

随州市 2023 年初中毕业升学考试

数学试题

(考试时间 120 分钟 满分 120 分)

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号，答在试卷上无效.
3. 非选择题作答：用 0.5 毫米黑色墨水签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，答在试卷上无效.
4. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交.

一、选择题 (本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的)

1. 实数 -2023 的绝对值是 ()

- A. 2023 B. -2023 C. $\frac{1}{2023}$ D. $-\frac{1}{2023}$

【答案】A

【解析】

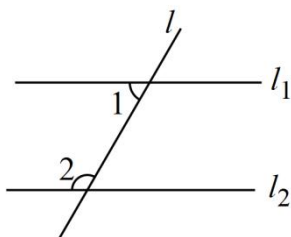
【分析】根据绝对值的代数意义即可得出答案.

【详解】解：因为负数的绝对值等于它的相反数，
所以， -2023 的绝对值等于 2023.

故选：A.

【点睛】本题考查了绝对值的代数意义，熟练掌握知识点是本题的关键.

2. 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ，直线 l 与 l_1 、 l_2 相交，若图中 $\angle 1 = 60^\circ$ ，则 $\angle 2$ 为 ()



- A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

【答案】C

【解析】

【分析】根据两直线平行，同旁内角互补进行求解，即可得到答案.

【详解】解：∵直线 $l_1 \parallel l_2$,

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

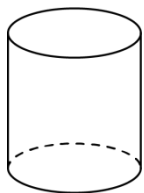
$$\because \angle 1 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 120^\circ,$$

故选 C.

【点睛】本题考查了平行线的性质，解题关键是掌握两直线平行，同位角相等，内错角相等，同旁内角互补.

3. 如图是一个放在水平桌面上的圆柱体，该几何体的三视图中完全相同的是 ()



- A. 主视图和俯视图 B. 左视图和俯视图 C. 主视图和左视图 D. 三个视图均相同

【答案】C

【解析】

【分析】根据三视图的定义判断即可.

【详解】该几何体的三视图中完全相同的是主视图和左视图，均为矩形，俯视图是一个圆.

故选：C.

【点睛】本题考查三视图的知识点，主要掌握主视图、左视图、俯视图分别是从物体的前面、左面、上面看到的图形是解题的关键.

4. 某班在开展劳动教育课程调查中发现，第一小组 6 名同学每周做家务的天数依次为 3, 7, 5, 6, 5, 4 (单位：天)，则这组数据的众数和中位数分别为 ()

- A. 5 和 5 B. 5 和 4 C. 5 和 6 D. 6 和 5

【答案】A

【解析】

【分析】根据众数和中位数的概念求解.

【详解】解：将数据重新排列为 3, 4, 5, 5, 6, 7,

所以这组数据的众数为 5，中位数 $\frac{5+5}{2} = 5$,

故选：A.

【点睛】本题考查了众数和中位数的概念：一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数。

5. 甲、乙两个工程队共同修一条道路，其中甲工程队需要修 9 千米，乙工程队需要修 12 千米。已知乙工程队每个月比甲工程队多修 1 千米，最终用的时间比甲工程队少半个月。若设甲工程队每个月修 x 千米，则可列出方程为（ ）

A. $\frac{9}{x} - \frac{12}{x+1} = \frac{1}{2}$ B. $\frac{12}{x+1} - \frac{9}{x} = \frac{1}{2}$ C. $\frac{9}{x+1} - \frac{12}{x} = \frac{1}{2}$ D. $\frac{12}{x} - \frac{9}{x+1} = \frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】设甲工程队每个月修 x 千米，则乙工程队每个月修 $(x+1)$ 千米，根据“最终用的时间比甲工程队少半个月”列出分式方程即可。

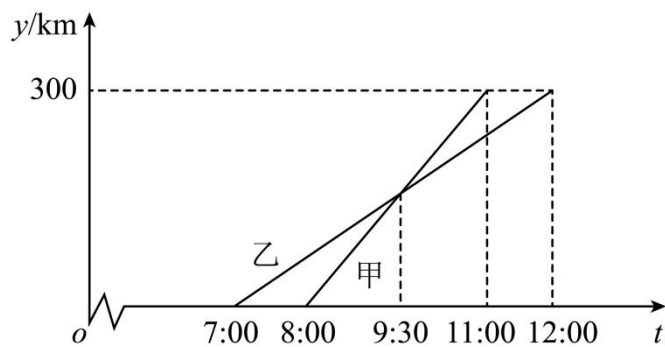
【详解】解：设甲工程队每个月修 x 千米，则乙工程队每个月修 $(x+1)$ 千米，

依题意得 $\frac{9}{x} - \frac{12}{x+1} = \frac{1}{2}$,

故选：A.

【点睛】此题主要考查了由实际问题抽象出分式方程，关键是分析题意，找准关键语句，列出相等关系。

6. 甲、乙两车沿同一路线从 A 城出发前往 B 城，在整个行程中，汽车离开 A 城的距离 y 与时刻 t 的对应关系如图所示，关于下列结论：①A, B 两城相距 300km；②甲车的平均速度是 60km/h，乙车的平均速度是 100km/h；③乙车先出发，先到达 B 城；④甲车在 9:30 追上乙车。正确的有（ ）



A. ①② B. ①③ C. ②④ D. ①④

【答案】D

【解析】

【分析】根据图象逐项分析判断即可。

【详解】解：由图象知：

①A, B 两城相距 300km, 故此项正确;

②甲车的平均速度是 $\frac{300}{11-8} = 100(\text{km/h})$, 乙车的平均速度是 $\frac{300}{12-7} = 60(\text{km/h})$, 故此项错误;

③乙车 7:00 先出发, 12:00 才到达 B 城, 甲车 8:00 后出发, 11:00 就到达 B 城, 故此项错误;

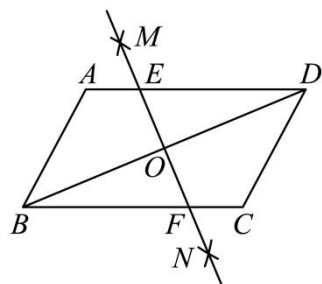
④两车在 9:30 时, 行驶路程一样, 即甲车在 9:30 追上乙车, 故此项正确.

综上, ①④说法正确,

故选: D.

【点睛】 本题考查了函数的图象, 正确识别图象并能提取相关信息是解答的关键.

7. 如图, 在 $ABCD$ 中, 分别以 B, D 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径画弧, 两弧相交于点 M, N , 过 M, N 两点作直线交 BD 于点 O , 交 AD, BC 于点 E, F , 下列结论不正确的是 ()



A. $AE = CF$

B. $DE = BF$

C. $OE = OF$

D. $DE = DC$

【答案】 D

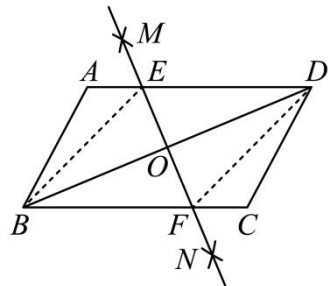
【解析】

【分析】 根据作图可知: EF 垂直平分 BD , 得到 $BO = DO$, 于是得到点 O 为 $ABCD$ 的对称中心, $BE = ED$, $BF = FD$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle BFE = \angle DFE$, 根据平行线的性质得到 $\angle BFE = \angle DEF$, 推出四边形 $BFDE$ 是菱形, 据此判断即可.

【详解】 解: 根据作图可知: EF 垂直平分 BD ,

$\therefore BO = DO$,

$\therefore$ 点 O 为 $ABCD$ 的对称中心,



$\therefore BE = ED$, $BF = FD$,

$\therefore FE = EF$,

$$\therefore \triangle BFE \cong \triangle DFE (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle BFE = \angle DFE,$$

$\therefore$ 在 $\square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD = BC$

$$\therefore \angle BFE = \angle DEF,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle DEF,$$

$$\therefore DE = DF,$$

$$\therefore BE = DE = DF = BF, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\therefore AD - DE = BC - BF,$$

$$\therefore AE = CF, \text{ 故 A 正确;}$$

$\therefore$ 四边形 $BFDE$ 是菱形,

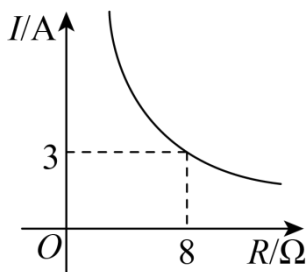
$$\therefore OE = OF, \text{ 故 C 正确;}$$

DE 与 DC 不一定相等, 故 D 错误,

故选: D.

【点睛】本题考查了垂直平分线的性质, 尺规作图, 菱形的判定与性质, 全等三角形的判定与性质等知识, 掌握菱形的判定与性质是解答本题的关键.

8. 已知蓄电池的电压为定值, 使用某蓄电池时, 电流 I (单位: A) 与电阻 R (单位: Ω) 是反比例函数关系, 它的图象如图所示, 则当电阻为 6Ω 时, 电流为()



A. 3A

B. 4A

C. 6A

D. 8A

【答案】B

【解析】

【分析】设该反比例函数解析式为 $I = \frac{k}{R} (k \neq 0)$, 根据当 $R = 8$ 时, $I = 3$, 可得该反比例函数解析式为 $I = \frac{24}{R}$, 再把 $R = 6$ 代入, 即可求出电流 I .

【详解】解: 设该反比例函数解析式为 $I = \frac{k}{R} (k \neq 0)$,

由题意可知, 当 $R = 8$ 时, $I = 3$,

$$\therefore 3 = \frac{k}{8},$$

解得： $k = 24$ ，

$\therefore$ 设该反比例函数解析式为 $I = \frac{24}{R}$ ，

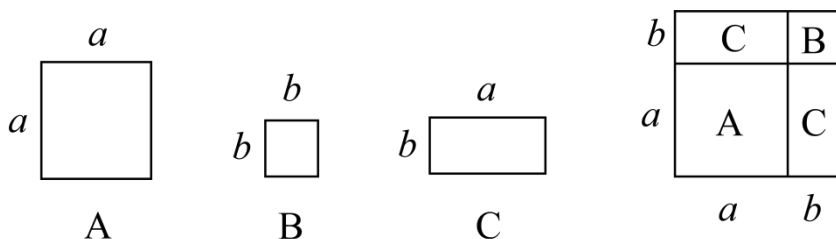
$\therefore$ 当 $R = 6$ 时， $I = \frac{24}{6} = 4$ ，

即电流为 4A ，

故选： B.

【点睛】 本题考查了反比例函数的图象和性质， 求出反比例函数解析式是解题关键.

9. 设有边长分别为 a 和 b ($a > b$) 的 A 类和 B 类正方形纸片、长为 a 宽为 b 的 C 类矩形纸片若干张. 如图所示要拼一个边长为 $a+b$ 的正方形, 需要 1 张 A 类纸片、1 张 B 类纸片和 2 张 C 类纸片. 若要拼一个长为 $3a+b$ 、宽为 $2a+2b$ 的矩形, 则需要 C 类纸片的张数为()



A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

【答案】 C

【解析】

【分析】 计算出长为 $(3a+b)$ ，宽为 $(2a+2b)$ 的大长方形的面积，再分别得出 A 、 B 、 C 卡片的面积，即可看出应当需要各类卡片多少张.

【详解】 解： 长为 $(3a+b)$ ，宽为 $(2a+2b)$ 的大长方形的面积为：

$$(3a+b)(2a+2b) = 6a^2 + 2b^2 + 8ab;$$

需要 6 张 A 卡片，2 张 B 卡片和 8 张 C 卡片.

故选： C.

【点睛】 本题主要考查多项式乘多项式与图形面积，解题的关键是理解 $(3a+b)(2a+2b)$ 结果中 ab 项的系数即为需要 C 类卡片的张数.

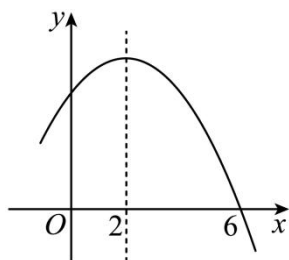
10. 如图，已知开口向下的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $(6,0)$ ，对称轴为直线 $x = 2$. 则下列结论正确的有 ()

① $abc < 0$;

② $a - b + c > 0$;

③方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{6}$;

④抛物线上有两点 $P(x_1, y_1)$ 和 $Q(x_2, y_2)$, 若 $x_1 < 2 < x_2$ 且 $x_1 + x_2 > 4$, 则 $y_1 < y_2$.



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据抛物线的图象与系数的关系即可求出答案.

【详解】 解: 由抛物线的开口可知: $a < 0$, 由抛物线与 y 轴的交点可知: $c > 0$, 由抛物线的对称轴可知:

$$-\frac{b}{2a} = 2 > 0, \therefore b > 0,$$

$\therefore abc < 0$, 故①正确;

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $(6, 0)$, 对称轴为直线 $x = 2$,

则另一个交点 $(-2, 0)$,

$\therefore x = -1$ 时, $y > 0$,

$\therefore a - b + c > 0$, 故②正确;

$\therefore$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 $(6, 0)$ 和 $(-2, 0)$,

$\therefore ax^2 + bx + c = 0$ 的两根为 6 和 -2,

$$\therefore 6 + (-2) = 4 = -\frac{b}{a}, \quad 6 \times (-2) = -12 = \frac{c}{a}, \quad \text{则 } b = -4a, \quad c = -12a,$$

如果方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{6}$ 成立,

$$\text{则 } \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3} = -\frac{a}{c},$$

$$\text{而 } c = -12a, \therefore -\frac{a}{c} = \frac{1}{4},$$

$\therefore$ 方程 $cx^2 + bx + a = 0$ 的两个根为 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{6}$ 不成立, 故③不正确;

$\therefore x_1 < 2 < x_2$, $\therefore P, Q$ 两点分布在对称轴的两侧,

$$\therefore (x_2 - 2) - (2 - x_1) = x_2 - 2 - 2 + x_1 = (x_1 + x_2) - 4 > 0,$$

即 x_1 到对称轴的距离小于 x_2 到对称轴的距离,

$\therefore y_1 > y_2$, 故④不正确.

综上, 正确的有①②,

故选: B.

【点睛】本题考查的是二次函数图象与系数的关系, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 系数符号由抛物线开口方向、对称轴、抛物线与 y 轴的交点、抛物线与 x 轴交点的个数确定.

二、填空题 (本大题共有 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 只需要将结果直接填写在答题卡对应题号处的横线上)

11. 计算: $(-2)^2 + (-2) \times 2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】0

【解析】

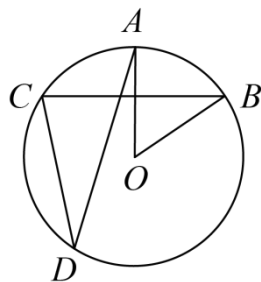
【分析】先算乘方, 再计算乘法, 最后算加减.

【详解】解: $(-2)^2 + (-2) \times 2 = 4 - 4 = 0.$

故答案为: 0.

【点睛】此题主要考查了有理数的混合运算, 关键是掌握运算法则.

12. 如图, 在 $\odot O$ 中, $OA \perp BC$, $\angle AOB = 60^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的度数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$



【答案】 30° ## 30 度

【解析】

【分析】根据垂径定理得到 $AB = AC$, 根据圆周角定理解答即可.

【详解】解: $\because OA \perp BC$,

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2} \angle AOB = 30^\circ,$$

故答案为： 30° 。

【点睛】本题考查的是垂径定理和圆周角定理，掌握同弧或等弧所对的圆周角相等，都等于这条弧所对的圆心角的一半是解题的关键。

13. 已知一元二次方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 有两个实数根 x_1, x_2 ，则 $x_1 + x_2 - x_1x_2$ 的值等于_____。

【答案】2

【解析】

【分析】先根据根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = 3$ ， $x_1x_2 = 1$ ，然后利用整体代入的方法计算。

【详解】解：根据根与系数的关系得：

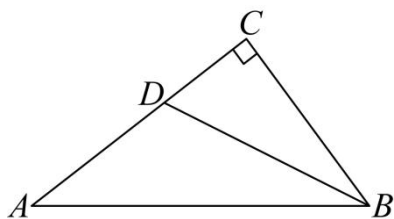
$$x_1 + x_2 = 3, x_1x_2 = 1,$$

$$\therefore x_1 + x_2 - x_1x_2 = 3 - 1 = 2.$$

故答案为：2。

【点睛】本题考查了根与系数的关系：若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根时， $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ 。熟练掌握根与系数的关系是解决本题的关键。

14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 8$ ， $BC = 6$ ， D 为 AC 上一点，若 BD 是 $\angle ABC$ 的角平分线，则 $AD =$ _____。

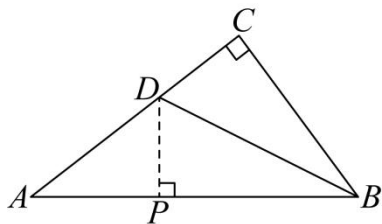


【答案】3

【解析】

【分析】首先证明 $CD = DP$ ， $BC = BP = 6$ ，设 $CD = PD = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中，利用勾股定理构建方程即可解决问题。

【详解】解：如图，过点 D 作 AB 的垂线，垂足为 P ，



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because AC = 8$ ， $BC = 6$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10,$$

$\because BD$ 是 $\angle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle CBD = \angle PBD$,

$\because \angle C = \angle BPD = 90^\circ$, $BD = BD$,

$\therefore \triangle BDC \cong \triangle BDP$ (AAS),

$\therefore BC = BP = 6$, $CD = PD$,

设 $CD = PD = x$,

在 $\text{Rt}\triangle ADP$ 中, $\because PA = AB - BP = 4$, $AD = 8 - x$,

$\therefore x^2 + 4^2 = (8 - x)^2$,

$\therefore x = 3$,

$\therefore AD = 3$.

故答案为: 3.

【点睛】 本题考查了角平分线的性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

15. 某天老师给同学们出了一道趣味数学题:

设有编号为 1-100 的 100 盏灯, 分别对应着编号为 1-100 的 100 个开关, 灯分为“亮”和“不亮”两种状态, 每按一次开关改变一次相对应编号的灯的状态, 所有灯的初始状态为“不亮”. 现有 100 个人, 第 1 个人把所有编号是 1 的整数倍的开关按一次, 第 2 个人把所有编号是 2 的整数倍的开关按一次, 第 3 个人把所有编号是 3 的整数倍的开关按一次, …… , 第 100 个人把所有编号是 100 的整数倍的开关按一次. 问最终状态为“亮”

的灯共有多少盏?

几位同学对该问题展开了讨论:

甲: 应分析每个开关被按的次数找出规律:

乙: 1 号开关只被第 1 个人按了 1 次, 2 号开关被第 1 个人和第 2 个人共按了 2 次, 3 号开关被第 1 个人和第 3 个人共按了 2 次, ……

丙: 只有按了奇数次的开关所对应的灯最终是“亮”的状态.

根据以上同学的思维过程, 可以得出最终状态为“亮”的灯共有_____盏.

【答案】 10

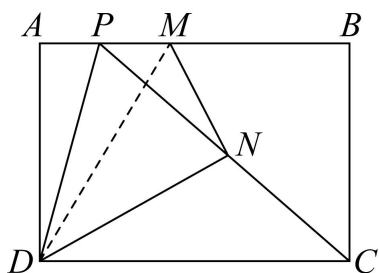
【解析】

【分析】 灯的初始状态为“不亮”, 按奇数次, 则状态为“亮”, 按偶数次, 则状态为“不亮”, 确定 1-100 中, 各个数因数的个数, 完全平方数的因数为奇数个, 从而求解.

【详解】所有灯的初始状态为“不亮”，按奇数次，则状态为“亮”，按偶数次，则状态为“不亮”；
因数的个数为奇数的自然数只有完全平方数，1-100 中，完全平方数为 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100；有 10 个数，故有 10 盏灯被按奇数次，为“亮”的状态；
故答案为：10.

【点睛】本题考查因数分解，完全平方数，理解因数的意义，完全平方数的概念是解题的关键.

16. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 5$ ， $AD = 4$ ， M 是边 AB 上一动点（不含端点），将 $\triangle ADM$ 沿直线 DM 对折，得到 $\triangle NDM$ 。当射线 CN 交线段 AB 于点 P 时，连接 DP ，则 $\triangle CDP$ 的面积为_____； DP 的最大值为_____.



【答案】 ①. 10 ②. $2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据等底等高的三角形和矩形面积关系分析求解；

(2) 结合勾股定理分析可得，当 AP 最大时， DP 即最大，通过分析点 N 的运动轨迹，结合勾股定理确定 AP 的最值，从而求得 DP 的最大值.

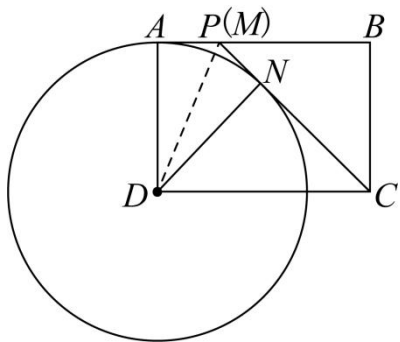
【详解】解：由题意可得 $\triangle CDP$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 的一半，

$$\therefore \triangle CDP \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10,$$

$$\text{在 } Rt\triangle APD \text{ 中, } PD = \sqrt{AD^2 + AP^2},$$

$\therefore$ 当 AP 最大时， DP 即最大，

由题意可得点 N 是在以 D 为圆心 4 为半径的圆上运动，当射线 CN 与圆相切时， AP 最大，此时 C 、 N 、 M 三点共线，如图：



由题意可得： $AD = ND$ ， $\angle MND = \angle BAD = \angle B = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle NDC + \angle DCN = 90^\circ, \quad \angle DCN + \angle MCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle NDC = \angle MCB$$

$$\therefore AD = BC,$$

$$\therefore DN = BC,$$

$$\therefore \triangle NDC \cong \triangle BCM,$$

$$\therefore CN = BM = \sqrt{CD^2 - DN^2} = 3,$$

$$\therefore AP = AB - BP = 2,$$

$$\text{在 } Rt\triangle APD \text{ 中, } PD = \sqrt{AD^2 + AP^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5},$$

故答案为：10， $2\sqrt{5}$ 。

【点睛】 本题考查了矩形的性质、折叠的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理等知识；本题综合性强，难度较大，熟练掌握矩形和折叠的性质，分析点的运动轨迹，证明三角形全等是解决问题的关键。

三、解答题 (本大题共 8 小题，共 72 分。解答应写出必要的演算步骤、文字说明或证明过程)

17. 先化简，再求值： $\frac{4}{x^2-4} \div \frac{2}{x-2}$ ，其中 $x=1$ 。

【答案】 $\frac{2}{x+2}, \frac{2}{3}$ 。

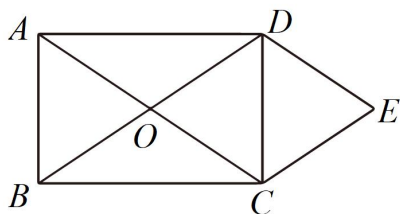
【解析】

【分析】 先根据分式的减法法则算括号里面的，再根据分式的除法法则把除法变成乘法，算乘法，最后代入求出答案即可。

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \frac{4}{x^2-4} \div \frac{2}{x-2} \\ &= \frac{4}{(x+2)(x-2)} \cdot \frac{x-2}{2} \\ &= \frac{2}{x+2}, \\ \text{当 } x=1 \text{ 时, 原式} &= \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查了分式的化简求值，能正确根据分式的运算法则进行化简是解此题的关键，注意运算顺序。

18. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC ， BD 相交于点 O ， $DE \parallel AC$ ， $CE \parallel BD$ 。



- (1) 求证：四边形 $OCED$ 是菱形；
 (2) 若 $BC = 3, DC = 2$ ，求四边形 $OCED$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 3

【解析】

【分析】(1) 先根据矩形的性质求得 $OC = OD$ ，然后根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形分析推理；

(2) 根据矩形的性质求得 $\triangle OCD$ 的面积，然后结合菱形的性质求解.

【小问 1 详解】

解： $\because DE \parallel AC, CE \parallel BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $OCED$ 是平行四边形，

又 $\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $OC = OD$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $OCED$ 是菱形；

【小问 2 详解】

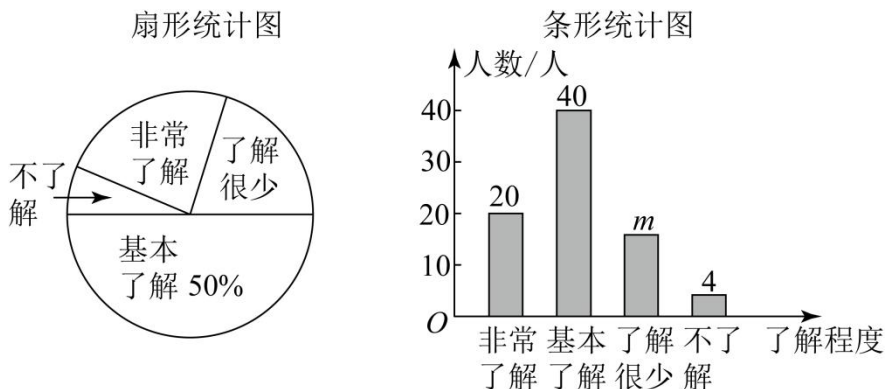
解： 矩形 $ABCD$ 的面积为 $BC \cdot DC = 3 \times 2 = 6$ ，

$\therefore \triangle OCD$ 的面积为 $\frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$ ，

$\therefore$ 菱形 $OCED$ 的面积为 $2 \times \frac{3}{2} = 3$.

【点睛】 本题考查矩形的性质、菱形的判定，属于中考基础题，掌握矩形的性质和菱形的判定方法，正确推理论证是解题关键.

19. 中学生心理健康受到社会的广泛关注，某校开展心理健康教育专题讲座，就学生对心理健康知识的了解程度，采用随机抽样调查的方式，根据收集到的信息进行统计，绘制了下面两幅尚不完整的统计图.



根据图中信息回答下列问题：

- (1) 接受问卷调查的学生共有_____人，条形统计图中 m 的值为_____，扇形统计图中“非常了解”部分所对应扇形的圆心角的度数为_____；
- (2) 若该校共有学生 800 人，根据上述调查结果，可以估计出该校学生中对心理健康知识“不了解”的总人数为_____人；
- (3) 若某班要从对心理健康知识达到“非常了解”程度的 2 名男生和 2 名女生中随机抽取 2 人参加心理健康知识竞赛，请用列表或画树状图的方法，求恰好抽到 2 名女生的概率。

【答案】(1) 80, 16, 90°

(2) 40 (3) 恰好抽到 2 名女生的概率为 $\frac{1}{6}$ 。

【解析】

【分析】(1) 用“基本了解”的人数除以它所占的百分比得到调查的总人数，再用总人数减去其他项的人数，求出“了解很少”的人数；用 360° 乘以扇形统计图中“非常了解”部分所占的比例即可；

(2) 用总人数 800 乘以“不了解”的人数所占的比例即可；

(3) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数，找出恰好抽到 2 名女生的结果数，然后利用概率公式求解。

【小问 1 详解】

解：接受问卷调查的学生共有 $40 \div 50\% = 80$ (人)，

$m = 80 - 20 - 40 - 4 = 16$ (人)，

扇形统计图中“非常了解”部分所对应扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{20}{80} = 90^\circ$ ；

故答案为：80, 16, 90° ；

【小问 2 详解】

解：根据题意得：

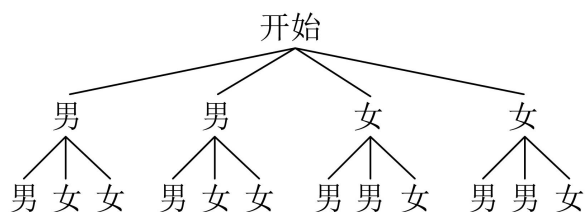
$800 \times \frac{4}{80} = 40$ (人)，

答：估计出该校学生中对心理健康知识“不了解”的总人数为 40 人；

故答案为：40；

【小问 3 详解】

解：由题意列树状图：

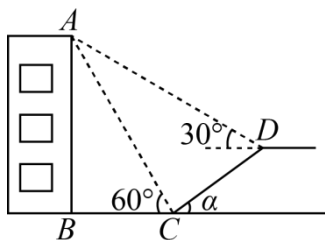


由树状图可知，所有等可能的结果有 12 种，恰好抽到 2 名女生的结果有 2 种，

$\therefore$ 恰好抽到 2 名女生的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】此题考查了列表法或树状图法求概率以及条形统计图与扇形统计图. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

20. 某校学生开展综合实践活动，测量某建筑物的高度 AB ，在建筑物附近有一斜坡，坡长 $CD = 10$ 米，坡角 $\alpha = 30^\circ$ ，小华在 C 处测得建筑物顶端 A 的仰角为 60° ，在 D 处测得建筑物顶端 A 的仰角为 30° . (已知点 A, B, C, D 在同一平面内， B, C 在同一水平线上)



(1) 求点 D 到地面 BC 的距离;

(2) 求该建筑物的高度 AB .

【答案】(1) 5 米 (2) 15 米

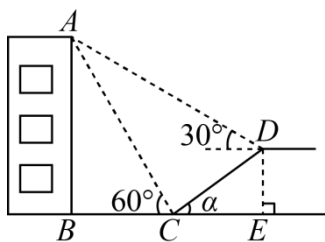
【解析】

【分析】(1) 过点 D 作 $DE \perp BC$ ，根据坡角的概念及含 30° 直角三角形的性质分析求解;

(2) 通过证明 $\angle ACD = 90^\circ$ ，然后解直角三角形分析求解.

【小问 1 详解】

解：过点 D 作 $DE \perp BC$,



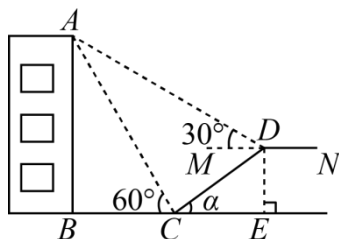
由题意可得 $\angle DCE = 30^\circ$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CDE$ 中, $DE = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 10 = 5$,

即点 D 到地面 BC 的距离为 5 米;

【小问 2 详解】

如图,



由题意可得 $\angle DCE = 30^\circ$, $\angle ACB = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ACD=90^{\circ},$$

又 $\because MN \parallel BE$,

$$\therefore \angle MDC = \angle \alpha = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 60^\circ$$

∴ 在 Rt△ACD 中, $\frac{AC}{CD} = \tan \angle ADC = \sqrt{3}$, 即 $\frac{AC}{10} = \sqrt{3}$,

解得 $AC = 10\sqrt{3}$,

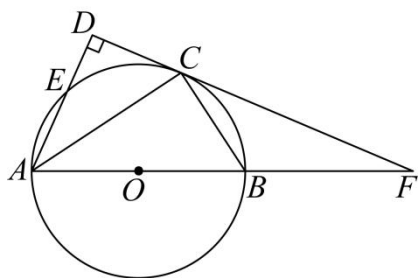
在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\frac{AB}{AC} = \sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\frac{AB}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $AB=15$,

答: 该建筑物的高度 AB 为 15 米.

【点睛】本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角、坡度坡角问题，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键.

21. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 E, C 在 $\odot O$ 上, 点 C 是 $\widehat{BE}$ 的中点, AE 垂直于过 C 点的直线 DC , 垂足为 D , AB 的延长线交直线 DC 于点 F .



(1) 求证: DC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AE = 2$, $\sin \angle AFD = \frac{1}{3}$, ①求 $\odot O$ 的半径; ②求线段 DE 的长.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) ①3; ②2

【解析】

【分析】(1) 根据等弧所对的圆周角相等和等边对等角的性质, 得到 $\angle CAE = \angle ACO$, 推出 $AD \parallel OC$,

进而得到 $OC \perp DC$ ，再利用圆的切线的判定定理即可证明结论；

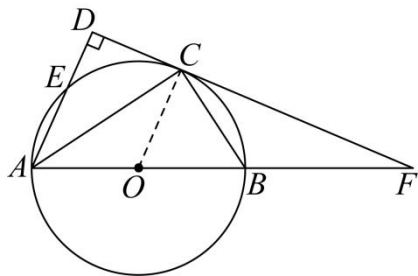
(2) ①连接 BE ，根据直径所对的圆周角是直角和平行线的判定，得到 $BE \parallel DF$ ，进而得到

$\angle AFD = \angle ABE$ ，再利用锐角三角函数，求得 $AB = 6$ ，即可求出 $\odot O$ 的半径；

②利用锐角三角函数，分别求出 BF 和 AD 的长，即可得到线段 DE 的长.

【小问 1 详解】

证明：如图，连接 OC ，



$\because$ 点 C 是 $\widehat{BE}$ 的中点,

$\therefore \widehat{CE} = \widehat{CB}$,

$\therefore \angle CAE = \angle CAB$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle CAB = \angle ACO$,

$\therefore \angle CAE = \angle ACO$,

$\therefore AD \parallel OC$,

$\because AD \perp DC$,

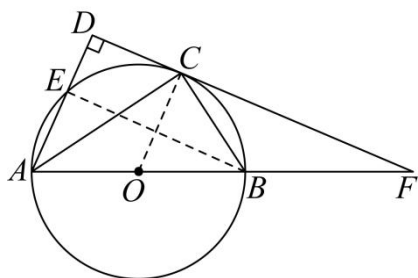
$\therefore OC \perp DC$,

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore DC$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

解：①如图，连接 BE ，



$\because AB$ 是直径,

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$,

$$\begin{aligned} \therefore BE &\perp AD, \\ \because AD &\perp DF, \\ \therefore BE &\parallel DF, \\ \therefore \angle AFD &= \angle ABE, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \because \sin \angle AFD &= \frac{1}{3}, \\ \therefore \sin \angle ABE &= \frac{AE}{AB} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\because AE = 2,$$

$$\therefore AB = 6,$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 3;$$

$$\textcircled{2} \text{ 由 (1) 可知, } OC \perp DF,$$

$$\therefore \sin \angle AFD = \frac{OC}{OF} = \frac{1}{3},$$

$$\because OC = 3, \quad OF = OB + BF = 3 + BF,$$

$$\therefore \frac{3}{3 + BF} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BF = 6,$$

$$\therefore AF = AB + BF = 6 + 6 = 12,$$

$$\because AD \perp DF,$$

$$\therefore \sin \angle AFD = \frac{AD}{AF} = \frac{AD}{12} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AD = 4,$$

$$\because AE = 2,$$

$$\therefore DE = AD - AE = 4 - 2 = 2.$$

【点睛】本题是圆和三角形综合题，考查了圆的切线的判定定理，圆的性质，等腰三角形的性质，锐角三角函数等知识，熟练掌握圆的相关性质，灵活运用正弦值求边长是解题关键.

22. 为了振兴乡村经济，增加村民收入，某村委会干部带领村民在网上直播推销农产品，在试销售的 30 天

中，第 x 天 ($1 \leq x \leq 30$ 且 x 为整数) 的售价 p (元/千克) 与 x 的函数关系式 $p = \begin{cases} mx + n & (1 \leq x < 20) \\ 30 & (20 \leq x \leq 30) \end{cases}$ (且

x 为整数)，销量 q (千克) 与 x 的函数关系式为 $q = x + 10$ ，已知第 5 天售价为 50 元/千克，第 10 天售价为 40 元/千克，设第 x 天的销售额为 W 元

(1) $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 求第 x 天的销售额 W 元与 x 之间的函数关系式;

(3) 在试销售的 30 天中，销售额超过 1000 元的共有多少天？

【答案】(1) -2 ， 60

(2) $1 \leq x < 20$ 时， $W = -2x^2 + 40x + 600$ ，当 $20 \leq x \leq 30$ 时， $W = 30x + 300$

(3) 7 天

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求待定系数；

(2) 根据“销售额=售价×销售量”列出函数关系式，

(3) 利用二次函数和一次函数的性质分析求解.

【小问 1 详解】

解：∵第 5 天售价为 50 元/千克，第 10 天售价为 40 元/千克，

$$\therefore \begin{cases} 5m + n = 50 \\ 10m + n = 40 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m = -2 \\ n = 60 \end{cases},$$

故答案为： -2 ， 60 ；

【小问 2 详解】

解：由题意当 $1 \leq x < 20$ 时， $W = pq = (-2x + 60)(x + 10) = -2x^2 + 40x + 600$ ，

当 $20 \leq x \leq 30$ 时， $W = 30q = 30(x + 10) = 30x + 300$ ，

【小问 3 详解】

解：由题意当 $1 \leq x < 20$ 时， $W = -2x^2 + 40x + 600 = -2(x - 10)^2 + 800$ ，

∵ $-2 < 0$ ，

∴当 $x = 10$ 时， W 最大为 800，

当 $20 \leq x \leq 30$ 时， $W = 30x + 300$ ，

由 $30x + 300 > 1000$ 时，解得 $x > 23\frac{1}{3}$ ，

又∵ x 为整数，且 $30 > 0$ ，

∴当 $20 \leq x \leq 30$ 时， W 随 x 的增大而增大，

∴第 24 至 30 天，销售额超过 1000 元，共 7 天.

【点睛】本题考查一次函数的应用，二次函数的应用，理解题意，分段分析函数解析式，掌握一次函数和二次函数的性质是解题关键.

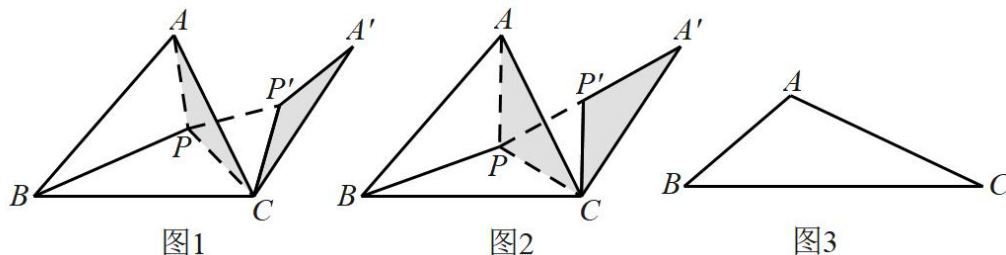
23. 1643 年，法国数学家费马曾提出一个著名的几何问题：给定不在同一条直线上的三个点 A ， B ， C ，求平面上到这三个点的距离之和最小的点的位置，意大利数学家和物理学家托里拆利给出了分析和证明，该点

也被称为“费马点”或“托里拆利点”，该问题也被称为“将军巡营”问题.

(1) 下面是该问题的一种常见的解决方法，请补充以下推理过程：(其中①处从“直角”和“等边”中选择填空，②处从“两点之间线段最短”和“三角形两边之和大于第三边”中选择填空，③处填写角度数，④处填写该三角形的某个顶点)

当 $\triangle ABC$ 的三个内角均小于 120° 时，

如图 1，将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$ ，连接 PP' ，

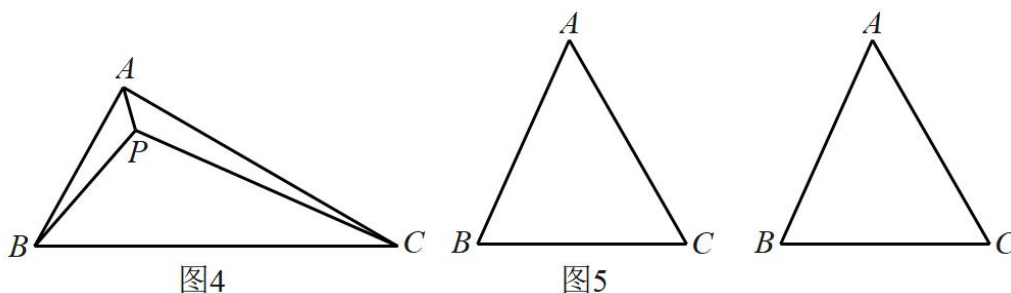


由 $PC = P'C$ ， $\angle PCP' = 60^\circ$ ，可知 $\triangle PCP'$ 为___①___三角形，故 $PP' = PC$ ，又 $P'A' = PA$ ，故 $PA + PB + PC = PA' + PB + PP' \geq A'B$ ，

由___②___可知，当 B, P, P', A 在同一条直线上时， $PA + PB + PC$ 取最小值，如图 2，最小值为 $A'B$ ，此时的 P 点为该三角形的“费马点”，且有 $\angle APC = \angle BPC = \angle APB =$ ___③___；

已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时，“费马点”为该三角形的某个顶点. 如图 3，若 $\angle BAC \geq 120^\circ$ ，则该三角形的“费马点”为___④___点.

(2) 如图 4，在 $\triangle ABC$ 中，三个内角均小于 120° ，且 $AC = 3$ ， $BC = 4$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，已知点 P 为 $\triangle ABC$ 的“费马点”，求 $PA + PB + PC$ 的值；



(3) 如图 5，设村庄 A, B, C 的连线构成一个三角形，且已知 $AC = 4\text{km}$ ， $BC = 2\sqrt{3}\text{km}$ ， $\angle ACB = 60^\circ$. 现欲建一中转站 P 沿直线向 A, B, C 三个村庄铺设电缆，已知由中转站 P 到村庄 A, B, C 的铺设成本分别为 a 元/km， a 元/km， $\sqrt{2}a$ 元/km，选取合适的 P 的位置，可以使总的铺设成本最低为_____元. (结果用含 a 的式子表示)

【答案】(1) ①等边；②两点之间线段最短；③ 120° ；④ A .

(2) 5

(3) $2\sqrt{13}a$

【解析】

【分析】(1) 根据旋转的性质和两点之间线段最短进行推理分析即可得出结论；

(2) 根据 (1) 的方法将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$ ，即可得出可知当 B, P, P', A 在同一条直线上时， $PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$ ，在根据 $\angle ACB=30^\circ$ 可证明 $\angle ACA' = \angle A'CP' + \angle BCP + \angle PCP' = 90^\circ$ ，由勾股定理求 $A'B$ 即可，

(3) 由总的铺设成本 $= a(PA+PB+\sqrt{2}PC)$ ，通过将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'P'C$ ，得到等腰直角 $\triangle PP'C$ ，得到 $\sqrt{2}PC = PP'$ ，即可得出当 B, P, P', A 在同一条直线上时， $P'A'+PB+PP'$ 取最小值，即 $PA+PB+\sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$ ，然后根据已知和旋转性质求出 $A'B$ 即可。

【小问 1 详解】

解： $\because PC = P'C, \angle PCP' = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle PCP'$ 为等边三角形；

$\therefore PP' = PC, \angle P'PC = \angle PP'C = 60^\circ$ ，

又 $P'A' = PA$ ，故 $PA+PB+PC = PA'+PB+PP' \geq A'B$ ，

由两点之间线段最短可知，当 B, P, P', A 在同一条直线上时， $PA+PB+PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$ ，此时的 P 点为该三角形的“费马点”，

$\therefore \angle BPC + \angle P'PC = 180^\circ, \angle A'P'C + \angle PP'C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle BPC = 120^\circ, \angle A'P'C = 120^\circ$ ，

又 $\because \triangle APC \cong \triangle A'P'C$ ，

$\therefore \angle APC = \angle A'P'C = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle APB = 360^\circ - \angle APC - \angle BPC = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle APC = \angle BPC = \angle APB = 120^\circ$ ；

$\therefore \angle BAC \geq 120^\circ$ ，

$\therefore BC > AC, BC > AB$ ，

$\therefore BC + AB > AC + AB, BC + AC > AB + AC$ ，

$\therefore$ 三个顶点中，顶点 A 到另外两个顶点的距离和最小。

又 $\because$ 已知当 $\triangle ABC$ 有一个内角大于或等于 120° 时，“费马点”为该三角形的某个顶点。

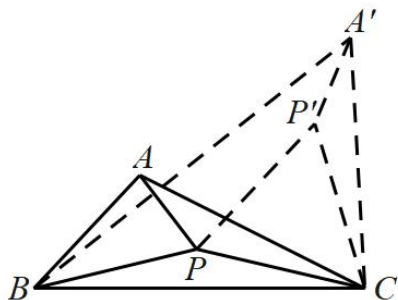
$\therefore$ 该三角形的“费马点”为点 A ，

故答案为：①等边；②两点之间线段最短；③ 120° ；④ A 。

【小问 2 详解】

将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle A'P'C$ ，连接 PP' ，

由 (1) 可知当 B, P, P', A 在同一条直线上时， $PA + PB + PC$ 取最小值，最小值为 $A'B$ ，



$$\because \angle ACP = \angle A'CP',$$

$$\therefore \angle ACP + \angle BCP = \angle A'CP' + \angle BCP = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle PCP' = 60^\circ$$

$$\therefore \angle BCA' = \angle A'CP' + \angle BCP + \angle PCP' = 90^\circ,$$

由旋转性质可知： $AC = A'C = 3$ ，

$$\therefore A'B = \sqrt{BC^2 + A'C^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

$$\therefore PA + PB + PC \text{ 最小值为 } 5,$$

【小问 3 详解】

$$\therefore \text{总的铺设成本} = PA \cdot a + PB \cdot a + PC \cdot \sqrt{2}a = a(PA + PB + \sqrt{2}PC)$$

$$\therefore \text{当 } PA + PB + \sqrt{2}PC \text{ 最小时，总的铺设成本最低，}$$

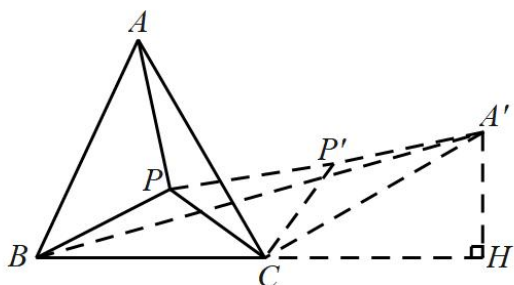
将 $\triangle APC$ 绕点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'P'C$ ，连接 PP' ， $A'B$

由旋转性质可知： $P'C = PC$ ， $\angle PCP' = \angle ACA' = 90^\circ$ ， $P'A' = PA$ ， $A'C = AC = 4\text{km}$ ，

$$\therefore PP' = \sqrt{2}PC,$$

$$\therefore PA + PB + \sqrt{2}PC = P'A' + PB + PP',$$

当 B, P, P', A 在同一条直线上时， $P'A' + PB + PP'$ 取最小值，即 $PA + PB + \sqrt{2}PC$ 取最小值为 $A'B$ ，



过点 A' 作 $A'H \perp BC$ ，垂足为 H ，

$$\because \angle ACB = 60^\circ, \angle ACA' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A'CH = 30^\circ,$$

$$\therefore A'H = \frac{1}{2} A'C = 2\text{km},$$

$$\therefore HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}(\text{km}),$$

$$\therefore BH = BC + CH = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}(\text{km}),$$

$$\therefore A'B = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{13}(\text{km})$$

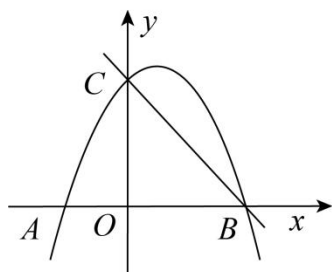
$PA + PB + \sqrt{2}PC$ 的最小值为 $2\sqrt{13}\text{km}$

总的铺设成本 $= PA \cdot a + PB \cdot a + PC \cdot \sqrt{2}a = a(PA + PB + \sqrt{2}PC) = 2\sqrt{13}a$ (元)

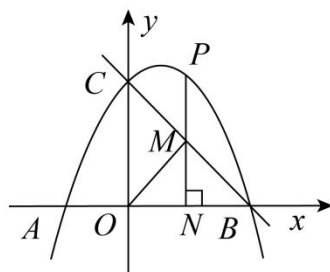
故答案为: $2\sqrt{13}a$

【点睛】本题考查了费马点求最值问题，涉及到的知识点有旋转的性质，等边三角形的判定与性质，勾股定理，以及两点之间线段最短等知识点，读懂题意，利用旋转作出正确的辅助线是解本题的关键。

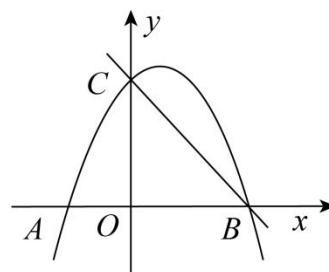
24. 如图 1，平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-1, 0)$ ， $B(2, 0)$ 和 $C(0, 2)$ ，连接 BC ，点 $P(m, n)$ ($m > 0$) 为抛物线上一动点，过点 P 作 $PN \perp x$ 轴交直线 BC 于点 M ，交 x 轴于点 N 。



(图1)



(图2)



(备用图)

- (1) 直接写出抛物线和直线 BC 的解析式；
- (2) 如图 2，连接 OM ，当 $\triangle OCM$ 为等腰三角形时，求 m 的值；
- (3) 当 P 点在运动过程中，在 y 轴上是否存在点 Q ，使得以 O ， P ， Q 为顶点的三角形与以 B ， C ， N 为顶点的三角形相似（其中点 P 与点 C 相对应），若存在，直接写出点 P 和点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) 抛物线: $y = -x^2 + x + 2$; 直线 BC : $y = -x + 2$

(2) $m = 1$ 或 $m = \sqrt{2}$ 或 $m = 2$

(3) $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $Q(0, \sqrt{2}-1)$ 或 $P(1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$, $Q(0, 1)$ 或 $P(1+\sqrt{5}, -3-\sqrt{5})$, $Q(0, -2)$

【解析】

【分析】(1) 由题得抛物线的解析式为 $y = a(x+1)(x-2)$, 将点 $C(0, 2)$ 代入求 a , 进而得抛物线的解析式;
设直线 BC 的解析式为 $y = kx + t$, 将点 B , C 的坐标代入求 k , t , 进而得直线 BC 的解析式.

(2) 由题得 $M(m, -m+2)$, 分别求出 OC , OM , CM , 对等腰 $\triangle OCM$ 中相等的边进行分类讨论, 进而列方程求解;

(3) 对点 P 在点 B 左侧或右侧进行分类讨论, 设法表示出各线段的长度, 利用相似三角形的相似比求解 m , 进而可得 P , Q 的坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线过点 $A(-1, 0)$, $B(2, 0)$,

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = a(x+1)(x-2)$,

将点 $C(0, 2)$ 代入上式, 得 $2 = -2a$,

$\therefore a = -1$.

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -(x+1)(x-2)$, 即 $y = -x^2 + x + 2$.

设直线 BC 的表达式为 $y = kx + t$,

将点 $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ 代入上式,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = 2k + t \\ 2 = t \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ t = 2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y = -x + 2$.

【小问 2 详解】

解: $\because$ 点 M 在直线 BC 上, 且 $P(m, n)$,

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(m, -m+2)$.

$\therefore OC = 2$, $CM^2 = (m-0)^2 + (-m+2-2)^2 = 2m^2$, $OM^2 = m^2 + (-m+2)^2 = 2m^2 - 4m + 4$.

当 $\triangle OCM$ 为等腰三角形时,

①若 $CM = OM$, 则 $CM^2 = OM^2$,

$$\text{即 } 2m^2 = 2m^2 - 4m + 4,$$

$$\text{解得 } m = 1.$$

$$\text{②若 } CM = OC, \text{ 则 } CM^2 = OC^2,$$

$$\text{即 } 2m^2 = 4,$$

$$\text{解得 } m = \sqrt{2} \text{ 或 } m = -\sqrt{2} \text{ (舍去)}.$$

$$\text{③若 } OM = OC, \text{ 则 } OM^2 = OC^2,$$

$$\text{即 } 2m^2 - 4m + 4 = 4,$$

$$\text{解得 } m = 0 \text{ (舍去) 或 } m = 2.$$

$$\text{综上, } m = 1 \text{ 或 } m = \sqrt{2} \text{ 或 } m = 2.$$

【小问 3 详解】

解: $\because$ 点 P 与点 C 相对应,

$$\therefore \triangle POQ \sim \triangle CBN \text{ 或 } \triangle POQ \sim \triangle CNB.$$

①若点 P 在点 B 左侧,

$$\text{则 } \angle CBN = 45^\circ, \quad BN = 2 - m, \quad CB = 2\sqrt{2}.$$

当 $\triangle POQ \sim \triangle CBN$, 即 $\angle POQ = 45^\circ$ 时,

直线 OP 的表达式为 $y = x$,

$$\therefore -m^2 + m + 2 = m, \text{ 解得 } m = \sqrt{2} \text{ 或 } m = -\sqrt{2} \text{ (舍去)}.$$

$$\therefore OP^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4, \text{ 即 } OP = 2.$$

$$\therefore \frac{OP}{BC} = \frac{OQ}{BN}, \text{ 即 } \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{OQ}{2 - \sqrt{2}},$$

$$\text{解得 } OQ = \sqrt{2} - 1.$$

$$\therefore P(\sqrt{2}, \sqrt{2}), \quad Q(0, \sqrt{2} - 1).$$

当 $\triangle POQ \sim \triangle CNB$, 即 $\angle PQO = 45^\circ$ 时,

$$PQ = \sqrt{2}m, \quad OQ = -m^2 + m + 2 + m = -m^2 + 2m + 2,$$

$$\therefore \frac{PQ}{CB} = \frac{OQ}{NB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}} = \frac{-m^2 + 2m + 2}{2 - m},$$

解得 $m = 1 + \sqrt{5}$ (舍去) 或 $m = 1 - \sqrt{5}$ (舍去).

②若点 P 在点 B 右侧,

则 $\angle CBN = 135^\circ$, $BN = m - 2$.

当 $\triangle POQ \sim \triangle CBN$, 即 $\angle POQ = 135^\circ$ 时,

直线 OP 的表达式为 $y = -x$,

$$\therefore -m^2 + m + 2 = -m, \text{ 解得 } m = 1 + \sqrt{3} \text{ 或 } m = 1 - \sqrt{3} \text{ (舍去)},$$

$$\therefore OP = \sqrt{2}m = \sqrt{2} + \sqrt{6},$$

$$\therefore \frac{OP}{BC} = \frac{OQ}{BN}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{OQ}{\sqrt{3} - 1},$$

解得 $OQ = 1$.

$$\therefore P(1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}), Q(0, 1).$$

当 $\triangle POQ \sim \triangle CNB$, 即 $\angle PQO = 135^\circ$ 时,

$$PQ = \sqrt{2}m, OQ = |-m^2 + m + 2 + m| = m^2 - 2m - 2.$$

$$\therefore \frac{PQ}{CB} = \frac{OQ}{NB}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{2}m}{2\sqrt{2}} = \frac{m^2 - 2m - 2}{m - 2},$$

解得 $m = 1 + \sqrt{5}$ 或 $m = 1 - \sqrt{5}$ (舍去).

$$\therefore P(1 + \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}), Q(0, -2).$$

综上, $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}), Q(0, \sqrt{2} - 1)$ 或 $P(1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}), Q(0, 1)$ 或 $P(1 + \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}), Q(0, -2)$.

【点睛】 本题是二次函数的综合应用, 考查了待定系数法求函数解析式, 等腰三角形的性质与判定, 平面直角坐标系中两点距离的算法, 相似三角形的性质与判定等, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

