

黄冈市 2023 年初中学业水平考试数学试卷

(满分：120 分，考试用时：120 分钟)

一、精心选一选 (本大题共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分，在每小题给出的四个选项中只有一项是符合题目要求的。请在答题卡上把正确答案的代号涂黑)

1. -2 的相反数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数进行解答即可得。

【详解】解： -2 的相反数是 2 ，

故选：B。

【点睛】本题考查了相反数的定义，熟练掌握相反数的定义是解题的关键。

2. 2023 年全国普通高校毕业生规模预计达到 1158 万人，数 11580000 用科学记数法表示为 ()

- A. 1.158×10^7 B. 1.158×10^8 C. 1.158×10^3 D. 1158×10^4

【答案】A

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，且 n 比原来的整数位数少 1，据此判断即可。

【详解】解： $11580000 = 1.158 \times 10^7$ 。

故选：A。

【点睛】此题主要考查了用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键。

3. 下列几何体中，三视图都是圆的是 ()

- A. 长方体 B. 圆柱 C. 圆锥 D. 球

【答案】D

【解析】

【分析】根据几何体的三视图进行判断即可。

【详解】解：在长方体、圆柱、圆锥、球四个几何体中，三视图都是圆的是球，

故选：D

【点睛】此题考查了三视图，熟练掌握常见几何体的三视图是解题的关键.

4. 不等式 $\begin{cases} x-1 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$ 的解集为 ()

A. $x > -1$

B. $x < 1$

C. $-1 < x < 1$

D. 无解

【答案】C

【解析】

【分析】先求出两个不等式的解集，再求交集即可.

【详解】解：解不等式 $x-1 < 0$ ，得： $x < 1$ ，

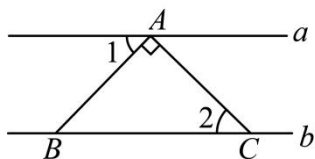
解不等式 $x+1 > 0$ ，得： $x > -1$ ，

因此该不等式组的解集为 $-1 < x < 1$.

故选 C.

【点睛】本题考查求不等式组的解集，解题的关键是熟记不等式组的解集口诀“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到”.

5. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角顶点 A 在直线 a 上，斜边 BC 在直线 b 上，若 $a \parallel b$ ， $\angle 1 = 55^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ ()



A. 55°

B. 45°

C. 35°

D. 25°

【答案】C

【解析】

【分析】利用平行线的性质及直角三角形两内角互余即可得解；

【详解】 $\because a \parallel b$,

$$\therefore \angle 1 = \angle ABC = 55^\circ,$$

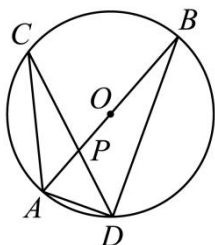
$$\text{又} \because \angle ABC + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 35^\circ$$

故选择：C

【点睛】本题主要考查利用平行线的性质求三角形中角的度数，利用平行线的性质得到 $\angle ABC = 55^\circ$ 是解题的关键.

6. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 AB 与弦 CD 相交于点 P ，连接 AC ， AD ， BD ，若 $\angle C = 20^\circ$ ， $\angle BPC = 70^\circ$ ，则 $\angle ADC =$ ()



- A. 70° B. 60° C. 50° D. 40°

【答案】D

【解析】

【分析】先根据圆周角定理得出 $\angle B = \angle C = 20^\circ$ ，再由三角形外角和定理可知 $\angle BDP = \angle BPC - \angle B = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$ ，再根据直径所对的圆周角是直角，即 $\angle ADB = 90^\circ$ ，然后利用 $\angle ADB = \angle ADC + \angle BDP$ 进而可求出 $\angle ADC$ 。

【详解】解： $\because \angle C = 20^\circ$,

$$\therefore \angle B = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BPC = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle BDP = \angle BPC - \angle B = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ,$$

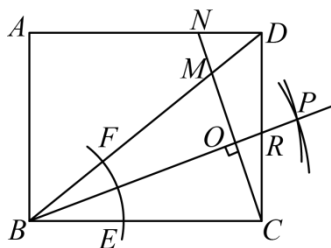
又 $\because AB$ 为直径，即 $\angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB - \angle BDP = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ,$$

故选：D.

【点睛】此题主要考查了圆周角定理，三角形外角和定理等知识，解题关键是熟知圆周角定理的相关知识.

7. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，以点 B 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 BC ， BD 于点 E ， F ，再分别以点 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径画弧交于点 P ，作射线 BP ，过点 C 作 BP 的垂线分别交 BD ， AD 于点 M ， N ，则 CN 的长为（ ）



- A. $\sqrt{10}$ B. $\sqrt{11}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4

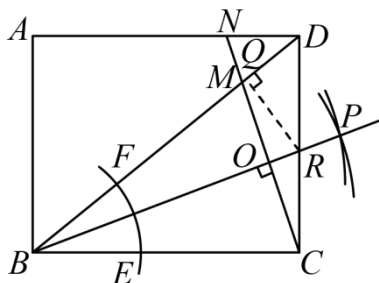
【答案】A

【解析】

【分析】由作图可知 BP 平分 $\angle CBD$ ，设 BP 与 CN 交于点 O ，与 CD 交于点 R ，作 $RQ \perp BD$ 于点 Q ，根

据角平分线的性质可知 $RQ = RC$ ，进而证明 $\text{Rt}\triangle BCR \cong \text{Rt}\triangle BQR$ ，推出 $BC = BQ = 4$ ，设 $RQ = RC = x$ ，则 $DR = CD - CR = 3 - x$ ，解 $\text{Rt}\triangle DQR$ 求出 $QR = CR = \frac{4}{3}$ 。利用三角形面积法求出 OC ，再证 $\triangle OCR \sim \triangle DCN$ ，根据相似三角形对应边成比例即可求出 CN 。

【详解】解：如图，设 BP 与 CN 交于点 O ，与 CD 交于点 R ，作 $RQ \perp BD$ 于点 Q ，



$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$\therefore CD = AB = 3$ ，

$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5$ 。

由作图过程可知， BP 平分 $\angle CBD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore CD \perp BC$ ，

又 $\because RQ \perp BD$ ，

$\therefore RQ = RC$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BCR$ 和 $\text{Rt}\triangle BQR$ 中，

$$\begin{cases} RQ = RC \\ BR = BR \end{cases},$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BCR \cong \text{Rt}\triangle BQR$ (HL)，

$\therefore BC = BQ = 4$ ，

$\therefore QD = BD - BQ = 5 - 4 = 1$ ，

设 $RQ = RC = x$ ，则 $DR = CD - CR = 3 - x$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DQR$ 中，由勾股定理得 $DR^2 = DQ^2 + RQ^2$ ，

即 $(3 - x)^2 = 1^2 + x^2$ ，

$$\text{解得 } x = \frac{4}{3},$$

$$\therefore CR = \frac{4}{3}.$$

$$\therefore BR = \sqrt{BC^2 + CR^2} = \frac{4}{3}\sqrt{10}.$$

$$\therefore S_{\triangle BCR} = \frac{1}{2}CR \cdot BC = \frac{1}{2}BR \cdot OC,$$

$$\therefore OC = \frac{CR \cdot BC}{BR} = \frac{\frac{4}{3} \times 4}{\frac{4}{3}\sqrt{10}} = \frac{2}{5}\sqrt{10}.$$

$$\therefore \angle COR = \angle CDN = 90^\circ, \angle OCR = \angle DCN,$$

$$\therefore \triangle OCR \sim \triangle DCN,$$

$$\therefore \frac{OC}{DC} = \frac{CR}{CN}, \text{ 即 } \frac{\frac{2}{5}\sqrt{10}}{3} = \frac{\frac{4}{3}}{CN},$$

$$\text{解得 } CN = \sqrt{10}.$$

故选 A.

【点睛】 本题考查角平分线的作图方法，矩形的性质，角平分线的性质，全等三角形的判定与性质，勾股定理，相似三角形的判定与性质等，涉及知识点较多，有一定难度，解题的关键是根据作图过程判断出 BP 平分 $\angle CBD$ ，通过勾股定理解直角三角形求出 CR 。

8. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 的图象与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，下列论中：① $a - b + c = 0$ ；②若点 $(-3, y_1), (2, y_2), (4, y_3)$ 均在该二次函数图象上，则 $y_1 < y_2 < y_3$ ；③若 m 为任意实数，则 $am^2 + bm + c \leq -4a$ ；④方程 $ax^2 + bx + c + 1 = 0$ 的两实数根为 x_1, x_2 ，且 $x_1 < x_2$ ，则 $x_1 < -1, x_2 > 3$ 。正确结论的序号为 ()

A. ①②③

B. ①③④

C. ②③④

D. ①④

【答案】 B

【解析】

【分析】 将 $(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，可判断①；根据抛物线的对称轴及增减性可判断②；根据抛物线的顶点坐标可判断③；根据 $y = ax^2 + bx + c + 1$ 的图象与 x 轴的交点的位置可判断④。

【详解】 解：将 $(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，可得 $a - b + c = 0$ ，

故①正确；

∵ 二次函数图象的对称轴为直线 $x = 1$,

∴ 点 $(-3, y_1), (2, y_2), (4, y_3)$ 到对称轴的距离分别为: 4, 1, 3,

∵ $a < 0$,

∴ 图象开口向下, 离对称轴越远, 函数值越小,

∴ $y_1 < y_3 < y_2$,

故②错误;

∵ 二次函数图象的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$,

∴ $b = -2a$,

又 ∵ $a - b + c = 0$,

∴ $a + 2a + c = 0$,

∴ $c = -3a$,

∴ 当 $x = 1$ 时, y 取最大值, 最大值为 $y = a + b + c = a - 2a - 3a = -4a$,

即二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 的图象的顶点坐标为 $(1, -4a)$,

∴ 若 m 为任意实数, 则 $am^2 + bm + c \leq -4a$

故③正确;

∵ 二次函数图象的对称轴为直线 $x = 1$, 与 x 轴的一个交点坐标为 $(-1, 0)$,

∴ 与 x 轴的另一个交点坐标为 $(3, 0)$,

∵ $y = ax^2 + bx + c (a < 0)$ 的图象向上平移一个单位长度, 即为 $y = ax^2 + bx + c + 1$ 的图象,

∴ $y = ax^2 + bx + c + 1$ 的图象与 x 轴的两个交点一个在 $(-1, 0)$ 的左侧, 另一个在 $(3, 0)$ 的右侧,

∴ 若方程 $ax^2 + bx + c + 1 = 0$ 的两实数根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $x_1 < -1, x_2 > 3$,

故④正确;

综上所述, 正确的有①③④,

故选 B.

【点睛】 本题考查根据二次函数图象判断式子符号, 二次函数的图象与性质, 解题的关键是掌握二次函数与一元二次方程的关系, 熟练运用数形结合思想.

二、细心填一填 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分. 请把答案填在答题卡相应题号的横线)

9. 计算： $(-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】2

【解析】

【分析】-1的偶数次方为1，任何不等于0的数的零次幂都等于1，由此可解.

【详解】解： $(-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 + 1 = 2$,

故答案为：2.

【点睛】本题考查有理数的乘方、零次幂，解题的关键是掌握：-1的偶数次方为1，奇数次方为-1；任何不等于0的数的零次幂都等于1.

10. 请写出一个正整数 m 的值使得 $\sqrt{8m}$ 是整数； $m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】8

【解析】

【分析】要使 $\sqrt{8m}$ 是整数，则 $8m$ 要是完全平方数，据此求解即可

【详解】解： $\because \sqrt{8m}$ 是整数，

$\therefore 8m$ 要是完全平方数，

$\therefore$ 正整数 m 的值可以为8，即 $8m = 64$ ，即 $\sqrt{8m} = \sqrt{64} = 8$ ，

故答案为：8（答案不唯一）.

【点睛】本题主要考查了二次根式的化简，正确理解题意得到 $8m$ 要是完全平方数是解题的关键.

11. 若正 n 边形的一个外角为 72° ，则 $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】5

【解析】

【分析】正多边形的外角和为 360° ，每一个外角都相等，由此计算即可.

【详解】解：由题意知， $n = \frac{360}{72} = 5$ ，

故答案为：5.

【点睛】本题考查正多边形的外角问题，解题的关键是掌握正 n 边形的外角和为 360° ，每一个外角的度数均为 $\frac{360^\circ}{n}$.

12. 已知一元二次方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ，若 $x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 1$ ，则实数

$k =$ _____.

【答案】 -5

【解析】

【分析】 根据一元二次方程的根与系数的关系，得出 $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = k$ ，代入已知等式，即可求解.

【详解】 解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 - 3x + k = 0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = k$$

$$\therefore x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 = 1,$$

$$\therefore k + 6 = 1,$$

$$\text{解得: } k = -5,$$

故答案为: -5 .

【点睛】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系，熟练掌握一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

13. 眼睛是心灵的窗户为保护学生视力，启航中学每学期给学生检查视力，下表是该校某班 39 名学生右眼视力的检查结果，这组视力数据中，中位数是_____.

视力	4.0	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
人数	1	2	6	3	3	4	1	2	5	7	5

【答案】 4.6

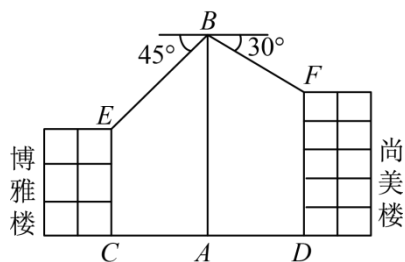
【解析】

【分析】 数据按从小到大排列，若数据是偶数个，中位数是最中间两数的平均数，若数据是奇数个，中位数是正中间的数.

【详解】 解：该样本中共有 39 个数据，按照右眼视力从小到大的顺序排列，第 20 个数据是 4.6，所以学生右眼视力的中位数为 4.6.

【点睛】 本题主要考查了学生对中位数的理解，解题关键是如何找中位数，注意找中位数的时候一定要先排好顺序，然后根据奇数和偶数个来确定中位数，如果数据有奇数个，则正中间的数字即为所求，如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

14. 综合实践课上，航模小组用航拍无人机进行测高实践. 如图，无人机从地面 CD 的中点 A 处竖直上升 30 米到达 B 处，测得博雅楼顶部 E 的俯角为 45° ，尚美楼顶部 F 的俯角为 30° ，已知博雅楼高度 CE 为 15 米，则尚美楼高度 DF 为_____米. (结果保留根号)

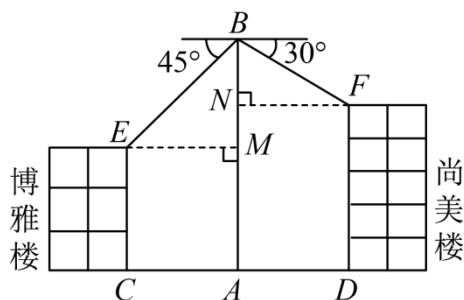


【答案】 $30 - 5\sqrt{3}$ 或 $-5\sqrt{3} + 30$

【解析】

【分析】过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M ，过点 F 作 $FN \perp AB$ 于点 N ，首先证明出四边形 $ECAM$ 是矩形，得到 $AM = CE = 15$ ，然后根据等腰直角三角形的性质得到 $AC = EM = BM = 15$ ，进而得到 $AD = AC = 15$ ，然后利用 30° 角直角三角形的性质和勾股定理求出 $BN = 5\sqrt{3}$ ，即可求解。

【详解】如图所示，过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M ，过点 F 作 $FN \perp AB$ 于点 N ，



由题意可得，四边形 $ECAM$ 是矩形，

$$\therefore AM = CE = 15,$$

$$\because AB = 30,$$

$$\therefore BM = AB - AM = 15,$$

$\because$ 博雅楼顶部 E 的俯角为 45° ，

$$\therefore \angle EBM = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BEM = 45^\circ,$$

$$\therefore AC = EM = BM = 15,$$

$\because$ 点 A 是 CD 的中点，

$$\therefore AD = AC = 15,$$

由题意可得四边形 $AMFN$ 是矩形，

$$\therefore NF = AD = 15,$$

$\because$ 尚美楼顶部 F 的俯角为 30° ，

$$\therefore \angle NBF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BFN = 30^\circ,$$

$$\therefore BF = 2BN,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BNF \text{ 中, } BN^2 + NF^2 = BF^2,$$

$$\therefore BN^2 + 15^2 = (2BN)^2,$$

$$\therefore \text{解得 } BN = 5\sqrt{3},$$

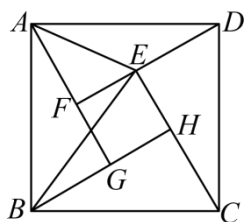
$$\therefore FD = AN = AB - BN = 30 - 5\sqrt{3}.$$

故答案为: $30 - 5\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用-仰角俯角问题，锐角三角函数，勾股定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，学会用构建方程的思想思考问题.

15. 如图，是我国汉代的赵爽在注解《周髀算经》时给出的，人们称它为“赵爽弦图”，它是由四个全等的直角三角形和一个小正方形组成的一个大正方形. 设图中 $AF = a$ ， $DF = b$ ，连接 AE, BE ，若 $\triangle ADE$ 与

$$\triangle BEH \text{ 的面积相等, 则 } \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$$



【答案】3

【解析】

【分析】根据题意得出 $a^2 = b^2 - ab$ ，即 $\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0$ ，解方程得出 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ （负值舍去）代入进行计算即可求解.

【详解】解：∵图中 $AF = a$ ， $DF = b$ ，

$$\therefore ED = AF = a, EH = EF = DF - DE = b - a$$

∵ $\triangle ADE$ 与 $\triangle BEH$ 的面积相等，

$$\therefore \frac{1}{2} DE \times AF = \frac{1}{2} EH \times BH$$

$$\therefore \frac{1}{2} a \times a = \frac{1}{2} (b - a) \times b$$

$$\therefore a^2 = b^2 - ab$$

$$\therefore 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b}{a}$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} - 1 = 0$$

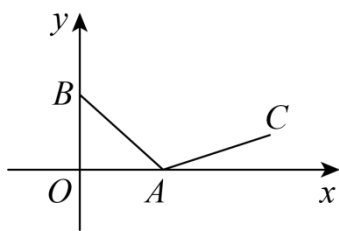
$$\text{解得: } \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (\text{负值舍去})$$

$$\therefore \frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^2 = 3,$$

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，弦图的计算，根据题意列出关于 $\frac{b}{a}$ 的方程是解题的关键.

16. 如图，已知点 $A(3,0)$ ，点 B 在 y 轴正半轴上，将线段 AB 绕点 A 顺时针旋转 120° 到线段 AC ，若点 C 的坐标为 $(7, h)$ ，则 $h =$ _____.



【答案】 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

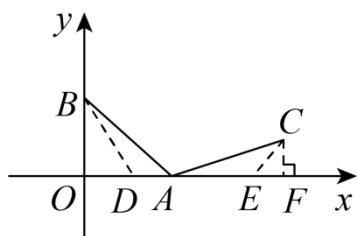
【解析】

【分析】 在 x 轴上取点 D 和点 E ，使得 $\angle ADB = \angle AEC = 120^\circ$ ，过点 C 作 $CF \perp x$ 于点 F ，在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中，解直角三角形可得 $EF = \frac{\sqrt{3}}{3}h$ ， $CE = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$ ，再证明 $\triangle CAE \cong \triangle ABD$ (AAS)，则 $AD = CE = \frac{2\sqrt{3}}{3}h$ ，

$AE = BD$ ，求得 $OD = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}h$ ，在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中，得 $BD = 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}h$ ， $AE = BD = 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}h$ ，得到

$3 + 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}h + \frac{\sqrt{3}}{3}h = 7$ ，解方程即可求得答案.

【详解】 解：在 x 轴上取点 D 和点 E ，使得 $\angle ADB = \angle AEC = 120^\circ$ ，过点 C 作 $CF \perp x$ 于点 F ，



$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(7, h)$,

$\therefore OF = 7, CF = h$,

在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中, $\angle CEF = 180^\circ - \angle AEC = 60^\circ, CF = h$,

$$\therefore EF = \frac{CF}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}h, \quad CE = \frac{CF}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}h,$$

$\therefore \angle BAC = 120^\circ$,

$\therefore \angle BAD + \angle CAE = \angle BAD + \angle ABD = 120^\circ$,

$\therefore \angle CAE = \angle ABD$,

$\therefore AB = CA$,

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle ABD (\text{AAS})$,

$$\therefore AD = CE = \frac{2\sqrt{3}}{3}h, \quad AE = BD,$$

$\therefore$ 点 $A(3, 0)$,

$\therefore OA = 3$,

$$\therefore OD = OA - AD = 3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}h,$$

在 $\text{Rt}\triangle BOD$ 中, $\angle BDO = 180^\circ - \angle ADB = 60^\circ$,

$$\therefore BD = \frac{OD}{\cos \angle BDO} = \frac{OD}{\cos 60^\circ} = 2 \left(3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}h \right) = 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}h,$$

$$\therefore AE = BD = 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}h,$$

$\therefore OA + AE + EF = OF$,

$$\therefore 3 + 6 - \frac{4\sqrt{3}}{3}h + \frac{\sqrt{3}}{3}h = 7,$$

$$\text{解得 } h = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

【点睛】此题考查了全等三角形的判定和性质、解直角三角形、旋转的性质等知识，构造三角形全等是解题的关键.

三、专心解一解（本大题共 8 小题，满分 72 分. 请认真读题，冷静思考解答题应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把解题过程写在答题卡相应题号的位置）

$$17. \text{ 化简: } \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{2x}{x-1}.$$

【答案】 $x-1$

【解析】

【分析】先计算同分母分式的减法，再利用完全平方公式约分化简.

$$\text{【详解】解: } \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{2x}{x-1}$$

$$= \frac{x^2-2x+1}{x-1}$$

$$= \frac{(x-1)^2}{x-1}$$

$$= x-1$$

【点睛】本题考查分式的约分化简，解题的关键是掌握分式的运算法则.

18. 创建文明城市，构建美好家园. 为提高垃圾分类意识，幸福社区决定采购 A , B 两种型号的新型垃圾桶. 若购买 3 个 A 型垃圾桶和 4 个 B 型垃圾桶共需要 580 元，购买 6 个 A 型垃圾桶和 5 个 B 型垃圾桶共需要 860 元.

(1) 求两种型号垃圾桶的单价；

(2) 若需购买 A , B 两种型号的垃圾桶共 200 个，总费用不超过 15000 元，至少需购买 A 型垃圾桶多少个？

【答案】 (1) A , B 两种型号的单价分别为 60 元和 100 元

(2) 至少需购买 A 型垃圾桶 125 个

【解析】

【分析】(1) 设两种型号的单价分别为 x 元和 y 元，然后根据题意列出二元一次方程组求解即可；

(2) 设购买 A 型垃圾桶 a 个，则购买 B 型垃圾桶 $(200-a)$ 个，根据题意列出一元一次不等式并求解即可.

【小问 1 详解】

解：设 A , B 两种型号的单价分别为 x 元和 y 元,

$$\text{由题意: } \begin{cases} 3x + 4y = 580 \\ 6x + 5y = 860 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = 60 \\ y = 100 \end{cases},$$

$\therefore A, B$ 两种型号的单价分别为 60 元和 100 元;

【小问 2 详解】

设购买 A 型垃圾桶 a 个，则购买 B 型垃圾桶 $(200-a)$ 个，

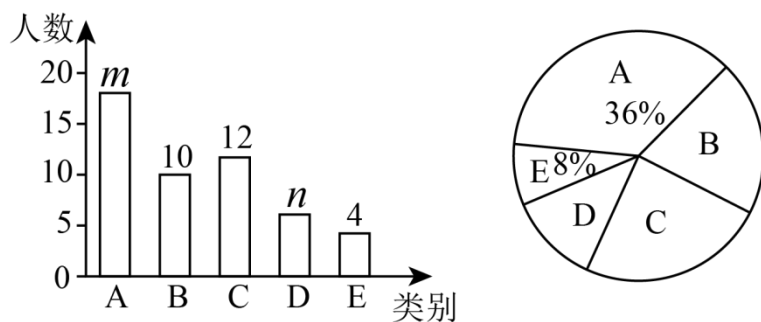
$$\text{由题意: } 60a + 100(200-a) \leq 15000,$$

$$\text{解得: } a \geq 125,$$

$\therefore$ 至少需购买 A 型垃圾桶 125 个.

【点睛】 本题考查二元一次方程组 and 一元一次不等式的实际应用，理解题意，找准数量关系，准确建立相应方程和不等式并求解是解题关键.

19. 打造书香文化，培养阅读习惯，崇德中学计划在各班建图书角，开展“我最喜欢阅读的书篇”为主题的调查活动，学生根据自己的爱好选择一类书籍（A：科技类，B：文学类，C：政史类，D：艺术类，E：其他类）. 张老师组织数学兴趣小组对学校部分学生进行了问卷调查，根据收集到的数据，绘制了两幅不完整的统计图（如图所示）.



根据图中信息，请回答下列问题；

- (1) 条形图中的 $m =$ _____, $n =$ _____, 文学类书籍对应扇形圆心角等于 _____ 度;
- (2) 若该校有 2000 名学生，请你估计最喜欢阅读政史类书籍的学生人数;
- (3) 甲同学从 A, B, C 三类书籍中随机选择一种，乙同学从 B, C, D 三类书籍中随机选择一种，请用画树状图或者列表法求甲乙两位同学选择相同类别书籍的概率.

【答案】(1) 18, 6, 72°

(2) 480 人 (3) $\frac{2}{9}$

【解析】

【分析】(1) 根据选择“E：其他类”的人数及比例求出总人数，总人数乘以 A 占的比例即为 m ，总人数减去 A, B, C, E 的人数即为 n ，360 度乘以 B 占的比例即为文学类书籍对应扇形圆心角；

(2) 利用样本估计总体思想求解；

(3) 通过列表或画树状图列出所有等可能的情况，再从中找出符合条件的情况数，再利用概率公式计算.

【小问 1 详解】

解：参与调查的总人数为： $4 \div 8\% = 50$ (人)，

$$m = 50 \times 36\% = 18,$$

$$n = 50 - 18 - 10 - 12 - 4 = 6,$$

$$\text{文学类书籍对应扇形圆心角} = \frac{10}{50} \times 360^\circ = 72^\circ,$$

故答案为：18, 6, 72° ；

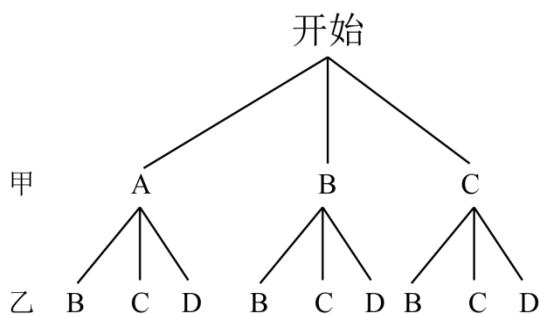
【小问 2 详解】

$$\text{解：} 2000 \times \frac{12}{50} = 480 \text{ (人),}$$

因此估计最喜欢阅读政史类书籍的学生人数为 480 人；

【小问 3 详解】

解：画树状图如下：

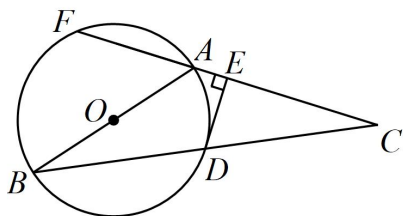


由图可知，共有 9 种等可能的情况，其中甲乙两位同学选择相同类别书籍的情况有 2 种，

因此甲乙两位同学选择相同类别书籍的概率为： $\frac{2}{9}$.

【点睛】 本题考查条形统计图、扇形统计图、利用样本估计总体、利用画树状图或者列表法求概率等，解题的关键是将条形统计图与扇形统计图的信息进行关联，掌握画树状图或者列表法求概率的原理.

20. 如图， $\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ， DE 是 $\odot O$ 的切线，且 $DE \perp AC$ ，垂足为 E ，延长 CA 交 $\odot O$ 于点 F .



(1) 求证: $AB = AC$;

(2) 若 $AE = 3, DE = 6$, 求 AF 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $AF = 9$

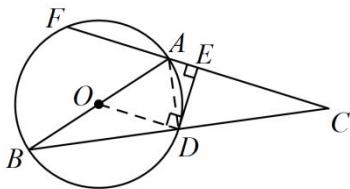
【解析】

【分析】(1) 连接 AD , 根据已知可得 $OD \parallel AC$, 则 $\angle C = \angle ODB$, 又 $\angle B = \angle ODB$, 等量代换得出 $\angle C = \angle B$, 即可证明 $AB = AC$;

(2) 连接 BF , 证明 $\angle ADE = \angle C$, 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\tan \angle ADE = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{2} = \tan \angle C = \frac{DE}{EC}$, 求得 $EC = 2DE = 12$, 根据 $DE \parallel BF$ 得出 $EF = EC = 12$, 进而可得 $BF = \frac{1}{2}FC = 12$, 根据 $AF = EF - AE$, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: 如图所示, 连接 AD ,



$\because$ 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D , DE 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OD \perp DE$,

$\because DE \perp AC$,

$\therefore OD \parallel AC$,

$\therefore \angle C = \angle ODB$,

又 $OB = OD$,

$\therefore \angle B = \angle ODB$,

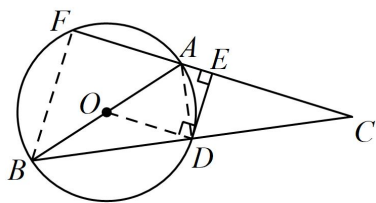
$\therefore \angle C = \angle B$,

$\therefore AB = AC$;

【小问 2 详解】

解: 连接 BF, AD , 如图,

则 $AD \perp BC$, $BD = CD$,



$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADE = \angle DAC + \angle C,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle C,$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AE = 3, DE = 6$,

$$\therefore \tan \angle ADE = \frac{AE}{ED} = \frac{1}{2} = \tan \angle C = \frac{DE}{EC},$$

$$\therefore EC = 2DE = 12,$$

又 $\because AB$ 是直径,

$$\therefore BF \perp CF,$$

$$\therefore DE \parallel BF \text{ ,}$$

$$\therefore \frac{EC}{EF} = \frac{CD}{DB},$$

$$\therefore EF = EC = 12,$$

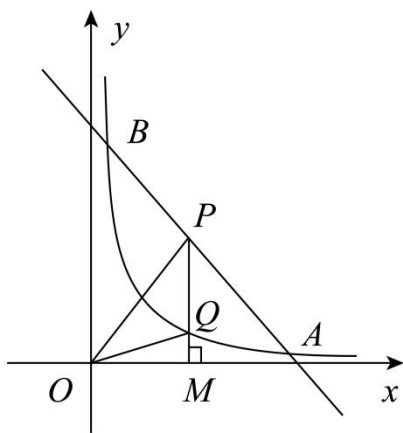
$$\therefore \tan C = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BF = \frac{1}{2}FC = 12,$$

$$\therefore AF = EF - AE = 12 - 3 = 9.$$

【点睛】本题考查了切线的性质，直径所对的圆周角是直角，平行线分线段成比例，正切的定义，熟练掌握以上知识是解题的关键.

21. 如图, 一次函数 $y_1 = kx + b (k \neq 0)$ 与函数为 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 的图象交于 $A(4, 1), B\left(\frac{1}{2}, a\right)$ 两点.



- (1) 求这两个函数的解析式;
- (2) 根据图象, 直接写出满足 $y_1 - y_2 > 0$ 时 x 的取值范围;
- (3) 点 P 在线段 AB 上, 过点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 M , 交函数 y_2 的图象于点 Q , 若 $\triangle POQ$ 面积为 3, 求点 P 的坐标.

【答案】 (1) $y_1 = -2x + 9$, $y_2 = \frac{4}{x} (x > 0)$

(2) $\frac{1}{2} < x < 4$

(3) 点 P 的坐标为 $(2, 5)$ 或 $(\frac{5}{2}, 4)$

【解析】

【分析】 (1) 将 $A(4, 1)$ 代入 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$ 可求反比例函数解析式, 进而求出点 B 坐标, 再将 $A(4, 1)$ 和点 B 坐标代入 $y_1 = kx + b (k \neq 0)$ 即可求出一次函数解析式;

(2) 直线 AB 在反比例函数图象上方部分对应的 x 的值即为所求;

(3) 设点 P 的横坐标为 p , 代入一次函数解析式求出纵坐标, 将 $x = p$ 代入反比例函数求出点 Q 的纵坐标, 进而用含 p 的代数式表示出 PQ , 再根据 $\triangle POQ$ 面积为 3 列方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 将 $A(4, 1)$ 代入 $y_2 = \frac{m}{x} (x > 0)$, 可得 $1 = \frac{m}{4}$,

解得 $m = 4$,

$\therefore$ 反比例函数解析式为 $y_2 = \frac{4}{x} (x > 0)$;

$\therefore B(\frac{1}{2}, 8)$ 在 $y_2 = \frac{4}{x} (x > 0)$ 图象上,

$$\therefore a = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8,$$

$$\therefore B\left(\frac{1}{2}, 8\right),$$

将 $A(4, 1)$, $B\left(\frac{1}{2}, 8\right)$ 代入 $y_1 = kx + b$, 得:

$$\begin{cases} 4k + b = 1 \\ \frac{1}{2}k + b = 8 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 9 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y_1 = -2x + 9$;

【小问 2 详解】

解: $\frac{1}{2} < x < 4$, 理由如下:

由 (1) 可知 $A(4, 1), B\left(\frac{1}{2}, 8\right)$,

当 $y_1 - y_2 > 0$ 时, $y_1 > y_2$,

此时直线 AB 在反比例函数图象上方, 此部分对应的 x 的取值范围为 $\frac{1}{2} < x < 4$,

即满足 $y_1 - y_2 > 0$ 时, x 的取值范围为 $\frac{1}{2} < x < 4$;

【小问 3 详解】

解: 设点 P 的横坐标为 p ,

将 $x = p$ 代入 $y_1 = -2x + 9$, 可得 $y_1 = -2p + 9$,

$$\therefore P(p, -2p + 9).$$

将 $x = p$ 代入 $y_2 = \frac{4}{x} (x > 0)$, 可得 $y_2 = \frac{4}{p}$,

$$\therefore Q\left(p, \frac{4}{p}\right).$$

$$\therefore PQ = -2p + 9 - \frac{4}{p},$$

$$\therefore S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} PQ \cdot x_p = \frac{1}{2} \times \left(-2p + 9 - \frac{4}{p} \right) \cdot p = 3,$$

$$\text{整理得 } 2p^2 - 9p + 10 = 0,$$

$$\text{解得 } p_1 = 2, \quad p_2 = \frac{5}{2},$$

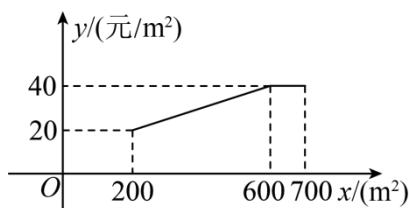
$$\text{当 } p = 2 \text{ 时, } -2p + 9 = -2 \times 2 + 9 = 5,$$

$$\text{当 } p = \frac{5}{2} \text{ 时, } -2p + 9 = -2 \times \frac{5}{2} + 9 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2, 5) \text{ 或 } \left(\frac{5}{2}, 4 \right).$$

【点睛】本题属于一次函数与反比例函数的综合题，考查求一次函数解析式、反比例函数解析式，坐标系中求三角形面积、解一元二次方程等知识点，解题的关键是熟练运用数形结合思想.

22. 加强劳动教育，落实五育并举. 孝礼中学在当地政府的支持下，建成了一处劳动实践基地. 2023 年计划将其中 1000m^2 的土地全部种植甲乙两种蔬菜. 经调查发现：甲种蔬菜种植成本 y （单位：元/ m^2 ）与其种植面积 x （单位： m^2 ）的函数关系如图所示，其中 $200 \leq x \leq 700$ ；乙种蔬菜的种植成本为 50 元/ m^2 .



- (1) 当 $x = \underline{\hspace{2cm}} \text{m}^2$ 时， $y = 35$ 元/ m^2 ；
- (2) 设 2023 年甲乙两种蔬菜总种植成本为 W 元，如何分配两种蔬菜的种植面积，使 W 最小？
- (3) 学校计划今后每年在这 1000m^2 土地上，均按 (2) 中方案种植蔬菜，因技术改进，预计种植成本逐年下降，若甲种蔬菜种植成本平均每年下降 10%，乙种蔬菜种植成本平均每年下降 $a\%$ ，当 a 为何值时，2025 年的总种植成本为 28920 元？

【答案】(1) 500

(2) 当甲种蔬菜的种植面积为 400m^2 ，乙种蔬菜的种植面积为 600m^2 时， W 最小；

(3) 当 a 为 20 时，2025 年的总种植成本为 28920 元.

【解析】

【分析】(1) 求出当 $200 \leq x \leq 600$ 时，设甲种蔬菜种植成本 y （单位：元/ m^2 ）与其种植面积 x （单位： m^2 ）

的函数关系式为 $y = \frac{1}{20}x + 10$ ，当 $600 < x \leq 700$ 时， $y = 40$ ，求出当 $y = 35$ 时的 x 的值即可；

(2) 当 $200 \leq x \leq 600$ 时， $W = \frac{1}{20}(x-400)^2 + 42000$ ，由二次函数性质得到当 $x = 400$ 时， W 有最小值，最小值为 42000，当 $600 < x \leq 700$ 时 $W = -10x + 50000$ ，由一次函数性质得到当 $x = 700$ 时， W 有最小值，最小值为 $W = -10 \times 700 + 50000 = 43000$ ，比较后即可得到方案；

(3) 根据 2025 年的总种植成本为 28920 元列出一元二次方程，解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：当 $200 \leq x \leq 600$ 时，设甲种蔬菜种植成本 y （单位：元/ m^2 ）与其种植面积 x （单位： m^2 ）的函数关系式为 $y = kx + b$ ，把点 $(200, 20)$, $(600, 40)$ 代入得，

$$\begin{cases} 200k + b = 20 \\ 600k + b = 40 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{20}, \\ b = 10 \end{cases},$$

$$\therefore \text{当 } 200 \leq x \leq 600 \text{ 时, } y = \frac{1}{20}x + 10,$$

$$\text{当 } 600 < x \leq 700 \text{ 时, } y = 40,$$

$$\therefore \text{当 } y = 35 \text{ 时, } 35 = \frac{1}{20}x + 10, \text{ 解得 } x = 500,$$

$$\text{即当 } x = 500\text{m}^2 \text{ 时, } y = 35 \text{ 元}/\text{m}^2;$$

故答案为：500；

【小问 2 详解】

解：当 $200 \leq x \leq 600$ 时，

$$W = x\left(\frac{1}{20}x + 10\right) + 50(1000 - x) = \frac{1}{20}x^2 - 40x + 50000 = \frac{1}{20}(x - 400)^2 + 42000,$$

$$\because \frac{1}{20} > 0,$$

$\therefore$ 抛物线开口向上，

$\therefore$ 当 $x = 400$ 时， W 有最小值，最小值为 42000，

$$\text{当 } 600 < x \leq 700 \text{ 时, } W = 40x + 50(1000 - x) = -10x + 50000,$$

$$\because -10 < 0,$$

$\therefore W$ 随着 x 的增大而减小，

∴当 $x = 700$ 时, W 有最小值, 最小值为 $W = -10 \times 700 + 50000 = 43000$,

综上所述, 当甲种蔬菜的种植面积为 400m^2 , 乙种蔬菜的种植面积为 600m^2 时, W 最小;

【小问3详解】

由题意可得 $400 \left(\frac{1}{20} \times 400 + 10 \right) \times (1 - 10\%)^2 + 600 \times 50 (1 - a\%)^2 = 28920$,

解得 $a_1 = 20, a_2 = 180$ (不合题意, 舍去),

∴当 a 为 20 时, 2025 年的总种植成本为 28920 元.

【点睛】此题考查了二次函数的应用、一元二次方程的应用、一次函数的应用等知识, 读懂题意, 正确列出函数解析式和方程是解题的关键.

23. 【问题呈现】

$\triangle CAB$ 和 $\triangle CDE$ 都是直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ, CB = mCA, CE = mCD$, 连接 AD, BE , 探究 AD, BE 的位置关系.

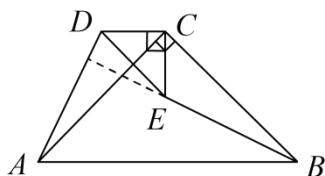


图1

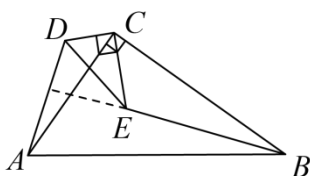
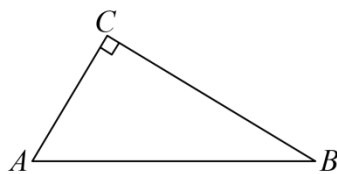


图2



备用图

- (1) 如图 1, 当 $m = 1$ 时, 直接写出 AD, BE 的位置关系: _____;
- (2) 如图 2, 当 $m \neq 1$ 时, (1) 中的结论是否成立? 若成立, 给出证明; 若不成立, 说明理由.

【拓展应用】

(3) 当 $m = \sqrt{3}, AB = 4\sqrt{7}, DE = 4$ 时, 将 $\triangle CDE$ 绕点 C 旋转, 使 A, D, E 三点恰好在同一直线上, 求 BE 的长.

【答案】(1) $BE \perp AD$

(2) 成立; 理由见解析

(3) $BE = 6\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据 $m = 1$, 得出 $AC = BC, DC = EC$, 证明 $\triangle DCA \cong \triangle ECB$, 得出 $\angle DAC = \angle CBE$, 根据 $\angle GAB + \angle ABG = \angle DAC + \angle CAB + \angle ABG$, 求出 $\angle GAB + \angle ABG = 90^\circ$, 即可证明结论;

(2) 证明 $\triangle DCA \sim \triangle ECB$, 得出 $\angle DAC = \angle CBE$, 根据 $\angle GAB + \angle ABG = \angle DAC + \angle CAB + \angle ABG$, 求出 $\angle GAB + \angle ABG = 90^\circ$, 即可证明结论;

(3) 分两种情况，当点 E 在线段 AD 上时，当点 D 在线段 AE 上时，分别画出图形，根据勾股定理求出结果即可。

【小问 1 详解】

解： $\because m = 1$,

$$\therefore AC = BC, \quad DC = EC,$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA + \angle ACE = \angle ACE + \angle ECB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle ECB,$$

$$\therefore \triangle DCA \cong \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle GAB + \angle ABG = \angle DAC + \angle CAB + \angle ABG,$$

$$= \angle CBE + \angle CAB + \angle ABG$$

$$= \angle CAB + \angle CBA$$

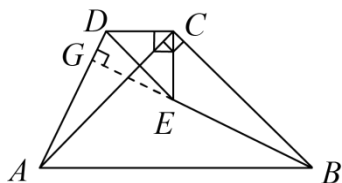
$$= 180^\circ - \angle ACB$$

$$= 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp AD;$$

故答案为： $BE \perp AD$.



【小问 2 详解】

解：成立；理由如下：

$$\therefore \angle DCE = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA + \angle ACE = \angle ACE + \angle ECB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle ECB,$$

$$\therefore \frac{DC}{CE} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{m},$$

$$\therefore \triangle DCA \sim \triangle ECB,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle GAB + \angle ABG = \angle DAC + \angle CAB + \angle ABG,$$

$$= \angle CBE + \angle CAB + \angle ABG$$

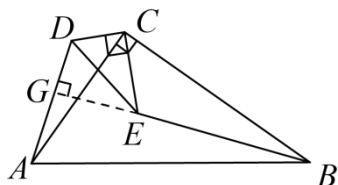
$$= \angle CAB + \angle CBA$$

$$= 180^\circ - \angle ACB$$

$$= 90^\circ,$$

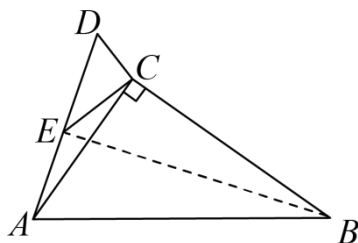
$$\therefore \angle AGB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \perp AD;$$



【小问 3 详解】

解：当点 E 在线段 AD 上时，连接 BE ，如图所示：



设 $AE = x$ ，则 $AD = AE + DE = x + 4$ ，

根据解析 (2) 可知， $\triangle DCA \sim \triangle ECB$ ，

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = m = \sqrt{3},$$

$$\therefore BE = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}(x + 4) = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3},$$

根据解析 (2) 可知， $BE \perp AD$ ，

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

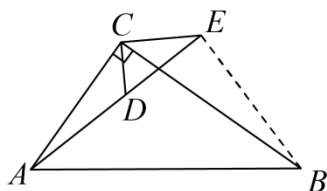
根据勾股定理得： $AE^2 + BE^2 = AB^2$ ，

$$\text{即 } x^2 + (\sqrt{3}x + 4\sqrt{3})^2 = (4\sqrt{7})^2,$$

解得： $x = 2$ 或 $x = -8$ (舍去)，

$$\therefore \text{此时 } BE = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3};$$

当点 D 在线段 AE 上时，连接 BE ，如图所示：



设 $AD = y$ ，则 $AE = AD + DE = y + 4$ ，

根据解析 (2) 可知, $\triangle DCA \sim \triangle ECB$,

$$\therefore \frac{BE}{AD} = \frac{BC}{AC} = m = \sqrt{3},$$

$$\therefore BE = \sqrt{3}AD = \sqrt{3}y,$$

根据解析 (2) 可知, $BE \perp AD$,

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

根据勾股定理得: $AE^2 + BE^2 = AB^2$,

$$\text{即 } (y+4)^2 + (\sqrt{3}y)^2 = (4\sqrt{7})^2,$$

解得: $y = 4$ 或 $y = -6$ (舍去),

$$\therefore \text{此时 } BE = \sqrt{3}y = 4\sqrt{3};$$

综上所述可知, $BE = 6\sqrt{3}$ 或 $4\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查了全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 三角形内角和定理的应用, 勾股定理, 解题的关键是熟练掌握三角形相似的判定方法, 画出相应的图形, 注意分类讨论.

24. 已知抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A, B(4, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 点 P 为第一象限抛物线上的点, 连接 CA, CB, PB, PC .

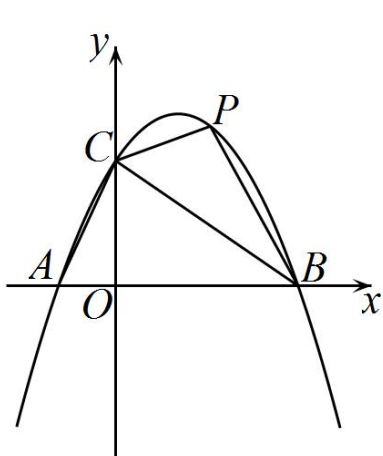


图1

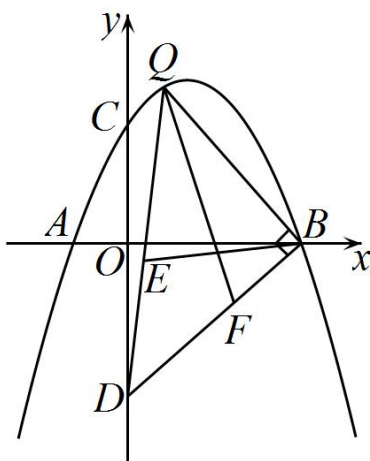
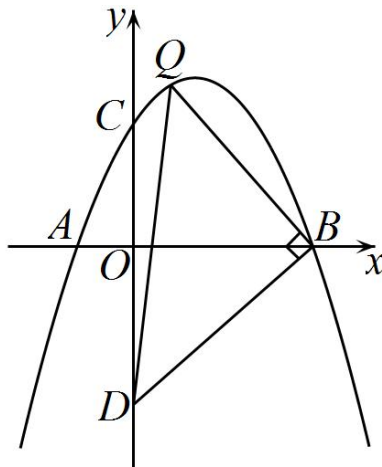


图2



备用图

(1) 直接写出结果; $b = \underline{\hspace{1cm}}$, $c = \underline{\hspace{1cm}}$, 点 A 的坐标为 $\underline{\hspace{1cm}}$, $\tan \angle ABC = \underline{\hspace{1cm}}$;

(2) 如图 1, 当 $\angle PCB = 2\angle OCA$ 时, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, 点 D 在 y 轴负半轴上, $OD = OB$, 点 Q 为抛物线上一点, $\angle QBD = 90^\circ$, 点 E, F 分别为 $\triangle BDQ$

的边 DQ, DB 上的动点, $QE = DF$, 记 $BE + QF$ 的最小值为 m .

①求 m 的值;

②设 $\triangle PCB$ 的面积为 S ，若 $S = \frac{1}{4}m^2 - k$ ，请直接写出 k 的取值范围.

【答案】(1) $\frac{3}{2}$, 2, $(-1, 0)$, $\frac{1}{2}$

(2) $(2, 3)$

(3) $m = 2\sqrt{17}$, $13 \leq k \leq 17$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求二次函数解析式即可求得 $b = \frac{3}{2}$ 、 $c = 2$ ，从而可得 $OB = 4$ ， $OC = 2$ ，由 $y = 0$ ，可得 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$ ，求得 $A(-1, 0)$ ，在 $Rt\triangle COB$ 中，根据正切的定义求值即可；

(2) 过点 C 作 $CD \parallel x$ 轴，交 BP 于点 D ，过点 P 作 $PE \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 E ，由 $\tan \angle OCA = \tan \angle ABC = \frac{1}{2}$ ，即 $\angle OCA = \angle ABC$ ，再由 $\angle PCB = 2\angle ABC$ ，可得 $\angle EPC = \angle ABC$ ，证明 $\triangle PEC \sim \triangle BOC$ ，可得 $\frac{EP}{OB} = \frac{EC}{OC}$ ，设点 P 坐标为 $\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2\right)$ ，可得 $\frac{t}{4} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t}{2}$ ，再进行求解即可；

(3) ①作 $DH \perp DQ$ ，且使 $DH = BQ$ ，连接 FH ．根据SAS证明 $\triangle BQE \cong \triangle HDF$ ，可得 $BE + QF = FH + QF \geq QH$ ，即 Q, F, H 共线时， $BE + QF$ 的值最小．作 $QG \perp AB$ 于点 G ，设 $G(n, 0)$ ，则 $Q\left(n, -\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2\right)$ ，根据 $QG = BG$ 求出点 Q 的坐标，燃然后利用勾股定理求解即可；

②作 $PT \parallel y$ 轴，交 BC 于点 T ，求出 BC 解析式，设 $T\left(a, -\frac{1}{2}a + 2\right)$ ， $P\left(a, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2\right)$ ，利用三角形面积公式表示出 S ，利用二次函数的性质求出 S 的取值范围，结合①中结论即可求解．

【小问1详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过点 $B(4, 0)$ ， $C(0, 2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} -8 + 4b + c = 0 \\ c = 2 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ c = 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为： $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ ，

$\because$ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 $B(4, 0)$ 两点，

$$\therefore y=0 \text{ 时, } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0, \text{ 解得: } x_1 = -1, x_2 = 4,$$

$$\therefore A(-1, 0),$$

$$\therefore OB = 4, OC = 2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle COB \text{ 中, } \tan \angle ABC = \frac{OC}{OB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{2}, 2, (-1, 0), \frac{1}{2};$$

【小问 2 详解】

解: 过点 C 作 $CD \parallel x$ 轴, 交 BP 于点 D , 过点 P 作 $PE \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 E ,

$$\therefore AO = 1, OC = 2, OB = 4,$$

$$\therefore \tan \angle OCA = \frac{AO}{CO} = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 (1) 可得, } \tan \angle ABC = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \tan \angle OCA = \tan \angle ABC,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle ABC,$$

$$\therefore \angle PCB = 2\angle OCA,$$

$$\therefore \angle PCB = 2\angle ABC,$$

$$\therefore CD \parallel x \text{ 轴, } EP \parallel x \text{ 轴,}$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCB, \angle EPC = \angle PCD,$$

$$\therefore \angle EPC = \angle ABC,$$

$$\text{又 } \therefore \angle PEC = \angle BOC = 90^\circ,$$

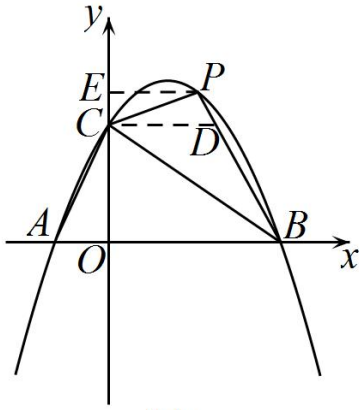
$$\therefore \triangle PEC \sim \triangle BOC,$$

$$\therefore \frac{EP}{OB} = \frac{EC}{OC},$$

$$\text{设点 } P \text{ 坐标为 } \left(t, -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2\right), \text{ 则 } EP = t, EC = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2 - 2 = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t,$$

$$\therefore \frac{t}{4} = \frac{-\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t}{2}, \text{ 解得: } t = 0 \text{ (舍)}, t = 2,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标为 } (2, 3).$$



【小问3详解】

图1

解：①如图2，作 $DH \perp DQ$ ，且使 $DH = BQ$ ，连接 FH 。

$$\because \angle BQD + \angle BDQ = 90^\circ, \quad \angle HDF + \angle BDQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QD = \angle HDF,$$

$$\because QE = DF, \quad DH = BQ,$$

$$\therefore \triangle BQE \cong \triangle HDF (\text{SAS}),$$

$$\therefore BE = FH,$$

$$\therefore BE + QF = FH + QF \geq QH,$$

$\therefore Q, F, H$ 共线时， $BE + QF$ 的值最小。作 $QG \perp AB$ 于点 G ,

$$\because OB = OD, \quad \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OBD = 45^\circ,$$

$$\because \angle QBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QBG = 45^\circ,$$

$$\therefore QG = BG.$$

$$\text{设 } G(n, 0), \text{ 则 } Q\left(n, -\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2\right),$$

$$\therefore -\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 2 = 4 - n, \text{ 解得 } n = 1 \text{ 或 } n = 4 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore Q(2, 3),$$

$$\therefore QG = BG = 4 - 1 = 3,$$

$$\therefore BQ = DH = 3\sqrt{2}, \quad QD = 5\sqrt{2},$$

$$\therefore m = QH = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{17} ;$$

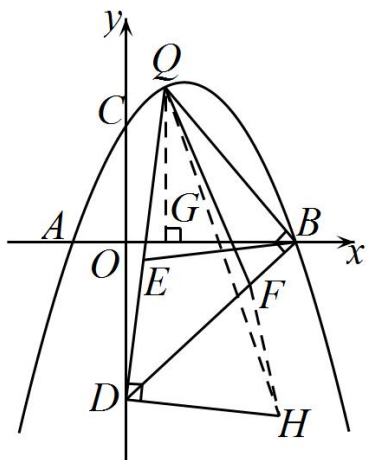


图2

②如图 3, 作 $PT \parallel y$ 轴, 交 BC 于点 T , 待定系数法可求 BC 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$,

$$\text{设 } T\left(a, -\frac{1}{2}a+2\right), \quad P\left(a, -\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}a+2\right),$$

$$\text{则 } S = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + 2 + \frac{1}{2}a - 2 \right) \times 4 = -(a-2)^2 + 4,$$

$$\therefore 0 \leq S \leq 4,$$

$$\therefore 0 \leq \frac{1}{4}m^2 - k \leq 4,$$

$$\therefore 0 \leq 17 - k \leq 4,$$

$$\therefore 13 \leq k \leq 17.$$

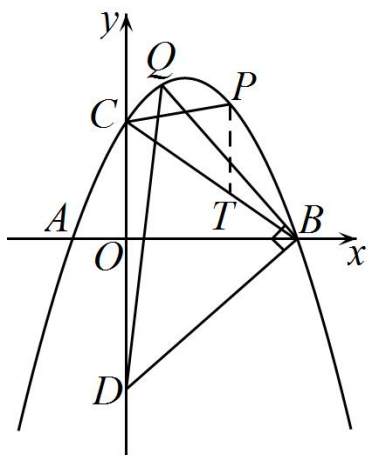


图3

【点睛】 本题考查用待定系数法求函数解析式、二次函数与几何综合、二

次函数与 x 轴的交点、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程、锐角三角

函数、最值问题、二次函数最值、用分割法求三角形面积，熟练掌握相关知识是解题的关键.

