x - 4 \geq 0$ ，

解得： $x \geq 4$ ，

故答案为： $x \geq 4$.

【点睛】本题考查二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义需被开方数大于等于 0 是解题的关键.

12. 联合国 2022 年 11 月 15 日宣布，全世界人口已达 80 亿. 将 8000000000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 8×10^9

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】 $8000000000 = 8 \times 10^9$ ，

故答案为： 8×10^9 .

【点睛】此题主要考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

13. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$

【解析】

【分析】若一元二次方程有两个不相等的实数根，则根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ，建立关于 k 的不等式，解不等式即可得出答案.

【详解】解：∵关于 x 的方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4k > 0,$$

解得 $k < 1$.

故答案为： $k < 1$.

【点睛】此题考查了根的判别式. 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系：

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

14. 我市体育中考有必考和选考项目，掷实心球是必考项目之一，在一次训练中，张华同学掷实心球 10 次的成绩依次是（单位：米）7.6，8.5，8.6，8.5，9.1，8.5，8.4，8.6，9.2，7.3. 则张华同学掷实心球成绩的众数是_____.

【答案】 8.5

【解析】

【分析】由众数的概念即可得到答案.

【详解】张华同学掷实心球 10 次的成绩出现频数最高的是 8.5 米，共 3 次，故张华同学掷实心球成绩的众数是 8.5.

故答案为： 8.5.

【点睛】本题考查的众数的概念，解题的关键是熟练掌握众数的概念.

15. 如图 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $BC = 6$ ， D 是 AB 上一点，且 $AD = 2$ ，过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 AC 于 E ，将 $\triangle ADE$ 绕 A 点顺时针旋转到图 2 的位置. 则图 2 中 $\frac{BD}{CE}$ 的值为_____.

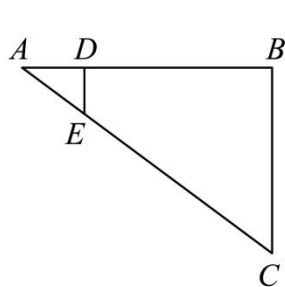


图1

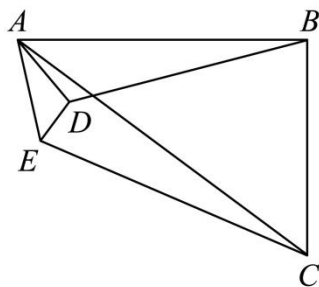


图2

【答案】 $\frac{4}{5}$

【解析】

【分析】首先根据勾股定理得到 $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$ ，然后证明出 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，得到 $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ ，进而得到 $\frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$ ，然后证明出 $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ ，利用相似三角形的性质求解即可.

【详解】 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 8$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$$

$$\because DE \parallel BC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ABC = 90^\circ, \angle AED = \angle ACB$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE$$

$$\therefore \angle BAC + \angle CAD = \angle DAE + \angle CAD$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACE$$

$$\therefore \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

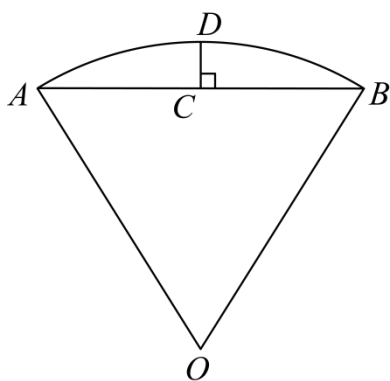
故答案为： $\frac{4}{5}$ 。

【点睛】此题考查了相似三角形的性质和判定，解题的关键是熟练掌握相似三角形的性质和判定定理。

16. 沈括的《梦溪笔谈》是中国古代科技史上的杰作，其中收录了计算圆弧长度的“会圆术”，如图. $\widehat{AB}$ 是以 O 为圆心， OA 为半径的圆弧， C 是弦 AB 的中点， D 在 $\widehat{AB}$ 上， $CD \perp AB$. “会圆术”给出 $\widehat{AB}$ 长 l

的近似值 s 计算公式： $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$ ，当 $OA = 2$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ 时， $|l - s| = \underline{\hspace{2cm}}$. (结果保留一

位小数)



【答案】0.1

【解析】

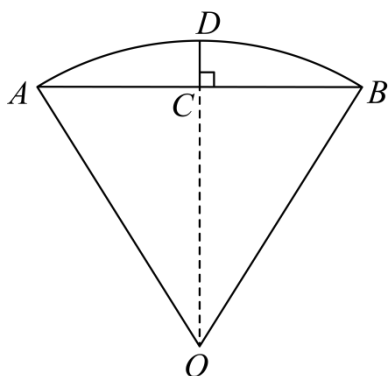
【分析】由已知求得 AB 与 CD 的值，代入 $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$ 得弧长的近似值，利用弧长公式可求弧长的值，进而即可得解。

【详解】 $\because OA = OB = 2, \angle AOB = 90^\circ$,

$$\therefore AB = 2\sqrt{2},$$

$\because C$ 是弦 AB 的中点， D 在 $\widehat{AB}$ 上， $CD \perp AB$,

$\therefore$ 延长 DC 可得 O 在 DC 上， $OC = \frac{1}{2}AB = \sqrt{2}$



$$\therefore CD = OD - OC = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore s = AB + \frac{CD^2}{OA} = 2\sqrt{2} + \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{2} = 3,$$

$$l = \frac{90 \times 2 \times 2\pi}{360} = \pi,$$

$$\therefore |l - s| = |\pi - 3| \approx 0.1.$$

故答案为：0.1.

【点睛】本题考查扇形的弧长，掌握垂径定理。弧长公式是关键。

三、(本大题 2 个小题，每小题 5 分，满分 10 分)

17. 计算： $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \sin 60^\circ + |2^0 - \sqrt{3}|$

【答案】0

【解析】

【分析】首先计算负整数指数幂，特殊角的三角函数，零指数幂和绝对值，然后计算加减。

【详解】原式 $= 1 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + |1 - \sqrt{3}|$

$$= 1 - \sqrt{3} + \sqrt{3} - 1$$

$$= 0.$$

【点睛】此题考查了负整数指数幂，特殊角的三角函数，零指数幂和绝对值，解题的关键是熟练掌握以上运算法则.

18. 解方程组:
$$\begin{cases} x - 2y = 1 \text{①} \\ 3x + 4y = 23 \text{②} \end{cases}$$

【答案】
$$\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

【解析】

【分析】方程组利用加减消元法求解即可.

【详解】解：将① $\times 2$ 得： $2x - 4y = 2$ ③

②+③得： $x = 5$

将 $x = 5$ 代入①得： $y = 2$

所以 $\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$ 是原方程组的解.

【点睛】此题考查了解二元一次方程组，利用了消元的思想，解题的关键是利用代入消元法或加减消元法消去一个未知数.

四、(本大题 2 个小题，每小题 6 分，满分 12 分)

19. 先化简，再求值： $\frac{x+3}{x^2-4} \div \left(2 - \frac{x+1}{x+2}\right)$ ，其中 $x = 5$.

【答案】 $\frac{1}{x-2}, \frac{1}{3}$

【解析】

【分析】先计算括号内的减法运算，再计算除法，得到化简结果，再把字母的值代入计算即可.

【详解】解：原式 $= \frac{x+3}{(x+2)(x-2)} \div \frac{2x+4-x-1}{x+2}$

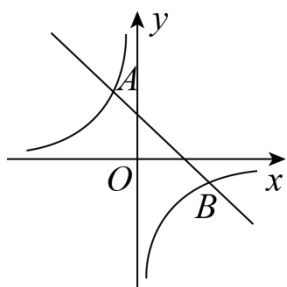
$$= \frac{x+3}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x+2}{x+3}$$

$$= \frac{1}{x-2},$$

当 $x=5$ 时, 原式 $= \frac{1}{5-2} = \frac{1}{3}$

【点睛】此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握分式运算法则和混合运算顺序是解题的关键.

20. 如图所示, 一次函数 $y_1 = -x + m$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 相交于点 A 和点 $B(3, -1)$.



(1) 求 m 的值和反比例函数解析式;

(2) 当 $y_1 > y_2$ 时, 求 x 的取值范围.

【答案】(1) $m = 2$, $y = -\frac{3}{x}$

(2) $x < -1$ 或 $0 < x < 3$

【解析】

【分析】(1) 根据一次函数 $y_1 = -x + m$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 的图象交于 $A(3, -1)$ 、 B 两点可得 m 的值, 进而可求反比例函数的表达式;

(2) 观察函数图象, 写出一一次函数图象在反比例函数图象上方所对应的自变量的范围即可.

【小问 1 详解】

将点 $B(3, -1)$ 代入 $y_1 = -x + m$ 得: $-3 + m = -1$

解得: $m = 2$

将 $B(3, -1)$ 代入 $y_2 = \frac{k}{x}$ 得: $k = 3 \times (-1) = -3$

$$\therefore y_2 = -\frac{3}{x}$$

【小问 2 详解】

由 $y_1 = y_2$ 得: $-x + 2 = \frac{-3}{x}$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$

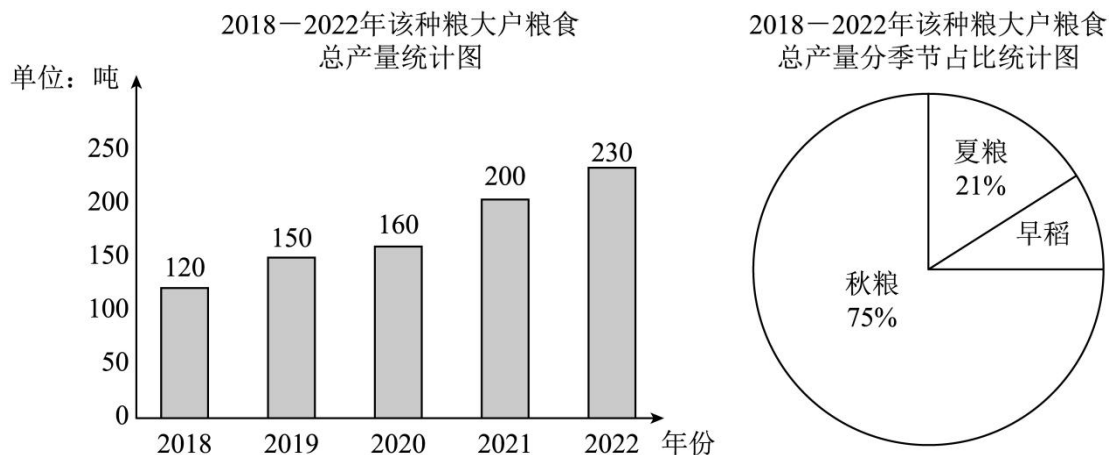
所以 A, B 的坐标分别为 $A(-1, 3), B(3, -1)$

由图形可得: 当 $x < -1$ 或 $0 < x < 3$ 时, $y_1 > y_2$

【点睛】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 解决本题的关键是掌握反比例函数与一次函数的性质.

五、(本大题 2 个小题, 每小题 7 分, 满分 14 分)

21. 党的二十大报告指出: “我们要全方位夯实粮食安全根基, 牢牢守住十八亿亩耕地红线. 确保中国人的饭碗牢牢端在自己手中”. 为了了解粮食生产情况, 某校数学兴趣小组调查了某种粮大户 2018 年至 2022 年粮食总产量及 2022 年粮食分季节占比情况如下:



请根据图中信息回答下列问题:

- (1) 该种粮大户 2022 年早稻产量是_____吨;
- (2) 2018 年至 2022 年该种粮大户粮食总产量的中位数是_____, 平均数是_____;
- (3) 该粮食大户估计 2023 年的粮食总产量年增长率与 2022 年的相同, 那么 2023 年该粮食大户的粮食总产量是多少吨?

【答案】(1) 9.2 (2) 160 吨; 172 吨

(3) 264.5 吨

【解析】

【分析】(1) 用 2022 年总量乘以早稻所占的百分比求解即可;

(2) 根据中位数和平均数的概念求解即可;

(3) 首先求出年增长率, 进而求解即可.

【小问 1 详解】

$$230 \times (1 - 75\% - 21\%) = 9.2 \quad (\text{吨})$$

故答案为: 9.2.

【小问 2 详解】

2018 年至 2022 年该种粮大户粮食总产量从小到大排列如下:

120, 150, 160, 200, 230

$\therefore$ 2018 年至 2022 年该种粮大户粮食总产量的中位数是 160 吨;

$$(120 + 150 + 160 + 200 + 230) \div 5 = 172 \quad (\text{吨})$$

∴2018年至2022年该种粮大户粮食总产量的平均数是172吨；

故答案为：160吨，172吨；

【小问3详解】

$$(230 - 200) \div 200 \times 100\% = 15\%$$

$$230 \times (1 + 15\%) = 264.5 \text{ (吨)}$$

∴2023年该粮食大户的粮食总产量是264.5吨.

【点睛】此题考查了扇形统计图和条形统计图，求中位数和平均数等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

22. “六一”儿童节将至，张老板计划购买A型玩具和B型玩具进行销售，若用1200元购买A型玩具的数量比用1500元购买B型玩具的数量多20个，且一个B型玩具的进价是一个A型玩具进价的1.5倍.

(1) 求A型玩具和B型玩具的进价分别是多少？

(2) 若A型玩具的售价为12元/个，B型玩具的售价为20元/个，张老板购进A，B型玩具共75个，要使总利润不低于300元，则A型玩具最多购进多少个？

【答案】(1) A型，B型玩具的单价分别是10元/个，15元/个

(2) 最多可购进A型玩具25个

【解析】

【分析】(1) 设A型玩具的单价为x元/件. 依题意列出分式方程，进行求解；

(2) 根据题意列出不等式进行求解即可.

【小问1详解】

设A型玩具的单价为x元/件.

$$\text{由题意得: } \frac{1200}{x} - \frac{1500}{1.5x} = 20,$$

$$\text{解得: } x = 10$$

经检验， $x = 10$ 是原方程的解

B型玩具的单价为 $10 \times 1.5 = 15$ 元/个

∴A型，B型玩具的单价分别是10元/个，15元/个.

【小问2详解】

设购进A型玩具m个.

$$(12 - 10)m + (20 - 15)(75 - m) \geq 300$$

$$\text{解得: } m \leq 25$$

∴最多可购进A型玩具25个.

【点睛】本题考查了分式方程，一元一次不等式的实际应用，解题的关键是根据题意列出相应的方程或不等式.

六、(本大题2个小题，每小题8分，满分16分)

23. 今年“五一”长假期间，小陈、小余同学和家长去沙滩公园游玩，坐在如图的椅子上休息时，小陈感觉很舒服，激发了她对这把椅子的好奇心，就想出个问题考考同学小余，小陈同学先测量，根据测量结果画出了图1的示意图(图2). 在图2中，已知四边形ABCD是平行四边形，座板CD与地面MN平行， $\triangle EBC$ 是等腰三角形且 $BC = CE$ ， $\angle FBA = 114.2^\circ$ ，靠背 $FC = 57\text{cm}$ ，支架 $AN = 43\text{cm}$ ，扶手的一部分 $BE = 16.4\text{cm}$. 这时她问小余同学，你能算出靠背顶端F点距地面(MN)的高度是多少吗？请你帮小余同学算出结果(最后结果保留一位小数). (参考数据： $\sin 65.8^\circ = 0.91$ ， $\cos 65.8^\circ = 0.41$ ， $\tan 65.8^\circ = 2.23$)



图1

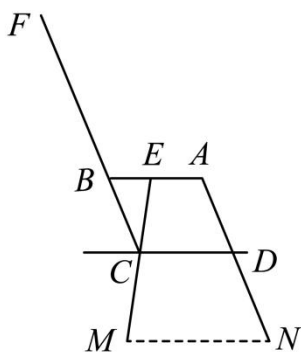


图2

【答案】72.8cm

【解析】

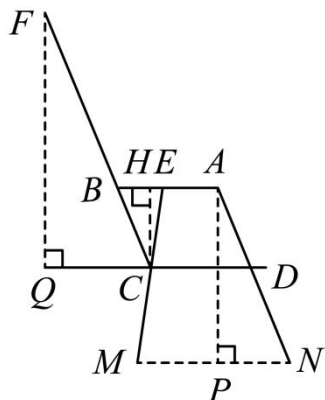
【分析】方法一：过点F作 $FQ \perp DC$ 交DC的延长线于点Q，由平行四边形的性质可得

$\angle FCQ = \angle CBH = 180^\circ - 114.2^\circ = 65.8^\circ$ ，进而求得FQ，过点A作 $AP \perp MN$ 于点P，根据平行线的性质可得 $\angle ANP = \angle FCQ = 65.8^\circ$ ，进而求得AP，过C作 $CH \perp AB$ 于点H，根据等腰三角形三线合一可得 $BH = 8.2$ ，进而求得CH，利用 $MN = FQ + AP - HC$ 求解即可；

方法二：过点F作 $FQ \perp DC$ 交DC的延长线于点Q，过点C作 $CH \perp AB$ 于点H，延长AB交FQ于点S，根据等腰三角形三线合一可得 $BH = 8.2$ ，进而求得BC，FS，过A作 $AP \perp MN$ 于P，根据平行线的性质可得 $\angle ANP = \angle FCQ = 65.8^\circ$ ，进而求得AP，根据 $MN = FS + AP$ 求解即可.

【详解】解：方法一：

过点F作 $FQ \perp DC$ 交DC的延长线于点Q，



∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\angle FBA = 114.2^\circ$,

$$\therefore \angle FCQ = \angle CBH = 180^\circ - 114.2^\circ = 65.8^\circ,$$

$$\therefore FC = 57$$

$$\therefore FQ = FC \cdot \sin \angle FCQ = 57 \cdot \sin 65.8^\circ,$$

过点 A 作 $AP \perp MN$ 于点 P,

由题意知 $AB \parallel CD \parallel MN$, $FC \parallel AN$,

$$\therefore \angle ANP = \angle FCQ = 65.8^\circ,$$

又 $\because AN=43$,

$$\therefore AP = AN \cdot \sin \angle ANP = 43 \cdot \sin 65.8^\circ,$$

过 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H .

$$\because BC = CE, \quad EB = 16.4,$$

$$\therefore BH = 8.2,$$

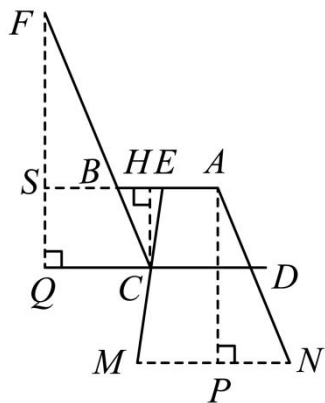
$$\therefore CH = BH \cdot \tan \angle CBH = 8.2 \times \tan 65.8^\circ = 8.2 \times 2.23 \approx 18.29,$$

$\therefore$ 靠背顶端 F 点距地面 (MN) 高度为

$$FQ + AP - HC = 57 \sin 65.8^\circ + 43 \sin 65.8^\circ - 18.29 = 100 \times 0.91 - 18.29 = 72.71 \approx 72.7 \text{ cm} ;$$

方法二:

如图, 过点 F 作 $FQ \perp DC$ 交 DC 的延长线于点 Q , 过点 C 作 $CH \perp AB$ 于点 H , 延长 AB 交 FQ 于点 S ,



$$\because BC = CE, EB = 16.4,$$

$$\therefore BH = 8.2,$$

$$\text{又} \because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle FCQ = \angle HBC = 180^\circ - 114.2^\circ = 65.8^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{BH}{\cos \angle CBH} = 8.2 \div 0.41 = 20\text{cm},$$

$$\therefore FS = FB \cdot \sin \angle FBS = FB \cdot \sin \angle HBC = (57 - 20) \cdot \sin 65.8^\circ = 37 \sin 65.8^\circ,$$

过A作 $AP \perp MN$ 于P,

由题意知 $AB \parallel CD \parallel MN$, $FC \parallel AN$,

$$\therefore \angle ANP = \angle FCQ = 65.8^\circ,$$

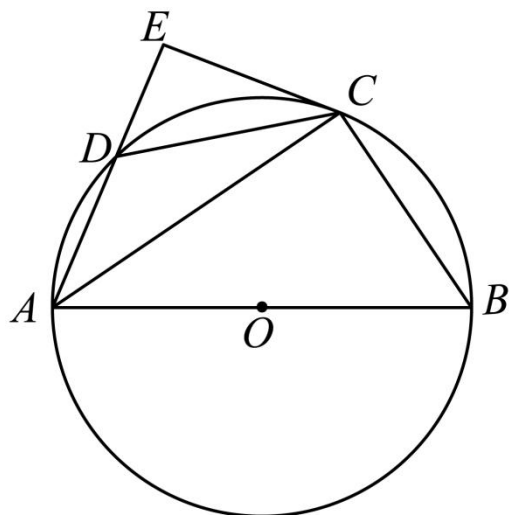
$$\text{又} \because AN = 43,$$

$$\therefore AP = AN \cdot \sin \angle ANP = 43 \sin 65.8^\circ,$$

$$\therefore \text{靠背顶端 } F \text{ 点距地面 } (MN) \text{ 高度为 } FS + AP = 37 \sin 65.8^\circ + 43 \sin 65.8^\circ = 80 \times 0.91 = 72.8\text{cm}.$$

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形，等腰三角形的性质，平行四边形的性质，正确作出辅助线，构造直角三角形是解题的关键.

24. 如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形， AB 是直径， C 是 $\widehat{BD}$ 的中点，过点 C 作 $CE \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 E .



- (1) 求证: CE 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $BC = 6$, $AC = 8$, 求 CE, DE 的长.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $EC = \frac{24}{5}$, $DE = \frac{18}{5}$.

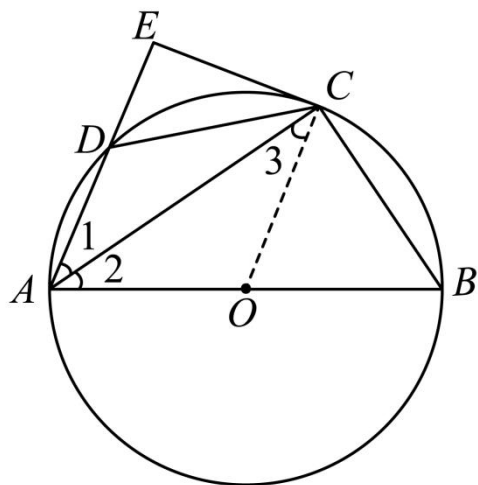
【解析】

【分析】(1) 根据“连半径，证垂直”即可，

(2) 先由“直径所对的圆周角是直角”，证 $\triangle ABC$ 是直角三角形，用勾股定理求出 AB 长，再通过三角形相似即可求解.

【小问 1 详解】

连接 OC



$\because C$ 为 $\widehat{BD}$ 的中点,

$$\therefore \overset{\diamond}{\widehat{CD}} = \overset{\diamond}{\widehat{BC}},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

又 $\because OA = OC$,

$\therefore \angle 2 = \angle 3$,

$\therefore \angle 1 = \angle 3$,

$\therefore AE \parallel OC$,

又 $\because CE \perp AE$,

$\therefore CE \perp OC$, OC 为半径,

$\therefore CE$ 为 $\odot O$ 的切线,

【小问 2 详解】

$\because AB$ 为 $\odot O$ 直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because BC = 6, AC = 8$,

$\therefore AB = 10$,

又 $\because \angle 1 = \angle 2$, $\angle AEC = \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AEC \sim \triangle ACB$,

$\therefore \frac{EC}{CB} = \frac{AC}{AB}$, 即 $\frac{EC}{6} = \frac{8}{10}$,

$\therefore EC = \frac{24}{5}$,

$\because \widehat{CD} = \widehat{CB}$,

$\therefore CD = BC = 6$,

在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 中, 由勾股定理得:

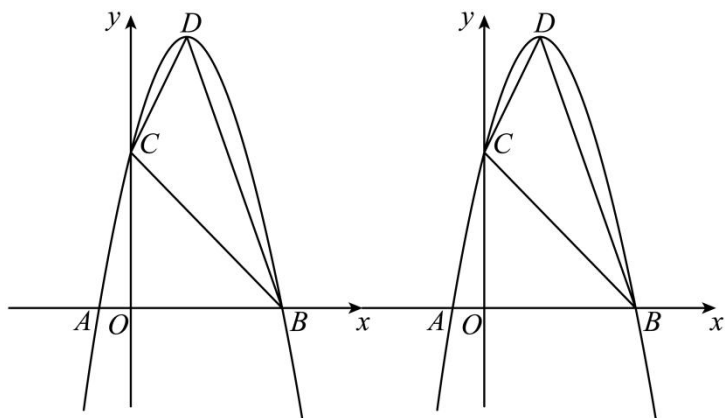
$$DE = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{18}{5}.$$

【点睛】 此题考查切线的判定, 圆周角定理, 勾股定理定理的应用, 相似三角形的判定与性质, 熟练掌握相关性质与判定是解题的关键.

七、(本大题 2 个小题, 每小题 10 分, 满分 20 分)

25. 如图, 二次函数的图象与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(5, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D . O 为坐标原点,

$$\tan \angle ACO = \frac{1}{5}.$$



备用图

- (1) 求二次函数的表达式;
- (2) 求四边形 $ACDB$ 的面积;
- (3) P 是抛物线上的一点, 且在第一象限内, 若 $\angle ACO = \angle PBC$, 求 P 点的坐标.

【答案】(1) $y = -(x+1)(x-5)$

(2) 30 (3) $P\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$

【解析】

【分析】(1) 用两点式设出二次函数的解析式, 然后求得 C 点的坐标, 并将其代入二次函数的解析式, 求得 a 的值, 再将 a 代入解析式中即可.

(2) 先将二次函数变形为顶点式, 求得顶点坐标, 然后利用矩形、三角形的面积公式即可求得答案.

(3) 根据各点的坐标的关系及同角三角函数相等的结论可以求得相关联的函数解析式, 最后联立一次函数与二次函数的解析式, 求得点 P 的坐标.

【小问 1 详解】

$\because$ 二次函数的图象与 x 轴交于 $A(-1, 0), B(5, 0)$ 两点.

$\therefore$ 设二次函数的表达式为 $y = a(x+1)(x-5)$

$\because AO = 1, \tan \angle ACO = \frac{1}{5},$

$\therefore OC = 5$, 即 C 的坐标为 $(0, 5)$

则 $5 = a(0+1)(0-5)$, 得 $a = -1$

$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y = -(x+1)(x-5)$;

【小问 2 详解】

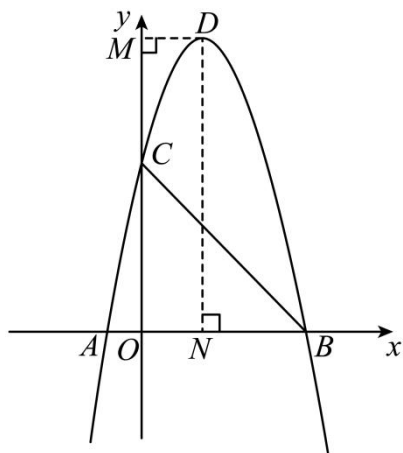
$$y = -(x+1)(x-5) = -(x-2)^2 + 9$$

∴ 顶点的坐标为(2,9)

过D作 $DN \perp AB$ 于N, 作 $DM \perp OC$ 于M,

$$\text{四边形 } ACDB \text{ 的面积} = S_{\triangle AOC} + S_{\text{矩形 } OMDN} - S_{\triangle CDM} + S_{\triangle DNB}$$

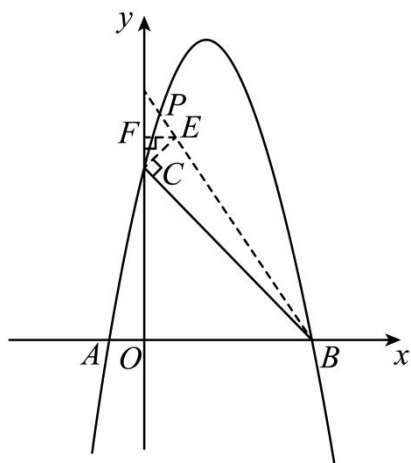
$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 5 + 2 \times 9 - \frac{1}{2} \times 2 \times (9-5) + \frac{1}{2} \times (5-2) \times 9 = 30 ;$$



【小问3 详解】

如图, P 是抛物线上的一点, 且在第一象限, 当 $\angle ACO = \angle PBC$ 时,

连接 PB, 过 C 作 $CE \perp BC$ 交 BP 于 E, 过 E 作 $EF \perp OC$ 于 F,



∵ $OC = OB = 5$, 则 $\triangle OCB$ 为等腰直角三角形, $\angle OCB = 45^\circ$.

由勾股定理得: $CB = 5\sqrt{2}$,

∵ $\angle ACO = \angle PBC$,

∴ $\tan \angle ACO = \tan \angle PBC$,

$$\text{即 } \frac{1}{5} = \frac{CE}{CB} = \frac{CE}{5\sqrt{2}},$$

$$\therefore CE = \sqrt{2}$$

由 $CH \perp BC$ ，得 $\angle BCE = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ECF = 180^\circ - \angle BCE - \angle OCB = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

$\therefore \triangle EFC$ 是等腰直角三角形

$$\therefore FC = FE = 1$$

$\therefore E$ 的坐标为 $(1, 6)$

所以过 B 、 E 的直线的解析式为 $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$

$$\text{令} \begin{cases} y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2} \\ y = -(x+1)(x-5) \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{27}{4} \end{cases}$$

所以 BE 直线与抛物线的两个交点为 $B(5, 0)$, $P\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$

即所求 P 的坐标为 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{27}{4}\right)$

【点睛】 本题考查了一次函数、二次函数的性质以及与坐标系几何图形的综合证明计算问题，解题的关键是将所学的知识灵活运用。

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D 是 BC 的中点，延长 DA 至 E ，连接 EB, EC 。

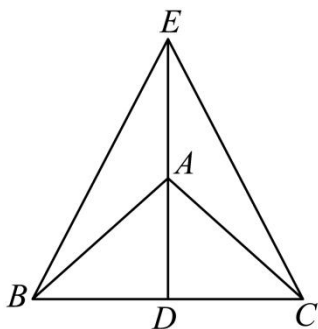


图1

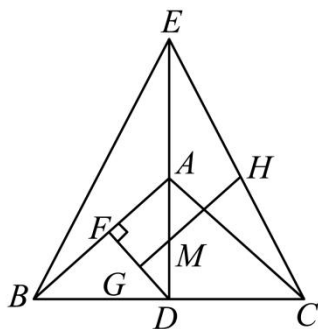


图2

(1) 求证： $\triangle BAE \cong \triangle CAE$ ；

(2) 在如图 1 中，若 $AE = AD$ ，其它条件不变得得到图 2，在图 2 中过点 D 作 $DF \perp AB$ 于 F ，设 H 是 EC 的中点，过点 H 作 $HG \parallel AB$ 交 FD 于 G ，交 DE 于 M 。

求证：

① $AF \cdot MH = AM \cdot AE$ ；

② $GF = GD$ 。

【答案】(1) 证明见解析

(2) ①见解析，②见解析

【解析】

【分析】(1) 先证出 AD 是 BC 的垂直平分线，再由线段垂直平分线的性质得到 $EB = EC$ ，最后由 SSS 证得 $\triangle BAE \cong \triangle CAE$ ；

(2) ①连接 AH ，由三角形中位线的性质得到 $AH \parallel DC$ ，从而 $\angle EAH = \angle EDC = 90^\circ$ ，再由 $DF \perp AB$ ， $HG \parallel AB$ ，得到 $\angle FAD = \angle AMH$ ，可证得 $\triangle AFD \sim \triangle MAH$ ，从而 $AF \cdot MH = AM \cdot AD$ ，又 $AE = AD$ ，等量代换即可；

②先证明 $\triangle AMH \sim \triangle DAC$ ，再由 AH 为 $\triangle EDC$ 的中位线，得到 $AM = \frac{1}{2}AD$ ，从而 M 为 AD 中点，由于 G 为 FD 中点，故得证 $GF = GD$ 。

【小问 1 详解】

证明：∵ $AB = AC$ ， D 是 BC 的中点，

∴ AD 是 BC 的垂直平分线，

又∵ E 在 AD 上，

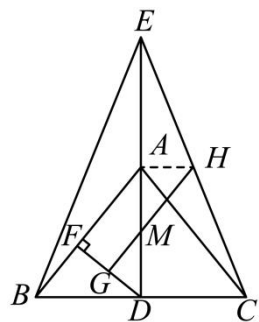
∴ $EB = EC$ ，

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CAE$ 中， $AB = AC, EB = EC, AE = AE$

∴ $\triangle BAE \cong \triangle CAE$ (SSS)

【小问 2 详解】

证明：①连接 AH ，



∵ A, H 分别是 ED 和 EC 的中点，

∴ AH 为 $\triangle EDC$ 的中位线，

$$\therefore AH \parallel DC,$$

$$\therefore \angle EAH = \angle EDC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because DF \perp AB,$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because HG \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle AMH,$$

$$\text{在} \triangle AFD \text{和} \triangle MAH \text{中}, \angle AFD = \angle MAH = 90^\circ, \angle FAD = \angle AMH,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle MAH,$$

$$\therefore \frac{AF}{AM} = \frac{AD}{MH},$$

$$\therefore AF \cdot MH = AM \cdot AD,$$

$$\text{又} \because AE = AD,$$

$$\therefore AF \cdot MH = AM \cdot AE;$$

$$\textcircled{2} \text{在} \triangle AMH \text{和} \triangle DAC \text{中}, \angle MAH = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB,$$

$$\because DF \perp AB,$$

$$\therefore \angle FAD + \angle ADF = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABD + \angle FAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADF,$$

$$\because AB \parallel HG,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle HGD = 90^\circ,$$

$$\because \angle AMH = \angle GMD,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle ADF,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ADF = \angle AHM,$$

$$\therefore \angle AHM = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle AMH \sim \triangle DAC,$$

$$\text{又} \because A、H \text{ 分别为 } ED \text{ 和 } EC \text{ 中点},$$

$$\therefore AH \text{ 为 } \triangle EDC \text{ 的中位线},$$

$$\therefore \frac{AM}{AD} = \frac{AH}{DC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore AM = \frac{1}{2}AD$ ，即 M 为 AD 中点，

又 $\because AF \parallel GH$ ，

$\therefore G$ 为 FD 中点，

$\therefore GF = GD$.

【点睛】 此题考查了全等三角形的判定和性质、相似三角形的判定和性质、线段垂直平分线的判定和性质、三角形中位线的定义和性质，熟练掌握相应的判定和性质是解答此题的关键.

