

鄂州市 2023 年初中学业水平考试

数学试题

学校：_____ 考生姓名：_____ 准考证号：_____

注意事项：

1. 本试卷共 8 页，满分 120 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前考生务必将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
3. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。答在试卷上无效。
4. 非选择题用 0.5 毫米黑色墨水签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。答在试卷上无效。
5. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

· 祝考试顺利 ·

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共计 30 分）

1. 10 的相反数是（ ）

- A. -10 B. 10 C. $-\frac{1}{10}$ D. $\frac{1}{10}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的定义直接求解。

【详解】解：10 的相反数是 -10。

故选：A。

【点睛】本题主要考查了相反数的定义，熟练掌握相反数的定义是解答本题的关键。

2. 下列运算正确的是（ ）

- A. $a^2 + a^3 = a^5$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ C. $a^2 \div a^3 = a^5$ D. $(a^2)^3 = a^5$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同底数幂的加法，同底数幂的乘除法，幂的乘方这些公式进行运算即可。

【详解】A 选项， a^2 和 a^3 不是同类项，不能合并，故不符合题意；B 选项， $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，正确，故符合题意；

C 选项, $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 不正确, 故不符合题意;

D 选项, $(a^2)^3 = a^6$, 不正确, 故不符合题意.

故选: B

【点睛】本题考查整式的运算, 属于基础题, 熟练掌握同底数幂的加法, 同底数幂的乘除法, 幂的乘方这些运算法则是解题的关键.

3. 中华鲟是地球上最古老的脊椎动物之一, 距今约有 140000000 年的历史, 是国家一级保护动物和长江珍稀特有鱼类保护的旗舰型物种, 3 月 28 日是中华鲟保护日, 有关部门进行放流活动, 实现鱼类物种的延续并对野生资源形成持续补充. 将 140000000 用科学记数法表示应为 ()

A. 14×10^7

B. 1.4×10^8

C. 0.14×10^9

D. 1.4×10^9

【答案】B

【解析】

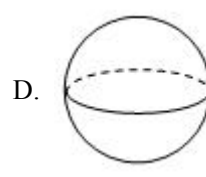
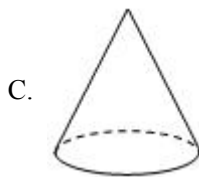
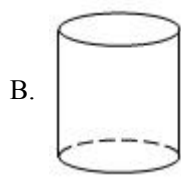
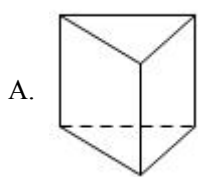
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【详解】解: $140000000 = 1.4 \times 10^8$

故选 B.

【点睛】本题考查了用科学记数法表示绝对值大于 1 的数, 掌握科学记数法的表示方法是解题的关键.

4. 下列立体图形中, 主视图是圆的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】分别得出棱柱, 圆柱, 圆锥, 球体的主视图, 得出结论.

【详解】解: 棱柱的主视图是矩形 (中间只有一条线段), 不符合题意;

圆柱的主视图是矩形, 不符合题意;

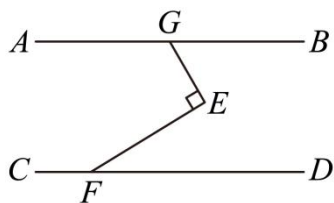
圆锥的主视图是等腰三角形, 不符合题意;

球体的主视图是圆, 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

5. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $GE \perp EF$ 于点 E . 若 $\angle BGE = 60^\circ$ ，则 $\angle EFD$ 的度数是 ()



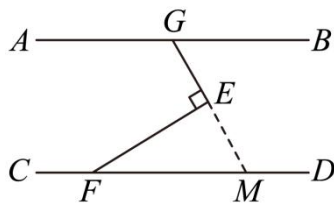
- A. 60° B. 30° C. 40° D. 70°

【答案】B

【解析】

【分析】延长 GE ，与 DC 交于点 M ，根据平行线的性质，求出 $\angle FME$ 的度数，再直角三角形的两锐角互余即可求出 $\angle EFD$.

【详解】解：延长 GE ，与 DC 交于点 M ，



$$\because AB \parallel CD, \angle BGE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle FME = \angle BGE = 60^\circ,$$

$$\because GE \perp EF,$$

$$\therefore \angle EFD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

故选：B.

【点睛】本题考查平行线的性质和直角三角形的性质，正确作出辅助线和正确利用平行线的性质是解题的关键.

6. 已知不等式组 $\begin{cases} x-a > 2 \\ x+1 < b \end{cases}$ 的解集是 $-1 < x < 1$ ，则 $(a+b)^{2023} =$ ()

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2023

【答案】B

【解析】

【分析】按照解一元一次不等式组的步骤进行计算，可得 $2+a < x < b-1$ ，再结合已知可得 $2+a = -1$ ， $b-1 = 1$ ，然后进行计算可求出 a ， b 的值，最后代入式子中进行计算即可解答.

【详解】解：
$$\begin{cases} x-a > 2 \text{①} \\ x+1 < b \text{②} \end{cases},$$

解不等式①得： $x > 2+a$,

解不等式②得： $x < b-1$,

$\therefore$ 原不等式组的解集为： $2+a < x < b-1$,

$\therefore$ 不等式组的解集是 $-1 < x < 1$,

$\therefore 2+a = -1, b-1 = 1$,

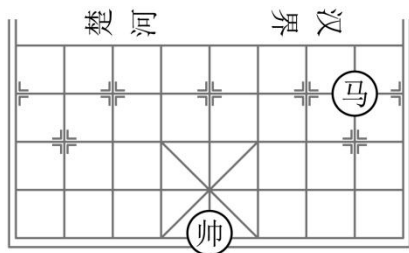
$\therefore a = -3, b = 2$,

$\therefore (a+b)^{2023} = (-3+2)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$,

故选：B.

【点睛】本题考查了根据一元一次不等式组的解集求参数，准确熟练地进行计算是解题的关键.

7. 象棋起源于中国，中国象棋文化历史悠久. 如图所示是某次对弈的残图，如果建立平面直角坐标系，使棋子“帅”位于点 $(-2, -1)$ 的位置，则在同一坐标系下，经过棋子“帅”和“马”所在的点的一次函数解析式为 ()



A. $y = x + 1$

B. $y = x - 1$

C. $y = 2x + 1$

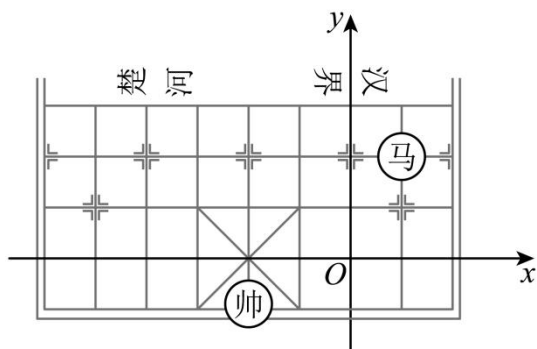
D. $y = 2x - 1$

【答案】A

【解析】

【分析】利用待定系数法求解一次函数即可得解.

【详解】解：如图，建立平面直角坐标系，可得“马”所在的点 $(1, 2)$,



设经过棋子“帅”和“马”所在的点的一次函数解析式为 $y = kx + b (k \neq 0)$,

$\therefore y = kx + b$ 过点 $(-2, -1)$ 和 $(1, 2)$,

$$\therefore \begin{cases} 2 = k + b \\ -1 = -2k + b \end{cases},$$

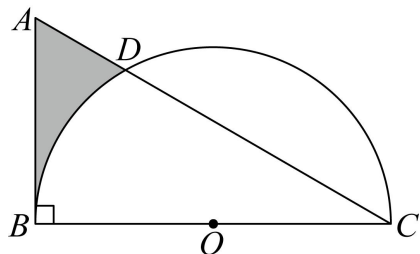
$$\text{解得} \begin{cases} k = 1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$\therefore$ 经过棋子“帅”和“马”所在的点的一次函数解析式为 $y = x + 1$,

故选 A.

【点睛】本题主要考查了待定系数法求一次函数解析式，熟练掌握待定系数法解题的关键.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $AB = 4$ ，点 O 为 BC 的中点，以 O 为圆心， OB 长为半径作半圆，交 AC 于点 D ，则图中阴影部分的面积是 ()



A. $5\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

B. $5\sqrt{3} - 4\pi$

C. $5\sqrt{3} - 2\pi$

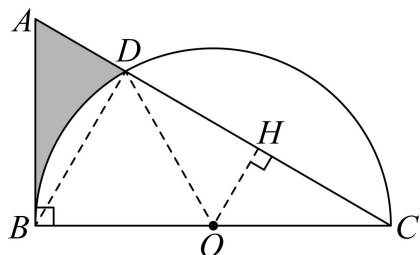
D. $10\sqrt{3} - 2\pi$

【答案】C

【解析】

【分析】连接 OD ， BD ，作 $OH \perp CD$ 交 CD 于点 H ，首先根据勾股定理求出 BC 的长度，然后利用解直角三角形求出 BD 、 CD 的长度，进而得到 $\triangle OBD$ 是等边三角形， $\angle BOD = 60^\circ$ ，然后根据 30° 角直角三角形的性质求出 OH 的长度，最后根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ACB} - S_{\triangle COD} - S_{\text{扇形} ODB}$ 进行计算即可.

【详解】解：如图所示，连接 OD ， BD ，作 $OH \perp CD$ 交 CD 于点 H



$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ， $AB = 4$ ，

$$\therefore BC = \frac{AB}{\tan \angle ACB} = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 4\sqrt{3},$$

$\therefore$ 点 O 为 BC 的中点，以 O 为圆心， OB 长为半径作半圆，

$\therefore BC$ 是半圆的直径，

$\therefore \angle CDB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = 30^\circ$ ，

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3}, \quad CD = BC \cdot \cos \angle BCD = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6,$$

$$\text{又} \because OB = OC = OD = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{3},$$

$\therefore OB = OD = BD$ ，

$\therefore \triangle OBD$ 是等边三角形，

$\therefore \angle BOD = 60^\circ$ ，

$\therefore OH \perp CD$ ， $\angle OCH = 30^\circ$ ，

$$\therefore OH = \frac{1}{2}OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ACB} - S_{\triangle COD} - S_{\text{扇形} ODB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 6 - \frac{60\pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} = 5\sqrt{3} - 2\pi.$$

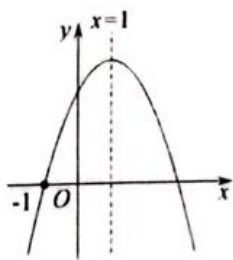
故选：C.

【点睛】本题考查了 30° 角直角三角形的性质，解直角三角形，等边三角形的性质和判定，扇形面积，勾股定理等知识，正确添加辅助线，熟练掌握和灵活运用相关知识是解题的关键.

9. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 $x = 1$ ，且过点 $(-1, 0)$ ，顶点在第一象限，其

部分图象如图所示，给出以下结论：① $ab < 0$ ；② $4a + 2b + c > 0$ ；③ $3a + c > 0$ ；④若 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$

(其中 $x_1 < x_2$) 是抛物线上的两点，且 $x_1 + x_2 > 2$ ，则 $y_1 > y_2$ ，其中正确的选项是 ()



A. ①②③

B. ①③④

C. ②③④

D. ①②④

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次函数的性质可得 $a < 0$, $b = -2a$, $b > 0$, 可判断结论①; 由 $x = 2$ 处的函数值可判断结论②; 由 $x = -1$ 处函数值可判断结论③; 根据 $x_1 + x_2 > 2$ 得到点 $A(x_1, y_1)$ 到对称轴的距离小于点 $B(x_2, y_2)$ 到对称轴的距离可判断结论④.

【详解】解: 二次函数开口向下, 则 $a < 0$,

二次函数对称轴为 $x = 1$, 则 $-\frac{b}{2a} = 1$, $b = -2a$, $b > 0$,

$\therefore ab < 0$, 故①正确;

$\because$ 过点 $(-1, 0)$,

$\therefore$ 由对称性可得二次函数与 x 轴的另一交点为 $(3, 0)$,

由函数图象可得 $x = 2$ 时 $y > 0$,

$\therefore 4a + 2b + c > 0$, 故②正确;

$\because x = -1$ 时 $y = 0$,

$\therefore a - b + c = 0$,

$b = -2a$ 代入得: $3a + c = 0$, 故③错误;

$\because$ 对称轴是直线 $x = 1$,

$\therefore$ 若 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1$, 即 $x_1 + x_2 = 2$ 时, $y_1 = y_2$,

$\therefore$ 当 $x_1 + x_2 > 2$ 时,

点 $A(x_1, y_1)$ 到对称轴的距离小于点 $B(x_2, y_2)$ 到对称轴的距离

$\because$ 二次函数开口向下

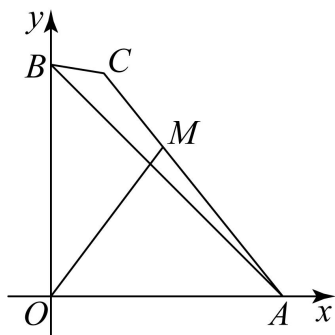
$\therefore y_1 > y_2$, 故④正确.

综上所述, 正确的选项是①②④.

故选: D.

【点睛】本题考查了二次函数的综合, 掌握二次函数的图象与各项系数符号的关系是解题关键.

10. 如图, 在平面直角坐标系中, O 为原点, $OA = OB = 3\sqrt{5}$, 点 C 为平面内一动点, $BC = \frac{3}{2}$, 连接 AC , 点 M 是线段 AC 上的一点, 且满足 $CM : MA = 1 : 2$. 当线段 OM 取最大值时, 点 M 的坐标是 ()



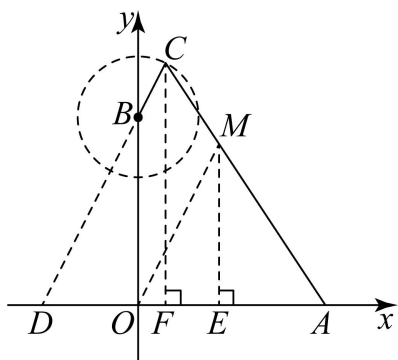
- A. $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ B. $\left(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{6}{5}\sqrt{5}\right)$ C. $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ D. $\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}, \frac{12}{5}\sqrt{5}\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可得点 C 在以点 B 为圆心， $\frac{3}{2}$ 为半径的 OB 上，在 x 轴的负半轴上取点 $D\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ ，连接 BD ，分别过 C 、 M 作 $CF \perp OA$ ， $ME \perp OA$ ，垂足为 F 、 E ，先证 $\triangle OAM \sim \triangle DAC$ ，得 $\frac{OM}{CD} = \frac{OA}{AD} = \frac{2}{3}$ ，从而当 CD 取得最大值时， OM 取得最大值，结合图形可知当 D 、 B 、 C 三点共线，且点 B 在线段 DC 上时， CD 取得最大值，然后分别证 $\triangle BDO \sim \triangle CDF$ ， $\triangle AEM \sim \triangle AFC$ ，利用相似三角形的性质即可求解。

【详解】解： $\because$ 点 C 为平面内一动点， $BC = \frac{3}{2}$ ，
 $\therefore$ 点 C 在以点 B 为圆心， $\frac{3}{2}$ 为半径的 OB 上，
 在 x 轴的负半轴上取点 $D\left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ ，连接 BD ，分别过 C 、 M 作 $CF \perp OA$ ， $ME \perp OA$ ，垂足为 F 、 E ，



$$\because OA = OB = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore AD = OD + OA = \frac{9\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \frac{OA}{AD} = \frac{2}{3},$$

$$\because CM:MA=1:2,$$

$$\therefore \frac{OA}{AD} = \frac{2}{3} = \frac{CM}{AC},$$

$$\because \angle OAM = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle OAM \sim \triangle DAC,$$

$$\therefore \frac{OM}{CD} = \frac{OA}{AD} = \frac{2}{3},$$

$\therefore$ 当 CD 取得最大值时, OM 取得最大值, 结合图形可知当 D, B, C 三点共线, 且点 B 在线段 DC 上时, CD 取得最大值,

$$\because OA = OB = 3\sqrt{5}, \quad OD = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{15}{2},$$

$$\therefore CD = BC + BD = 9,$$

$$\because \frac{OM}{CD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore OM = 6,$$

$$\because y \text{ 轴} \perp x \text{ 轴}, \quad CF \perp OA,$$

$$\therefore \angle DOB = \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BDO = \angle CDF,$$

$$\therefore \triangle BDO \sim \triangle CDF,$$

$$\therefore \frac{OB}{CF} = \frac{BD}{CD} \text{ 即 } \frac{3\sqrt{5}}{CF} = \frac{15}{9},$$

$$\text{解得 } CF = \frac{18\sqrt{5}}{5},$$

同理可得, $\triangle AEM \sim \triangle AFC$,

$$\therefore \frac{ME}{CF} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{3} \text{ 即 } \frac{ME}{\frac{18\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{3},$$

$$\text{解得 } ME = \frac{12\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore OE = \sqrt{OM^2 - ME^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{12\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5},$$

∴当线段 OM 取最大值时，点 M 的坐标是 $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \frac{12\sqrt{5}}{5}\right)$ ，

故选 D.

【点睛】本题主要考查了勾股定理、相似三角形的判定及性质、圆的一般概念以及坐标与图形，熟练掌握相似三角形的判定及性质是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共计 18 分）

11. 计算： $\sqrt{16} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】4

【解析】

【分析】根据算术平方根的概念求解即可. 算术平方根的定义：一个非负数的正的平方根，即为这个数的算术平方根，由此即可求出结果.

【详解】解：原式 $= \sqrt{4^2} = 4$.

故答案为 4.

【点睛】此题主要考查了算术平方根的定义，算术平方根的概念易与平方根的概念混淆而导致错误.

12. 为了加强中学生“五项管理”，葛洪学校就“作业管理”、“睡眠管理”、“手机管理”、“读物管理”、“体质管理”五个方面对各班进行考核打分（各项满分均为 100），九（1）班的五项得分依次为 95，90，85，90，92，则这组数据的众数是_____.

【答案】90

【解析】

【分析】众数是在一组数据中，出现次数最多的数据.

【详解】众数是在一组数据中，出现次数最多的数据，这组数据中 90 出现 2 次，出现的次数最多，故这组数据的众数为 90.

故答案为：90.

【点睛】本题考查了众数，众数是在一组数据中，出现次数最多的数据，注意：在一组数据中，众数可能不止一个.

13. 实数 m, n 分别满足 $m^2 - 3m + 2 = 0, n^2 - 3n + 2 = 0$ ，且 $m \neq n$ ，则 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ 的值是_____.

【答案】 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】直接利用根与系数的关系进行求解即可.

【详解】解：由题可知， m 和 n 是 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的两个根，

所以 $m + n = 3$, $mn = 2$,

所以 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{m+n}{mn} = \frac{3}{2}$;

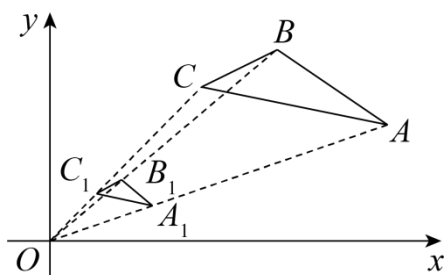
故答案为: $\frac{3}{2}$.

【点睛】本题考查了一元二次方程根与系数的关系，解题关键是掌握“若一元二次方程

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的两个根分别为 x_1 和 x_2 ，则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ ”.

14. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 位似，原点 O 是位似中心，且 $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. 若 $A(9,3)$,

则 A_1 点的坐标是_____.



【答案】(3,1)

【解析】

【分析】直接利用位似图形的性质得出相似比进而得出对应线段的长.

【详解】解：设 $A_1(m, n)$

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 位似，原点 O 是位似中心，且 $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. 若 $A(9,3)$,

$\therefore$ 位似比为 $\frac{3}{1}$,

$\therefore \frac{9}{m} = \frac{3}{1}, \frac{3}{n} = \frac{3}{1}$,

解得 $m = 3$, $n = 1$,

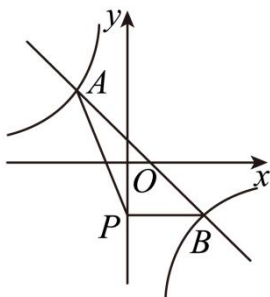
$\therefore A_1(3,1)$

故答案为: (3,1)

【点睛】此题主要考查了位似变换，正确得出相似比是解题关键.

15. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y_1 = k_1x + b$ 与双曲线 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ (其中 $k_1 \cdot k_2 \neq 0$) 相交于 $A(-2,3)$,

$B(m, -2)$ 两点，过点 B 作 $BP \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 P ，则 $\triangle ABP$ 的面积是_____.



【答案】 $\frac{15}{2}$

【解析】

【分析】把 $A(-2, 3)$ 代入到 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ 可求得 k_2 的值，再把 $B(m, -2)$ 代入双曲线函数的表达式中，可求得 m 的值，进而利用三角形的面积公式进行求解即可.

【详解】 $\because$ 直线 $y_1 = k_1x + b$ 与双曲线 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ (其中 $k_1 \cdot k_2 \neq 0$) 相交于 $A(-2, 3)$, $B(m, -2)$ 两点,

$$\therefore k_2 = -2 \times 3 = -2m$$

$$\therefore k_2 = -6, \quad m = 3,$$

$$\therefore \text{双曲线的表达式为: } y_2 = -\frac{6}{x}, \quad B(3, -2),$$

$\because$ 过点 B 作 $BP \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 P ,

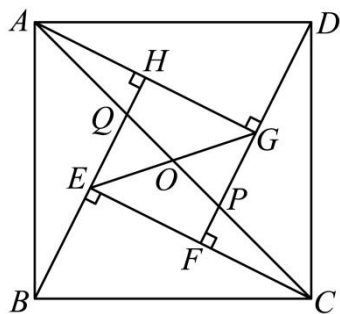
$$\therefore BP = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times (3 + 2) = \frac{15}{2},$$

故答案为 $\frac{15}{2}$.

【点睛】本题是一次函数与反比例函数的交点问题，考查了待定系数法求反比例函数，反比例函数图象上点的坐标特征，三角形的面积，数形结合是解答此题的关键.

16. 2002 年的国际数学家大会在中国北京举行，这是 21 世纪全世界数学家的第一次大聚会. 这次大会的会徽选定了我国古代数学家赵爽用来证明勾股定理的弦图，世人称之为“赵爽弦图”. 如图，用四个全等的直角三角形 ($Rt\triangle AHB \cong Rt\triangle BEC \cong Rt\triangle CFD \cong Rt\triangle DGA$) 拼成“赵爽弦图”，得到正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ ，连接 AC 和 EG ， AC 与 DF 、 EG 、 BH 分别相交于点 P 、 O 、 Q ，若 $BE:EQ = 3:2$ ，则 $\frac{OP}{OE}$ 的值是_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】

【分析】 设 $EC = x (x > 0)$, $EQ = 2a (a > 0)$, 则 $BE = 3a$, 证明 $\triangle AHQ \sim \triangle CEQ$, 利用相似三角形的性质求出 $EC = BH = 6a$, 可得 $QH = a$, $EH = 3a$, 利用勾股定理求出 BC 和 AQ , 进而可得 OQ 的长, 再证明 $\triangle QEO \cong \triangle PGO$ (SAS), 可得 $OP = OQ = \frac{\sqrt{10}}{2}a$, 然后根据正方形的性质求出 OE , 即可得出答案.

【详解】 解: 设 $EC = x (x > 0)$, $EQ = 2a (a > 0)$, 则 $BE = 3a$,

$$\therefore \angle AHQ = \angle CEQ = 90^\circ, \quad \angle AQH = \angle CQE,$$

$$\therefore \triangle AHQ \sim \triangle CEQ,$$

$$\therefore \frac{QH}{QE} = \frac{AH}{EC},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AHB \cong \text{Rt}\triangle BEC,$$

$$\therefore AH = BE = 3a, \quad BH = EC = x,$$

$$\therefore QH = BH - BE - EQ = x - 5a,$$

$$\therefore \frac{x - 5a}{2a} = \frac{3a}{x},$$

$$\text{整理得: } x^2 - 5ax - 6a^2 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 6a, \quad x_2 = -a \text{ (舍去),}$$

$$\text{即 } EC = BH = 6a,$$

$$\therefore QH = a, \quad EH = 3a,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BE^2 + EC^2} = 3\sqrt{5}a, \quad AQ = \sqrt{AH^2 + QH^2} = \sqrt{10}a,$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}BC = 3\sqrt{10}a,$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}AC = \frac{3\sqrt{10}}{2}a$$

$$\therefore OQ = OA - AQ = \frac{\sqrt{10}}{2}a,$$

$\therefore$ 四边形 $HEFG$ 是正方形,

$$\therefore \angle QEO = \angle PGO, \quad OE = OG,$$

$$\text{又} \because \angle QOE = \angle POG,$$

$$\therefore \triangle QEO \cong \triangle PGO (\text{SAS}),$$

$$\therefore OP = OQ = \frac{\sqrt{10}}{2}a,$$

$$\text{又} \because EG = \sqrt{2}EH = 3\sqrt{2}a,$$

$$\therefore OE = \frac{1}{2}EG = \frac{3\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\therefore \frac{OP}{OE} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}a}{\frac{3\sqrt{2}}{2}a} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

【点睛】 本题考查了正方形的性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，解一元二次方程以及二次根式的混合运算等知识，证明 $\triangle AHQ \sim \triangle CEQ$ ，求出 EC 的长是解题的关键.

三、解答题（本大题共 8 小题，17~21 题每题 8 分，22~23 每题 10 分，24 题 12 分，共计 72 分）

17. 先化简，再求值: $\frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1}$, 其中 $a=2$.

【答案】 $\frac{1}{a+1}, \frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】 根据题意，先进行同分母分式加减运算，再将 $a=2$ 代入即可得解.

【详解】解：原式 $= \frac{a}{a^2-1} - \frac{1}{a^2-1}$

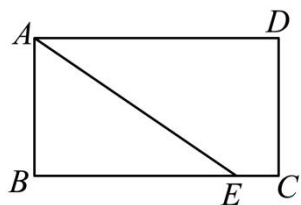
$$= \frac{a-1}{(a-1)(a+1)}$$

$$= \frac{1}{a+1},$$

当 $a=2$ 时，原式 $= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$.

【点睛】本题主要考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的加减，约分等相关计算法则是解决本题的关键.

18. 如图，点 E 是矩形 $ABCD$ 的边 BC 上的一点，且 $AE = AD$.



(1) 尺规作图 (请用 2B 铅笔)：作 $\angle DAE$ 的平分线 AF ，交 BC 的延长线于点 F ，连接 DF 。(保留作图痕迹，不写作法)；

(2) 试判断四边形 $AEFD$ 的形状，并说明理由。

【答案】(1) 见解析 (2) 四边形 $AEFD$ 是菱形，理由见解析

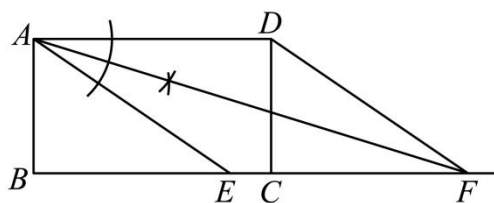
【解析】

【分析】(1) 根据题意结合尺规作角平分线的方法作图即可；

(2) 根据矩形的性质和平行线的性质得出 $\angle DAF = \angle AFE$ ，结合角平分线的定义可得 $\angle EFA = \angle EAF$ ，则 $AE = EF$ ，然后根据平行四边形和菱形的判定定理得出结论。

【小问 1 详解】

解：如图所示：



【小问 2 详解】

四边形 $AEFD$ 是菱形；

理由： $\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \angle DAF = \angle AFE,$$

$$\because AF \text{ 平分 } \angle DAE,$$

$$\therefore \angle DAF = \angle EAF,$$

$$\therefore \angle EFA = \angle EAF,$$

$$\therefore AE = EF,$$

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore AD = EF,$$

$$\therefore AD \parallel EF,$$

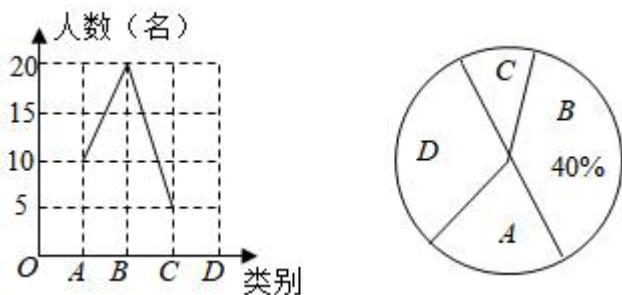
$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形,

$$\text{又} \because AE = AD,$$

$\therefore$ 平行四边形 $AEFD$ 是菱形.

【点睛】 本题主要考查了尺规作角平分线，矩形的性质，平行线的性质，等腰三角形的判定，平行四边形的判定以及菱形的判定等知识，熟练掌握相关判定定理和性质定理是解题的关键.

19. 为庆祝建党 100 周年，让同学们进一步了解中国科技的快速发展，东营市某中学九（1）班团支部组织了一次手抄报比赛. 该班每位同学从 A . “北斗卫星”； B . “5G 时代”； C . “东风快递”； D . “智轨快运”四个主题中任选一个自己喜欢的主题. 统计同学们所选主题的频数，绘制成以下不完整的统计图，请根据统计图中的信息解答下列问题：



- (1) 九（1）班共有_____名学生；
- (2) 补全折线统计图；
- (3) D 所对应扇形圆心角的大小为_____；
- (4) 小明和小丽从 A 、 B 、 C 、 D 四个主题中任选一个主题，请用列表或画树状图的方法求出他们选择相同主题的概率.

【答案】 (1) 50；(2) 见解析；(3) 108° ；(4) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 (1) 用 B 组频数除以所占百分比即可求解；

(2) 用 50 减去 A 、 B 、 C 组频数，求出 D 组频数，即可补全折线统计图；

(3) 用 360° 乘以 D 组所占百分比即可求解；

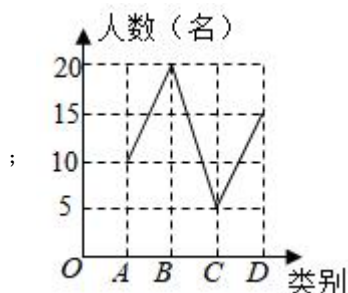
(4) 列表得出所有等可能结果，根据概率公式即可求解.

【详解】 (1) $20 \div 40\% = 50$ (人),

故答案为：50；

(2) $50-10-20-5=15$ (人)，

补全折线统计图如图：



(3) $360^\circ \times \frac{15}{50} = 108^\circ$ ，

故答案为： 108° ；

(4) 列表如下：

小明 小丽	A	B	C	D
A	(A, A)	(B, A)	(C, A)	(D, A)
B	(A, B)	(B, B)	(C, B)	(D, B)
C	(A, C)	(B, C)	(C, C)	(D, C)
D	(A, D)	(B, D)	(C, D)	(D, D)

由列表可知，一共有 16 种等可能的结果，他们选择相同主题的结果有 4 种，

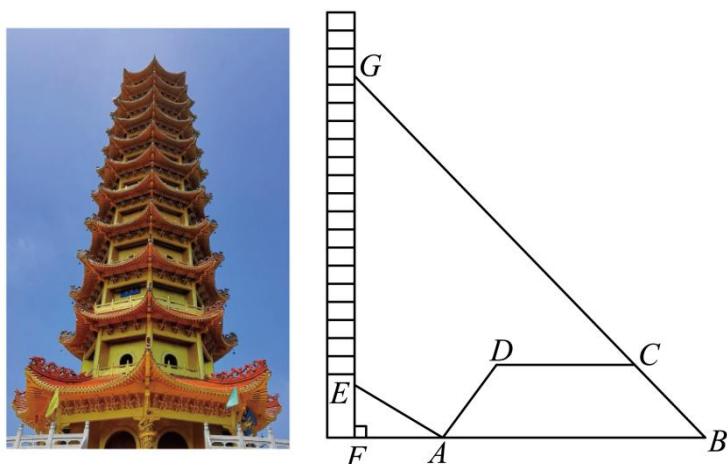
所以 $P(\text{相同主题}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ 。

【点睛】本题考查了折线统计图与扇形统计图，求概率等知识，理解两幅统计图提供的公共信息是解题第

(1) (2) (3) 步关键，列表得出所有等可能的结果是解题第 (4) 步关键。

20. 鄂州市莲花山是国家 4A 级景区，元明塔造型独特，是莲花山风景区的核心景点，深受全国各地旅游爱好者的青睐。今年端午节，景区将举行大型包粽子等节日庆祝活动。如图 2，景区工作人员小明准备从元明塔的点 G 处挂一条大型竖直条幅到点 E 处，挂好后，小明进行实地测量，从元明塔底部 F 点沿水平方向步行 30 米到达自动扶梯底端 A 点，在 A 点用仪器测得条幅下端 E 的仰角为 30° ；接着他沿自动扶梯 AD 到达扶梯顶端 D 点，测得点 A 和点 D 的水平距离为 15 米，且 $\tan \angle DAB = \frac{4}{3}$ ；然后他从 D 点又沿水平方向

行走了 45 米到达 C 点，在 C 点测得条幅上端 G 的仰角为 45° 。（图上各点均在同一个平面内，且 G, C, B 共线， F, A, B 共线， G, E, F 共线， $CD \parallel AB$ ， $GF \perp FB$ ）。



- (1) 求自动扶梯 AD 的长度；
- (2) 求大型条幅 GE 的长度。（结果保留根号）

【答案】(1) 25 米 (2) $(110 - 10\sqrt{3})$ 米

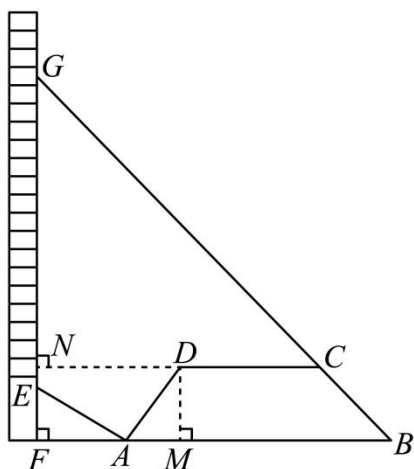
【解析】

【分析】(1) 过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M ，由 $\tan \angle DAB = \frac{4}{3}$ 可得 $\frac{DM}{AM} = \frac{4}{3}$ ，求出 DM 的长，利用勾股定理即可求解；

(2) 过点 D 作 $DN \perp GE$ 于 N ，则四边形 $DMFN$ 是矩形，得 $NF = DM$ ， $DN = FM$ ，由已知计算得出 CN 的长度，解直角三角形得出 GN 的长度，在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中求得 EF 的长度，利用线段的和差，即可解决问题。

【小问 1 详解】

解：过 D 作 $DM \perp AB$ 于 M ，如图：



在 $\text{Rt}\triangle ADM$ 中, $\tan \angle DAM = \frac{DM}{AM} = \frac{4}{3}$,

$\therefore AM = 15$ (米),

$\therefore DM = 20$ (米),

由勾股定理得 $AD = \sqrt{AM^2 + DM^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$ (米)

【小问 2 详解】

如图, 过点 D 作 $DN \perp GE$ 于 N ,

$\therefore DM \perp AB$, $\angle GFB = 90^\circ$

$\therefore$ 四边形 $DMFN$ 是矩形,

$\therefore NF = DM = 20$ (米), $DN = FM = AF + AM = 30 + 15 = 45$ (米),

由题意, $CN = CD + DN = 45 + 45 = 90$ (米),

$\therefore \angle DCG = 45^\circ$,

$\therefore \tan \angle GCN = 1 = \frac{GN}{CN}$,

$\therefore GN = 90$ (米), $GF = GN + NF = 90 + 20 = 110$ (米),

由题意, $\angle EAF = 30^\circ$, $AF = 30$ (米),

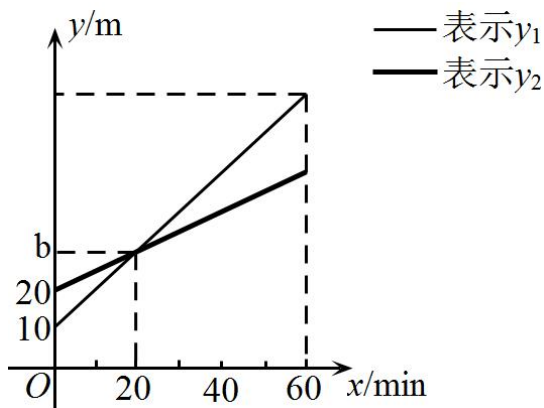
$\therefore \tan \angle EAF = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{EF}{AF}$,

$\therefore EF = 10\sqrt{3}$ (米),

$\therefore GE = GF - EF = (110 - 10\sqrt{3})$ 米

【点睛】 本题考查了解直角三角形的应用—仰角俯角问题、勾股定理、矩形的判定与性质等知识, 熟练掌握锐角三角函数定义, 正确作出辅助线构造直角三角形是解题的关键.

21. 1 号探测气球从海拔 10m 处出发, 以 1m/min 的速度竖直上升. 与此同时, 2 号探测气球从海拔 20m 处出发, 以 a m/min 的速度竖直上升. 两个气球都上升了 1h. 1 号、2 号气球所在位置的海拔 y_1 , y_2 (单位: m) 与上升时间 x (单位: min) 的函数关系如图所示. 请根据图象回答下列问题:



(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$, $b = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 请分别求出 y_1 , y_2 与 x 的函数关系式;

(3) 当上升多长时间时, 两个气球的海拔竖直高度差为 5m?

【答案】(1) $\frac{1}{2}$, 30

(2) $y_1 = x + 10$, $y_2 = \frac{1}{2}x + 20$;

(3) 10min 或 30min

【解析】

【分析】(1) 根据 1 号探测气球的出发海拔和速度即可计算 b 的值, 根据 b 的值、2 号探测气球的出发海拔和运动时间可计算 2 号探测气球的速度可计算 a 的值;

(2) 由 (1) 可得 y_1 与 y_2 函数图象的交点坐标为 $(20, 30)$, 分别代入计算即可;

(3) 由题意可得 $y_1 - y_2 = 5$ 或 $y_2 - y_1 = 5$, 分别计算即可.

【小问 1 详解】

解: $b = 10 + 20 \times 1 = 30$, $a = (30 - 20) \div 20 = \frac{1}{2}$,

故答案为: $\frac{1}{2}$, 30;

【小问 2 详解】

由 (1) 可得 y_1 与 y_2 函数图象的交点坐标为 $(20, 30)$,

设 $y_1 = k_1x + 10$, $y_2 = k_2x + 20$,

将 $(20, 30)$ 分别代入可得: $30 = 20k_1 + 10$, $30 = 20k_2 + 20$

解得: $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{2}$,

$$\therefore y_1 = x + 10, \quad y_2 = \frac{1}{2}x + 20;$$

【小问3详解】

由题意可得 $y_1 - y_2 = 5$ 或 $y_2 - y_1 = 5$,

$$\text{当 } y_1 - y_2 = 5 \text{ 时, } x + 10 - \left(\frac{1}{2}x + 20\right) = 5,$$

解得 $x = 30$,

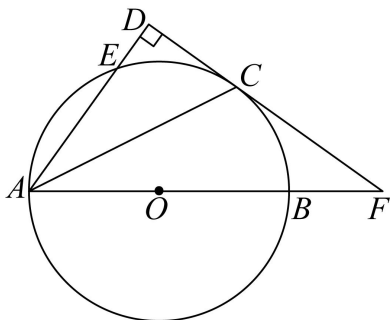
$$\text{当 } y_2 - y_1 = 5 \text{ 时, } \frac{1}{2}x + 20 - (x + 10) = 5,$$

解得 $x = 10$,

$\therefore$ 当上升 10min 或 30min 时, 两个气球的海拔竖直高度差为 5m.

【点睛】本题考查了一次函数的应用, 从图中获取信息是解题的关键.

22. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, E 为 $\odot O$ 上一点, 点 C 为 EB 的中点, 过点 C 作 $CD \perp AE$, 交 AE 的延长线于点 D , 延长 DC 交 AB 的延长线于点 F .



(1) 求证: CD 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $DE = 1$, $DC = 2$, 求 $\odot O$ 的半径长.

【答案】(1) 证明见解析

$$(2) \frac{5}{2}$$

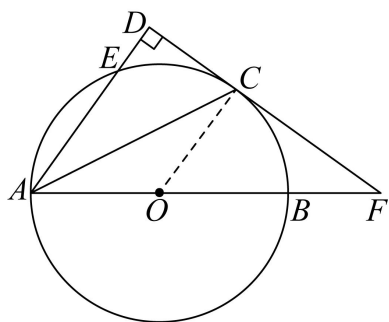
【解析】

【分析】(1) 连接 OC , 根据弦、弧、圆周角的关系可证 $\angle DAC = \angle CAF$, 根据圆的性质得 $\angle OAC = \angle OCA$, 证明 $OC \parallel AD$, 得到 $\angle OCF = \angle D = 90^\circ$, 根据切线的判定定理证明;

(2) 连接 BC , CE , 根据勾股定理得到 $CE = \sqrt{5}$ 的长, 根据等弧对等弦得到 $EC = CB = \sqrt{5}$, 根据圆内接四边形对角互补得 $\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ$, 推出 $\angle DEC = \angle ABC$, 证明 $\triangle DEC \sim \triangle CBA$, 利用相似三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

证明：连接 OC ，



$\because$ 点 C 为 EB 的中点,

$$\therefore \widehat{EC} = \widehat{CB},$$

$$\therefore \angle DAC = \angle CAF,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA$$

$$\therefore \angle DAC = \angle COA$$

$$\therefore OC \parallel AD,$$

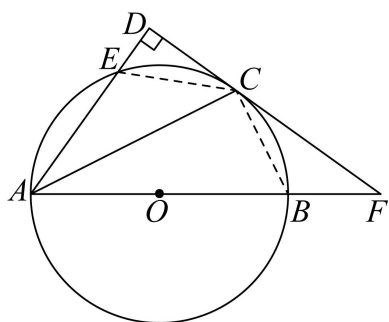
$$\therefore \angle OCF = \angle D = 90^\circ,$$

$\because OC$ 为半径,

$\therefore DC$ 为 $\odot O$ 切线;

【小问 2 详解】

解：连接 BC ， CE ，



$$\because CD \perp AD,$$

$$\therefore \angle D = 90^\circ,$$

$$\because DE = 1, DC = 2,$$

$$\therefore CE = \sqrt{CD^2 + DE^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$\therefore D$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{EC} = \widehat{CB},$$

$$\therefore EC = CB = \sqrt{5},$$

$\therefore AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC + \angle AEC = 180^\circ, \quad \angle ABC + \angle AEC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle DEC \sim \triangle CBA,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{CE}{AB},$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{AB},$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$AO = \frac{1}{2} AB = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径长为 } \frac{5}{2}.$$

【点睛】本题考查了切线的判定和性质，勾股定理，相似三角形的判定和性质，正确地作出辅助线是解题的关键.

23. 某数学兴趣小组运用《几何画板》软件探究 $y = ax^2 (a > 0)$ 型抛物线图象. 发现: 如图 1 所示, 该类型

图象上任意一点 P 到定点 $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ 的距离 PF , 始终等于它到定直线 $l: y = -\frac{1}{4a}$ 的距离 PN (该结论不

需要证明). 他们称: 定点 F 为图象的焦点, 定直线 l 为图象的准线, $y = -\frac{1}{4a}$ 叫做抛物线的准线方程. 准

线 l 与 y 轴的交点为 H . 其中原点 O 为 FH 的中点, $FH = 2OF = \frac{1}{2a}$. 例如, 抛物线 $y = 2x^2$, 其焦点坐

标为 $F\left(0, \frac{1}{8}\right)$, 准线方程为 $l: y = -\frac{1}{8}$, 其中 $PF = PN$, $FH = 2OF = \frac{1}{4}$.

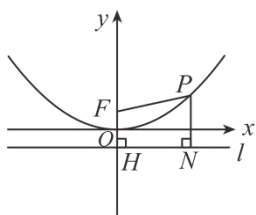


图1

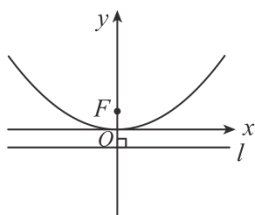


图2

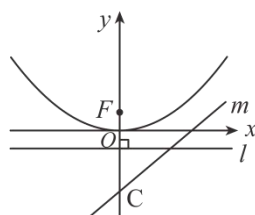


图3

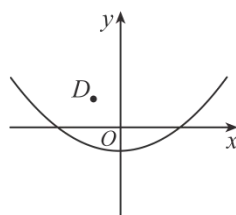


图4

【基础训练】

(1) 请分别直接写出抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点坐标和准线 l 的方程：_____，_____；

【技能训练】

(2) 如图 2，已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上一点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0$) 到焦点 F 的距离是它到 x 轴距离的 3 倍，求点 P 的坐标；

【能力提升】

(3) 如图 3，已知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F ，准线方程为 l 。直线 $m: y = \frac{1}{2}x - 3$ 交 y 轴于点 C ，抛物线上动点 P 到 x 轴的距离为 d_1 ，到直线 m 的距离为 d_2 ，请直接写出 $d_1 + d_2$ 的最小值；

【拓展延伸】

该兴趣小组继续探究还发现：若将抛物线 $y = ax^2$ ($a > 0$) 平移至 $y = a(x-h)^2 + k$ ($a > 0$)。抛物线

$y = a(x-h)^2 + k$ ($a > 0$) 内有一定点 $F\left(h, k + \frac{1}{4a}\right)$ ，直线 l 过点 $M\left(h, k - \frac{1}{4a}\right)$ 且与 x 轴平行。当动点 P 在

该抛物线上运动时，点 P 到直线 l 的距离 PP_1 始终等于点 P 到点 F 的距离（该结论不需要证明）。例如：抛

物线 $y = 2(x-1)^2 + 3$ 上的动点 P 到点 $F\left(1, \frac{25}{8}\right)$ 的距离等于点 P 到直线 $l: y = \frac{23}{8}$ 的距离。

请阅读上面的材料，探究下题：

(4) 如图 4，点 $D\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ 是第二象限内一定点，点 P 是抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 上一动点，当 $PO + PD$ 取最小值时，请求出 $\triangle POD$ 的面积。

【答案】 (1) $(0, 1)$ ， $y = -1$ ；

(2) $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ ；

(3) $2\sqrt{5} - 1$

(4) $\frac{9}{8}$

【解析】

【分析】 (1) 根据题中所给抛物线的焦点坐标和准线方程的定义求解即可；

(2) 利用两点间距离公式结合已知条件列式整理得 $x_0^2 = 8y_0^2 + 2y_0 - 1$ ，然后根据 $y_0 = \frac{1}{4}x_0^2$ ，求出 y_0 ，进而可得 x_0 ，问题得解；

(3) 过点 P 作 $PE \perp$ 直线 m 交于点 E ，过点 P 作 $PG \perp$ 准线 l 交于点 G ，结合题意和 (1) 中结论可知 $PG = PF = d_1 + 1$ ， $PE = d_2$ ，根据两点之间线段最短可得当 F ， P ， E 三点共线时， $d_1 + d_2$ 的值最小；

待定系数法求直线 PE 的解析式，求得点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{5}-1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ，根据点 E 是直线 PE 和直线 m 的交点，求得点 E 的坐标为 $(4, -1)$ ，即可求得 d_1 和 d_2 的值，即可求得；

(4) 根据题意求得抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 的焦点坐标为 $F(0, 0)$ ，准线 l 的方程为 $y = -2$ ，过点 P 作 $PG \perp$ 准线 l 交于点 G ，结合题意和 (1) 中结论可知 $PG = PF$ ，则 $PO + PD = PG + PD$ ，根据两点之间线段最短可得当 D ， P ， G 三点共线时， $PO + PD$ 的值最小；求得 $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ，即可求得 $\triangle POD$ 的面积。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 中 $a = \frac{1}{4}$ ，

$$\therefore \frac{1}{4a} = 1, \quad -\frac{1}{4a} = -1,$$

$\therefore$ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点坐标为 $(0, 1)$ ，准线 l 的方程为 $y = -1$ ，

故答案为： $(0, 1)$ ， $y = -1$ ；

【小问 2 详解】

解：由 (1) 知抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点 F 的坐标为 $(0, 1)$ ，

$\therefore$ 点 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0$) 到焦点 F 的距离是它到 x 轴距离的 3 倍，

$$\therefore \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2} = 3y_0, \text{ 整理得: } x_0^2 = 8y_0^2 + 2y_0 - 1,$$

$$\text{又} \because y_0 = \frac{1}{4}x_0^2,$$

$$\therefore 4y_0 = 8y_0^2 + 2y_0 - 1$$

$$\text{解得: } y_0 = \frac{1}{2} \text{ 或 } y_0 = -\frac{1}{4} \text{ (舍去),}$$

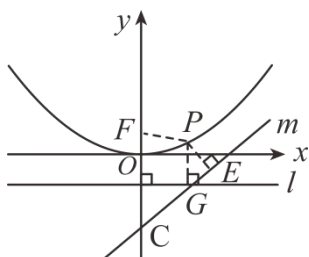
$$\therefore x_0 = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$;

【小问 3 详解】

解：过点 P 作 $PE \perp$ 直线 m 交于点 E ，过点 P 作 $PG \perp$ 准线 l 交于点 G ，结合题意和 (1) 中结论可知

$PG = PF = d_1 + 1$ ， $PE = d_2$ ，如图：



若使得 $d_1 + d_2$ 取最小值，即 $PF + PE - 1$ 的值最小，故当 F ， P ， E 三点共线时， $PF + PE - 1 = EF - 1$ ，

即此刻 $d_1 + d_2$ 的值最小；

$\because$ 直线 PE 与直线 m 垂直，故设直线 PE 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + b$ ，

将 $F(0, 1)$ 代入解得： $b = 1$ ，

$\therefore$ 直线 PE 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ，

$\because$ 点 P 是直线 PE 和抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 的交点，

令 $\frac{1}{4}x^2 = -\frac{1}{2}x + 1$ ，解得： $x_1 = \sqrt{5} - 1$ ， $x_2 = -\sqrt{5} - 1$ （舍去），

故点 P 的坐标为 $\left(\sqrt{5} - 1, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)$ ，

$\therefore d_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ，

$\because$ 点 E 是直线 PE 和直线 m 的交点，

令 $-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{1}{2}x - 3$ ，解得： $x = 4$ ，

故点 E 的坐标为 $(4, -1)$ ，

$\therefore d_2 = \sqrt{(4 - \sqrt{5} + 1)^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} + 1\right)^2} = \frac{5\sqrt{5} - 5}{2}$ ，

$$d_1 + d_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{5\sqrt{5}-5}{2} = 2\sqrt{5}-1.$$

即 $d_1 + d_2$ 的最小值为 $2\sqrt{5}-1$.

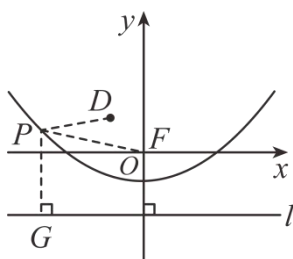
【小问 4 详解】

解：∵ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 中 $a = \frac{1}{4}$,

$$\therefore \frac{1}{4a} = 1, \quad -\frac{1}{4a} = -1,$$

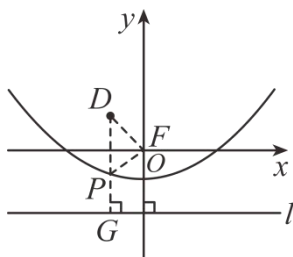
∴ 抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 的焦点坐标为 $F(0,0)$, 准线 l 的方程为 $y = -2$,

过点 P 作 $PG \perp$ 准线 l 交于点 G , 结合题意和 (1) 中结论可知 $PG = PF$, 则 $PO + PD = PG + PD$, 如图:



若使得 $PO + PD$ 取最小值, 即 $PG + PD$ 的值最小, 故当 D, P, G 三点共线时,

$PO + PD = PG + PD = DG$, 即此刻 $PO + PD$ 的值最小; 如图:



∵ 点 D 的坐标为 $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $DG \perp$ 准线 l ,

∴ 点 P 的横坐标为 -1 , 代入 $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ 解得 $y = -\frac{3}{4}$,

$$\text{即 } P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right), \quad OP = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4},$$

$$\text{则 } \triangle POD \text{ 的面积为 } S_{\triangle POD} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \times 1 = \frac{9}{8}.$$

【点睛】 本题考查了两点间距离公式结合, 两点之间线段最短, 三角形的面积, 一次函数的交点坐标, 一次函数与抛物线的交点坐标等, 解决问题的关键是充分利用新知识的结论.

24. 如图 1, 在平面直角坐标系中, 直线 $l \perp y$ 轴, 交 y 轴的正半轴于点 A , 且 $OA = 2$, 点 B 是 y 轴右侧直

线 l 上的一动点，连接 OB 。

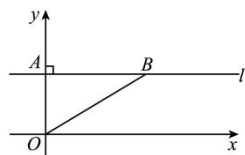


图1

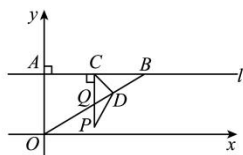


图2

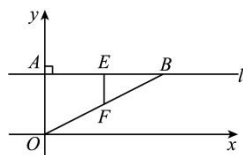


图3

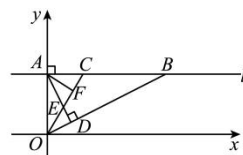


图4

(1) 请直接写出点 A 的坐标；

(2) 如图 2，若动点 B 满足 $\angle ABO = 30^\circ$ ，点 C 为 AB 的中点， D 点为线段 OB 上一动点，连接 CD 。在平面内，将 $\triangle BCD$ 沿 CD 翻折，点 B 的对应点为点 P ， CP 与 OB 相交于点 Q ，当 $CP \perp AB$ 时，求线段 DQ 的长；

(3) 如图 3，若动点 B 满足 $\frac{AB}{OA} = 2$ ， EF 为 $\triangle OAB$ 的中位线，将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转，当点 O 、 E 、 F 三点共线时，求直线 EB 与 x 轴交点的坐标；

(4) 如图 4， OC 平分 $\angle AOB$ 交 AB 于点 C ， $AD \perp OB$ 于点 D ，交 OC 于点 E ， AF 为 $\triangle AEC$ 的一条中线。设 $\triangle ACF$ ， $\triangle ODE$ ， $\triangle OAC$ 的周长分别为 C_1 ， C_2 ， C_3 。试探究：在 B 点的运动过程中，当 $\frac{2C_1 + C_2}{C_3} = \frac{11}{8}$ 时，请直接写出点 B 的坐标。

【答案】(1) (0,2)

(2) $\sqrt{3}-1$

(3) (4,0) 或 $(\frac{20}{3}, 0)$

(4) $(2\sqrt{3}, 2)$

【解析】

【分析】(1) 根据 $OA = 2$ ，点 A 位于 y 轴的正半轴即可得出答案；

(2) 根据折叠性质和特殊角解三角形，先求出 $BC = \sqrt{3}$ ， $QB = 2$ ，再过点 D 作 $DH \perp AB$ ，得出 $CH = DH$ ， $BH = \sqrt{3}DH$ 解三角形即可求出 $DB = 3 - \sqrt{3}$ ，从而求出 $DQ = BQ - BD = \sqrt{3} - 1$ ，

(3) 将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转，当点 O 、 E 、 F 三点共线时，有两种情况，当将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转 90° ，可得点 E 、 F 恰好落在 x 轴， $OE = AB = 4$ ，从而可得直线 EB 与 x 轴交点的坐标；当将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转到 OB 上方时，可得 $Rt\triangle OAB \cong Rt\triangle BOE(HL)$ ，从而得出

$\angle ABO = \angle BOE$ ， $OE = AB = 4$ ，继而可求 $\cos \angle ARO = \frac{AR}{OR} = \frac{3}{5}$ ，再由 $OK = \frac{OE}{\cos \angle ARO}$ 即可求出交点

坐标.

(4) 由已知可证明 $\triangle OAC \sim \triangle ODE \sim \triangle AFC$, 进而可得 $\frac{2c_1 + c_2}{c_3} = \frac{2c_1}{c_3} + \frac{c_2}{c_3} = \frac{2AF + OD}{OA} = \frac{11}{8}$, 由此可得 $2AF = \frac{11}{4} - OD$, 延长 AF 交 OB 于 H 点, 可得 $AH = 2AF = \frac{11}{4} - OD$, $DH = OH - OD = 2 - OD$, 然后由双勾股求出 $OD = 1$, 进而求出点 B 坐标.

【小问 1 详解】

解: $\because OA = 2$, 点 A 位于 y 轴的正半轴,

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(0, 2)$,

【小问 2 详解】

$\because \angle ABO = 30^\circ$, 直线 $l \perp y$ 轴, $OA = 2$,

$$\therefore OB = \frac{OA}{\sin \angle ABO} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4, \quad AB = OB \cdot \cos \angle ABO = 4 \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{3},$$

$\because$ 点 C 为 AB 的中点,

$$\therefore BC = \sqrt{3},$$

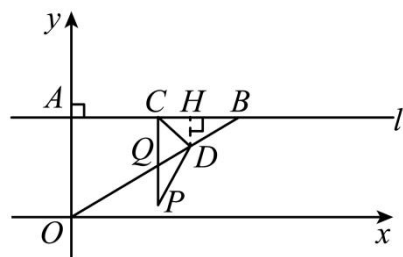
又 $\because CP \perp AB$,

$$\therefore QB = \frac{BC}{\cos \angle ABO} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 2,$$

由折叠可知: $\angle PCD = \angle BCD$

$$\therefore \angle PCD = \angle BCD = 45^\circ,$$

如解 (2) 图, 过点 D 作 $DH \perp AB$,



解(2)图

$$\therefore CH = \frac{DH}{\tan \angle BCD} = \frac{DH}{\tan 45^\circ} = DH,$$

$$BH = \frac{DH}{\tan \angle ABO} = \frac{DH}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}DH,$$

$$\therefore BC = BH + CH = DH + \sqrt{3}DH, \quad \text{即 } DH + \sqrt{3}DH = \sqrt{3},$$

$$\therefore DH = \frac{3-\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore DB = \frac{DH}{\sin \angle ABO} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\sin 30^\circ} = 3-\sqrt{3},$$

$$\therefore DQ = BQ - BD = 2 - (3-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1,$$

【小问3详解】

$$\text{解: } \because \frac{AB}{OA} = 2, \quad OA = 2,$$

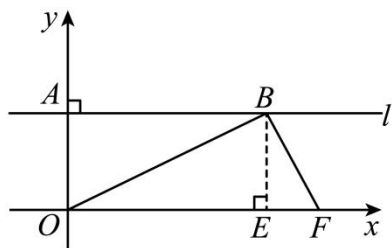
$$\therefore AB = 4,$$

又 $\because EF$ 为 $\triangle OAB$ 的中位线,

$$\therefore BE = 2, \quad EF = 1, \quad EF \parallel OA,$$

$$\therefore \angle BEF = 90^\circ,$$

I. 如图, 将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转 90° , 到如解 (3) -1 图所示位置时,



解(3)-1图

$\therefore BE \perp l$, 直线 $l \perp y$ 轴,

$$\therefore BE \parallel OA$$

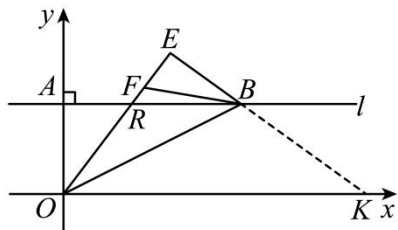
$$\text{又 } \because BE = OA = 2,$$

$\therefore$ 四边形 $OABE$ 是矩形,

$\therefore$ 点 E 、 F 恰好落在 x 轴, $OE = AB = 4$,

此时直线 EB 与 x 轴交点的坐标为 $(4, 0)$,

II. 如图, 将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转到点 O 、 E 、 F 三点共线时, 如解 (3) -2 图所示位置时,



解(3)-2图

延长 EB 交 x 轴于点 K ,

$$\because \angle BEF = \angle OAB = 90^\circ, \quad BE = OA = 2, \quad OB = OB,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OAB \cong \text{Rt}\triangle BOE(\text{HL})$$

$$\therefore \angle ABO = \angle BOE, \quad OE = AB = 4,$$

$$\therefore OR = RB, \quad AR = AB - RB = 4 - RB$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle OAR \text{ 中, } OA^2 + AR^2 = OR^2, \text{ 即: } 2^2 + (4 - RB)^2 = RB^2,$$

$$\text{解得: } RB = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AR = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \cos \angle ARO = \frac{AR}{OR} = \frac{3}{5},$$

$\therefore$ 直线 $l \perp y$ 轴,

$\therefore$ 直线 $l \parallel x$ 轴,

$$\therefore \angle ARO = \angle EOK,$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle OEK \text{ 中, } OK = \frac{OE}{\cos \angle EOK},$$

$$\therefore OK = \frac{OE}{\cos \angle ARO} = 4 \div \frac{3}{5} = \frac{20}{3},$$

$$\therefore \text{此时直线 } EB \text{ 与 } x \text{ 轴交点的坐标为 } (\frac{20}{3}, 0),$$

综上所述: 将 $\triangle BEF$ 绕点 B 在平面内逆时针旋转, 当点 O 、 E 、 F 三点共线时, 直线 EB 与 x 轴交点的坐标为 $(4, 0)$ 或 $(\frac{20}{3}, 0)$;

【小问 4 详解】

直线 $l \perp y$ 轴, $AD \perp OB$ 于点 D ,

$$\therefore \angle AOC + \angle ACO = 90^\circ, \quad \angle EOD + \angle OED = 90^\circ,$$

又 $\because OC$ 平分 $\angle AOB$ 交 AB 于点 C , 即: $\angle AOC = \angle DOE$,

$$\therefore \angle ACO = \angle OED,$$

又 $\because \angle AEC = \angle OED$,

$$\therefore \angle AEC = \angle ACO,$$

$$\therefore AE = AC,$$

$\therefore AF$ 为 $\triangle AEC$ 的一条中线.

$$\therefore AF \perp EC, \text{ 即: } \angle AFC = 90^\circ,$$

所以点 B 坐标为 $(2\sqrt{3}, 2)$.

【点睛】 本题考查全等三角形的判定与性质，等腰三角形的判定和性质、解三角形、相似三角形的判定和性质，难度较大，确定运动后线段之间的位置关系、正确作出辅助线是解题的关键.

