

荆州市 2023 年初中学业水平考试

数学试题

注意事项：

1. 本卷满分为 120 分，考试时间为 120 分钟。
2. 本卷是试题卷，不能答题，答题必须写在答题卡上。解答题中添加的辅助线、字母和符号等务必标在答题卡对应的图形上。
3. 在答题卡上答题，选择题要用 2B 铅笔填涂，非选择题要用 0.5 毫米黑色中性笔作答。

★祝考试顺利★

一、选择题（本大题共有 10 个小题，每小题只有唯一正确答案，每小题 3 分，共 30 分）

1. 在实数 -1 ， $\sqrt{3}$ ， $\frac{1}{2}$ ， 3.14 中，无理数是（ ）

- A. -1 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 3.14

【答案】B

【解析】

【分析】根据无理数的特征，即可解答。

【详解】解：在实数 -1 ， $\sqrt{3}$ ， $\frac{1}{2}$ ， 3.14 中，无理数是 $\sqrt{3}$ ，

故选：B。

【点睛】本题考查了无理数的特征，即为无限不循环小数，熟知该概念是解题的关键。

2. 下列各式运算正确的是（ ）

- A. $3a^2b^3 - 2a^2b^3 = a^2b^3$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$
C. $a^6 \div a^2 = a^3$ D. $(a^2)^3 = a^5$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，逐项分析判断即可求解。

【详解】解：A. $3a^2b^3 - 2a^2b^3 = a^2b^3$ ，故该选项正确，符合题意；

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项不正确，不符合题意；

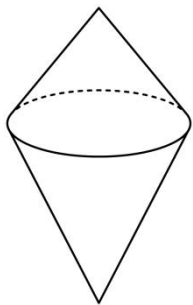
C. $a^6 \div a^2 = a^4$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $(a^2)^3 = a^6$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：A.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，熟练掌握以上运算法则是解题的关键.

3. 观察如图所示的几何体，下列关于其三视图的说法正确的是（ ）



- A. 主视图既是中心对称图形，又是轴对称图形
- B. 左视图既是中心对称图形，又是轴对称图形
- C. 俯视图既是中心对称图形，又是轴对称图形
- D. 主视图、左视图、俯视图都是中心对称图形

【答案】C

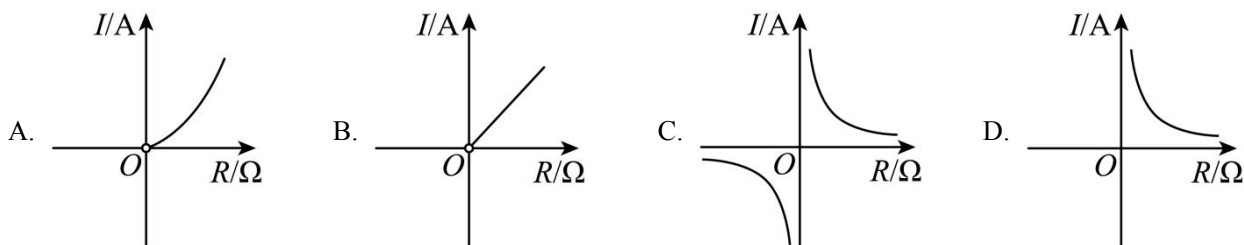
【解析】

【分析】先判断该几何体的三视图，再根据轴对称和中心对称图形定义逐项判断三视图，即可求出答案.

- 【详解】解：A 选项：主视图是上下两个等腰三角形，不是中心对称图形，是轴对称图形，故不符合题意；
- B 选项：左视图是上下两个等腰三角形，不是中心对称图形，是轴对称图形，故不符合题意；
- C 选项：俯视图是圆（带圆心），既是中心对称图形，又是轴对称图形，故符合题意；
- D 选项：由 A 和 B 选项可知，主视图和左视图都不是中心对称图形，故不符合题意.
- 故选：C.

【点睛】本题考查了简单几何体的三视图、轴对称图形和中心对称图形，解题的关键在于掌握轴对称和中心对称的定义. 如果一个平面图形沿着一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形；中心对称是指把一个图形绕着某一点旋转 180° ，如果它能够与另一个图形重合，那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称.

4. 已知蓄电池的电压 U 为定值，使用蓄电池时，电流 I （单位：A）与电阻 R （单位： Ω ）是反比例函数关系 $\left(I = \frac{U}{R}\right)$. 下列反映电流 I 与电阻 R 之间函数关系的图象大致是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据电流 I 与电阻 R 之间函数关系 $I = \frac{U}{R}$ 可知图象为双曲线，并且在第一象限，即可得到答案.

【详解】 $\because$ 反比例函数的图象是双曲线，且 $U > 0$ ， $I > 0$ ， $R > 0$

$\therefore$ 图象是第一象限双曲线的一支.

故选：D.

【点睛】本题考查了反比例函数的图象，并结合实际意义去判断图象，数形结合思想是关键.

5. 已知 $k = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$ ，则与 k 最接近的整数为 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的混合运算进行计算，进而估算无理数的大小即可求解.

【详解】解： $k = \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = \sqrt{2}(5 - 3) = 2\sqrt{2}$

$\because 2.5^2 = 6.25$ ， $3^2 = 9$

$\therefore \frac{5}{2} < 2\sqrt{2} < 3$ ，

$\therefore$ 与 k 最接近的整数为 3，

故选：B.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，无理数的估算，熟练掌握二次根式的运算法则是解题的关键.

6. 为评估一种水稻的种植效果，选了 10 块地作试验田. 这 10 块地的亩产量(单位: kg)分别为 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ，

下面给出的统计量中可以用来评估这种水稻亩产量稳定程度的是 ()

A. 这组数据的平均数

B. 这组数据的方差

C. 这组数据的众数

D. 这组数据的中位数

【答案】B

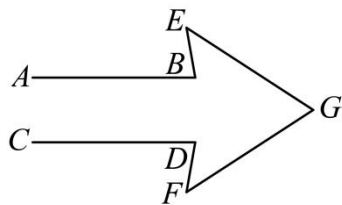
【解析】

【分析】根据题意，选择方差即可求解.

【详解】解：依题意，给出的统计量中可以用来评估这种水稻亩产量稳定程度的是这组数据的方差，
故选：B.

【点睛】本题考查了选择合适的统计量，熟练掌握平均数、众数、中位数、方差的意义是解题的关键.

7. 如图所示的“箭头”图形中， $AB \parallel CD$ ， $\angle B = \angle D = 80^\circ$ ， $\angle E = \angle F = 47^\circ$ ，则图中 $\angle G$ 的度数是
()



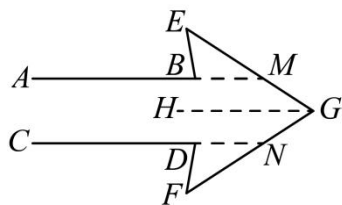
- A. 80° B. 76° C. 66° D. 56°

【答案】C

【解析】

【分析】延长 AB 交 EG 于点 M ，延长 CD 交 GF 于点 N ，过点 G 作 AB 的平行线 GH ，根据平行线的性质即可解答.

【详解】解：如图，延长 AB 交 EG 于点 M ，延长 CD 交 GF 于点 N ，过点 G 作 AB 的平行线 GH ，



$$\because \angle E = \angle F = 47^\circ, \angle EBA = \angle FDC = 80^\circ,$$

$$\therefore \angle EMA = \angle EBA - \angle E = 33^\circ, \angle FNC = \angle FDC - \angle F = 33^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD, AB \parallel HG,$$

$$\therefore HG \parallel CD,$$

$$\therefore \angle MGH = \angle EMA = 33^\circ, \angle NGH = \angle FND = 33^\circ,$$

$$\therefore \angle EGF = 33^\circ + 33^\circ = 66^\circ,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了平行线的判定及性质，三角形外角的定义和性质，作出正确的辅助线是解题的关键.

8. 我国古代数学名著《孙子算经》中记载：“今有木，不知长短，引绳度之，余绳四尺五寸；屈绳量之，不足一尺，木长几何？”意思是：用一根绳子去量一根木条，绳子还剩余 4.5 尺；将绳子对折再量木条，木

条剩余 1 尺，问木条长多少尺？如果设木条长 x 尺，绳子长 y 尺，那么可列方程组为（ ）

A. $\begin{cases} y = x + 4.5 \\ 0.5y = x - 1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} y = x + 4.5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

C. $\begin{cases} y = x - 4.5 \\ 0.5y = x + 1 \end{cases}$

D. $\begin{cases} y = x - 4.5 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据“一根绳子去量一根木条，绳子剩余 4.5 尺”可知：绳子=木条+4.5，再根据“将绳子对折再量木条，木条剩余 1 尺”可知： $\frac{1}{2}$ 绳子=木条-1，据此列出方程组即可。

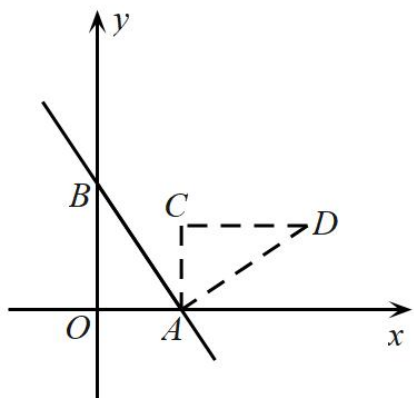
【详解】解：设木条长 x 尺，绳子长 y 尺，

那么可列方程组为： $\begin{cases} y = x + 4.5 \\ 0.5y = x - 1 \end{cases}$ ，

故选：A.

【点睛】本题考查二元一次方程组的实际应用，解题的关键是明确题意，找出等量关系，列出相应的二元一次方程组。

9. 如图，直线 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 分别与 x 轴， y 轴交于点 A ， B ，将 $\triangle OAB$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CAD$ ，则点 B 的对应点 D 的坐标是（ ）



A. $(2, 5)$

B. $(3, 5)$

C. $(5, 2)$

D. $(\sqrt{13}, 2)$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据一次函数解析式求得点 A ， B 的坐标，进而根据旋转的性质可得 $AC = OA = 2$ ， $CD = OB = 3$ ， $\angle OAC = 90^\circ$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ，进而得出 $CD \parallel OA$ ，结合坐标系，即可求解。

【详解】解：∵直线 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 分别与 x 轴， y 轴交于点 A ， B ，

∴当 $x = 0$ 时， $y = 3$ ，即 $B(0, 3)$ ，则 $OB = 3$ ，

当 $y = 0$ 时， $x = 2$ ，即 $A(2, 0)$ ，则 $OA = 2$ ，

∴将 $\triangle OAB$ 绕着点 A 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle CAD$ ，

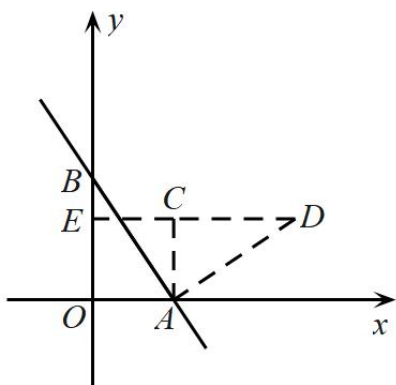
又∵ $\angle AOB = 90^\circ$

∴ $AC = OA = 2$ ， $CD = OB = 3$ ， $\angle OAC = 90^\circ$ ， $\angle ACD = 90^\circ$ ，

∴ $CD \parallel OA$ ，

延长 DC 交 y 轴于点 E ，则 $E(0, 2)$ ， $DE = EC + CD = 2 + 3 = 5$ ，

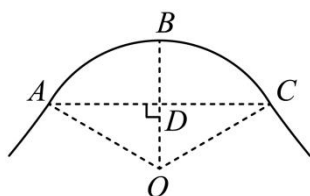
∴ $D(5, 2)$ ，



故选：C.

【点睛】本题考查了一次函数与坐标轴交点问题，旋转的性质，坐标与图形，掌握旋转的性质是解题的关键.

10. 如图，一条公路的转弯处是一段圆弧 ($\widehat{AC}$)，点 O 是这段弧所在圆的圆心， B 为 $\widehat{AC}$ 上一点， $OB \perp AC$ 于 D . 若 $AC = 300\sqrt{3}\text{m}$ ， $BD = 150\text{m}$ ，则 $\widehat{AC}$ 的长为 ()



A. $300\pi\text{m}$

B. $200\pi\text{m}$

C. $150\pi\text{m}$

D. $100\sqrt{3}\pi\text{m}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据垂径定理求出 AD 长度，再根据勾股定理求出半径长度，最后利用弧长公式即可求出答案.

【详解】解： $\because OB \perp AC$ ，点 O 是这段弧所在圆的圆心，

$$\therefore AD = CD,$$

$$\because OD = OD, OA = OC,$$

$$\therefore \triangle ADO \cong \triangle CDO,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle COD.$$

$$\because AC = 300\sqrt{3}\text{m}, AD = CD,$$

$$\therefore AD = CD = 150\sqrt{3}\text{m}.$$

$$\text{设 } OA = OC = OB = x, \text{ 则 } DO = x - 150,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADO \text{ 中, } x^2 = (x - 150)^2 + (150\sqrt{3})^2,$$

$$\therefore x = 300\text{m},$$

$$\therefore \sin \angle AOD = \frac{AD}{AO} = \frac{150\sqrt{3}}{300} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \angle AOD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 120^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AC} = \frac{n\pi R}{180} = \frac{120 \times \pi \times 300}{180} = 200\pi\text{m}.$$

故选：B.

【点睛】本题考查了圆的垂径定理，弧长公式，解题的关键在于通过勾股定理求出半径长度，从而求出所求弧长所对应的圆心角度数.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 若 $|a-1| + (b-3)^2 = 0$ ，则 $\sqrt{a+b} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 2

【解析】

【分析】根据绝对值的非负性，平方的非负性求得 a, b 的值进而求得 $a+b$ 的算术平方根即可求解.

$$\text{【详解】解：} \because |a-1| + (b-3)^2 = 0,$$

$$\therefore a-1=0, b-3=0,$$

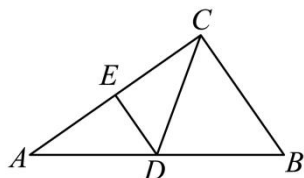
$$\text{解得：} a=1, b=3,$$

$$\therefore \sqrt{a+b} = \sqrt{1+3} = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查了求一个数的算术平方根，熟练掌握绝对值的非负性，平方的非负性求得 a, b 的值是解题的关键.

12. 如图， CD 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线， E 为 AC 的中点. 若 $AC = 8$ ， $CD = 5$ ，则 $DE =$ _____.



【答案】3

【解析】

【分析】首先根据直角三角形斜边中线的性质得出 AB ，然后利用勾股定理即可得出 BC ，最后利用三角形中位线定理即可求解.

【详解】解：∵ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， CD 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 斜边 AB 上的中线， $CD = 5$ ，
 $\therefore AB = 2CD = 10$ ，

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

∵ E 为 AC 的中点，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 3$$

故答案为：3.

【点睛】本题主要考查直角三角形的性质，三角形中位线定理，掌握直角三角形中斜边上的中线等于斜边的一半是解题的关键.

13. 某校为了解学生对 A, B, C, D 四类运动的参与情况，随机调查了本校 80 名学生，让他们从中选择参与最多的一类，得到对应的人数分别是 30, 20, 18, 12. 若该校有 800 名学生，则估计有 _____ 人参与 A 类运动最多.

【答案】300

【解析】

【分析】利用样本估计总体即可求解.

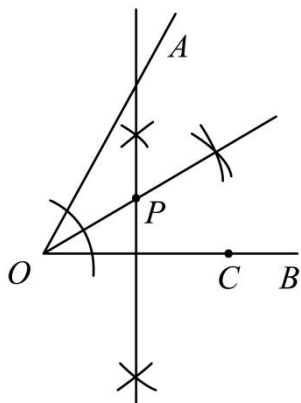
$$\text{【详解】解：} 800 \times \frac{30}{80} = 300 \text{ (人).}$$

估计有 300 人参与 A 类运动最多.

故答案为：300.

【点睛】本题考查了样本估计总体，掌握用样本估计总体是本题的关键.

14. 如图， $\angle AOB = 60^\circ$ ，点 C 在 OB 上， $OC = 2\sqrt{3}$ ， P 为 $\angle AOB$ 内一点. 根据图中尺规作图痕迹推断，点 P 到 OA 的距离为_____.

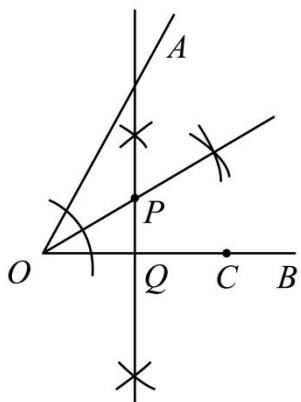


【答案】1

【解析】

【分析】首先利用垂直平分线的性质得到 $OQ = \frac{1}{2}OC = \sqrt{3}$ ，利用角平分线，求出 $\angle BOP$ ，再在 $\triangle POQ$ 中用勾股定理求出 $PQ = 1$ ，最后利用角平分线的性质求解即可.

【详解】如图所示，



由尺规作图痕迹可得， PQ 是 OC 的垂直平分线，

$$\therefore OQ = \frac{1}{2}OC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BOP = \frac{1}{2}\angle BOA = 30^\circ,$$

设 $PQ = x$ ，则 $PO = 2x$ ，

$$\therefore PQ^2 + OQ^2 = OP^2,$$

$$\therefore x^2 + (\sqrt{3})^2 = (2x)^2,$$

$$\therefore x = 1,$$

$$\therefore PQ = 1,$$

由尺规作图痕迹可得， PO 是 $\angle AOB$ 的平分线，

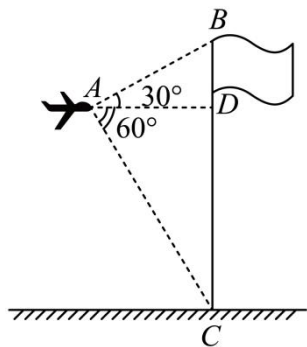
$\therefore$ 点 P 到 OA 的距离等于点 P 到 OB 的距离，即 PQ 的长度，

$\therefore$ 点 P 到 OA 的距离为 1.

故答案为：1 .

【点睛】 本题考查角平分线和垂直平分线的性质，勾股定理，数形结合思想是关键.

15. 如图，无人机在空中 A 处测得某校旗杆顶部 B 的仰角为 30° ，底部 C 的俯角为 60° ，无人机与旗杆的水平距离 AD 为 6m，则该校的旗杆高约为 _____ m. ($\sqrt{3} \approx 1.73$ ，结果精确到 0.1)



【答案】 13.8## $13\frac{4}{5}$ ## $\frac{69}{5}$

【解析】

【分析】 解直角三角形，求得 BD 和 CD 的长，即可解答.

【详解】 解：根据题意可得，

$$\text{在 Rt}\triangle ADB \text{ 中, } \frac{BD}{AD} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore BD = \frac{\sqrt{3}}{3} AD,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADC \text{ 中, } \frac{CD}{AD} = \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

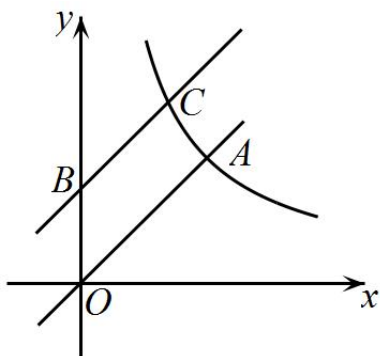
$$\therefore CD = \sqrt{3} AD,$$

$$\therefore BC = BD + CD = \frac{\sqrt{3}}{3} AD + \sqrt{3} AD = \frac{4\sqrt{3}}{3} AD \approx 13.8\text{m},$$

故答案为：13.8.

【点睛】 本题考查了解直角三角形的实际应用-俯角仰角，含有 30° 度角的直角三角形的边长特征，熟练解直角三角形是解题的关键.

16. 如图，点 $A(2,2)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 上，将直线 OA 向上平移若干个单位长度交 y 轴于点 B ，交双曲线于点 C 。若 $BC = 2$ ，则点 C 的坐标是_____。



【答案】 $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$

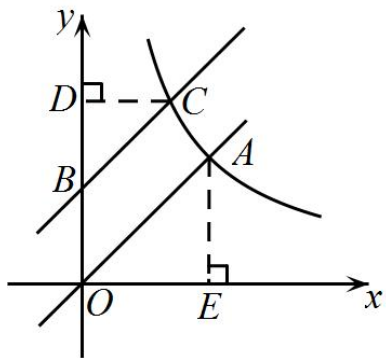
【解析】

【分析】 求出反比例函数解析式 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ ，证明 $\angle DOA = 45^\circ$ ，过点 A 作 x 轴的垂线段交 x 轴于点 E ，过点 C 作 y 轴的垂线段交 y 轴于点 D ，通过平行线的性质得到 $\angle DBC = 45^\circ$ ，解直角三角形求点 C 的横坐标，结合反比例函数解析式求出 C 的坐标，即可解答。

【详解】 解：把 $A(2,2)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ ，可得 $2 = \frac{k}{2}$ ，解得 $k = 4$ ，

$\therefore$ 反比例函数解析式 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$ ，

如图，过点 A 作 x 轴的垂线段交 x 轴于点 E ，过点 C 作 y 轴的垂线段交 y 轴于点 D ，



$\because A(2,2)$ ，

$\therefore AE = OE$ ，

$\therefore \angle AOE = 45^\circ$ ，

$\therefore \angle AOD = 90^\circ - \angle AOE = 45^\circ$ ，

$\because$ 将直线 OA 向上平移若干个单位长度交 y 轴于点 B ，

$\therefore \angle CBD = 45^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CBD$ 中, $\frac{CD}{CB} = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore CD = \frac{\sqrt{2}}{2}CB = \sqrt{2},$$

即点 C 的横坐标为 $\sqrt{2}$,

把 $x = \sqrt{2}$ 代入 $y = \frac{4}{x} (x > 0)$, 可得 $y = 2\sqrt{2}$,

$$\therefore C(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}),$$

故答案为: $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

【点睛】 本题考查了等腰三角形的判定和性质, 一次函数的平移, 解直角三角形, 熟练求得点 C 的横坐标是解题的关键.

三、解答题 (本大题共有 8 个小题, 共 72 分)

17. 先化简, 再求值: $\left(\frac{2x-y}{x+y} - \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}\right) \div \frac{x-y}{x+y}$, 其中 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $y = (-2023)^0$.

【答案】 $\frac{x}{x-y}, 2$

【解析】

【分析】 根据分式的运算法则, 先将分式进行化简, 再将 x 和 y 的值代入即可求出答案.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解: } & \left(\frac{2x-y}{x+y} - \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}\right) \div \frac{x-y}{x+y} \\ &= \left[\frac{2x-y}{x+y} - \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)}\right] \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \left(\frac{2x-y}{x+y} - \frac{x-y}{x+y}\right) \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{x}{x-y} \\ \therefore x &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2, \quad y = (-2023)^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{x}{x-y} = \frac{2}{2-1} = 2.$$

故答案为： $\frac{x}{x-y}$ ，2.

【点睛】 本题考查了分式的化简求值问题，解题的关键在于熟练掌握分式的运算法则、零次幂、负整数次幂.

18. 已知关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - (2k+4)x + k - 6 = 0$ 有两个不相等的实数根.

(1) 求 k 的取值范围;

(2) 当 $k=1$ 时，用配方法解方程.

【答案】 (1) $k > -\frac{2}{5}$ 且 $k \neq 0$

(2) $x_1 = 3 + \sqrt{14}$, $x_2 = 3 - \sqrt{14}$

【解析】

【分析】 (1) 根据题意，可得 $(2k+4)^2 - 4k(k-6) > 0$ ，注意一元二次方程的系数问题，即可解答，

(2) 将 $k=1$ 代入 $kx^2 - (2k+4)x + k - 6 = 0$ ，利用配方法解方程即可.

【小问1详解】

解：依题意得：
$$\begin{cases} k \neq 0 \\ \Delta = (2k+4)^2 - 4k(k-6) = 40k+16 > 0 \end{cases},$$

解得 $k > -\frac{2}{5}$ 且 $k \neq 0$;

【小问2详解】

解：当 $k=1$ 时，原方程变为： $x^2 - 6x - 5 = 0$,

则有： $x^2 - 6x + 9 = 5 + 9$,

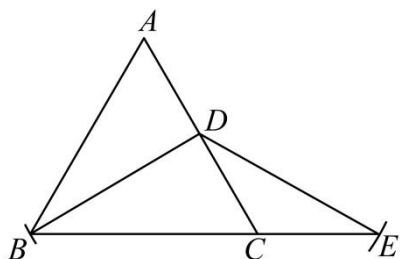
$$\therefore (x-3)^2 = 14,$$

$$\therefore x-3 = \pm\sqrt{14},$$

$$\therefore \text{方程的根为 } x_1 = 3 + \sqrt{14}, \quad x_2 = 3 - \sqrt{14}.$$

【点睛】 本题考查了根据根的情况判断参数，用配方法解一元二次方程，熟练利用配方法解一元二次方程是解题的关键.

19. 如图, BD 是等边 $\triangle ABC$ 的中线, 以 D 为圆心, DB 的长为半径画弧, 交 BC 的延长线于 E , 连接 DE . 求证: $CD = CE$.

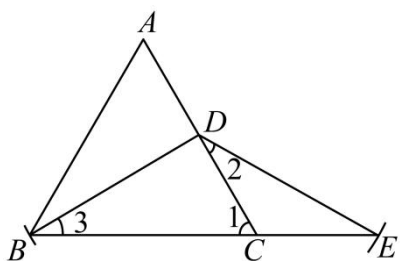


【答案】见解析

【解析】

【分析】利用三线合一和等腰三角形的性质, 证出 $\angle E = \angle 2$, 再利用等边对等角即可.

【详解】证明: $\because BD$ 为等边 $\triangle ABC$ 的中线,



$$\therefore BD \perp AC, \angle 1 = 60^\circ$$

$$\therefore \angle 3 = 30^\circ$$

$$\because BD = DE,$$

$$\therefore \angle E = \angle 3 = 30^\circ$$

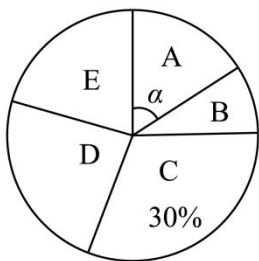
$$\because \angle 2 + \angle E = \angle 1 = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle E = \angle 2 = 30^\circ$$

$$\therefore CD = CE$$

【点睛】本题考查了等边三角形, 等腰三角形的性质和判定, 理解记忆相关定理是解题的关键.

20. 首届楚文化节在荆州举办前, 主办方为使参与服务的志愿者队伍整齐, 随机抽取了部分志愿者, 对其身高进行调查, 将身高 (单位: cm) 数据分 A, B, C, D, E 五组制成了如下的统计图表 (不完整).



组别	身高分组	人数
A	$155 \leq x < 160$	3
B	$160 \leq x < 165$	2
C	$165 \leq x < 170$	m
D	$170 \leq x < 175$	5
E	$175 \leq x < 180$	4

根据以上信息回答：

- (1) 这次被调查身高的志愿者有_____人，表中的 $m =$ _____，扇形统计图中 a 的度数是_____；
- (2) 若 E 组的 4 人中，男女各有 2 人，以抽签方式从中随机抽取两人担任组长，请列表或画树状图，求刚好抽中两名女志愿者的概率。

【答案】(1) 20, 6, 54

(2) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】(1) 用 C 组所占的比列出方程，即可求得 m 的值，再求出总数；用周角乘以 D 组所占的比，即可求出 a 的度数；

(2) 列出树状图或表格，求出所有可能的情况总数，再找出刚好抽中两名女志愿者的数量，带入公式即可。

【小问 1 详解】

$$\because \frac{m}{3+2+m+5+4} = \frac{30}{100}$$

$$\therefore m = 6$$

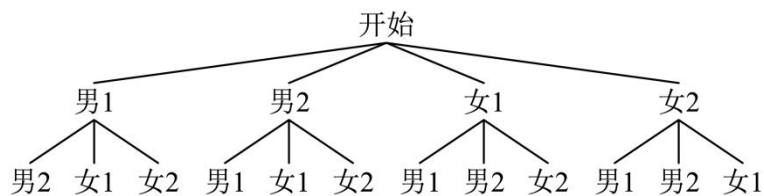
$$\therefore 3+2+m+5+4 = 3+2+6+5+4 = 20$$

$$360^\circ \times \frac{3}{20} = 54^\circ$$

故填：20, 6, 54；

【小问 2 详解】

画树状图为：



或者列表为:

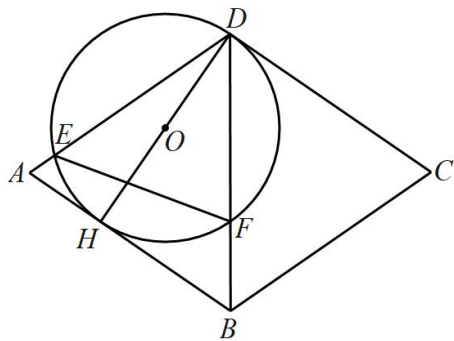
	男 1	男 2	女 1	女 2
男 1		(男 1 男 2)	(男 1 女 1)	(男 1 女 2)
男 2	(男 2 男 1)		(男 2 女 1)	(男 2 女 2)
女 1	(女 1 男 1)	(女 1 男 2)		(女 1 女 2)
女 2	(女 2 男 1)	(女 2 男 2)	(女 2 女 1)	

∴ 共有 12 种等可能结果，其中抽中两名女志愿者的结果有 2 种

$$\therefore P(\text{抽中两名女志愿者}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

【点睛】 本题考查统计与概率综合，求出总数和列出树状图，或表格是解题的关键.

21. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $DH \perp AB$ 于 H ，以 DH 为直径的 $\odot O$ 分别交 AD ， BD 于点 E ， F ，连接 EF .



(1) 求证:

① CD 是 $\odot O$ 的切线;

② $\triangle DEF \sim \triangle DBA$;

(2) 若 $AB = 5$ ， $DB = 6$ ，求 $\sin \angle DFE$.

【答案】 (1) ①见解析，②见解析

(2) $\frac{24}{25}$

【解析】

【分析】 (1) ①根据菱形的性质得出 $AB \parallel CD$ ，根据 $DH \perp AB$ ，可得 $CD \perp OD$ ，进而即可得证;

②连接 HF ，根据等弧所对的圆周角相等得出 $\angle DEF = \angle DHF$ ，根据直径所对的圆周角是直角得出 $\angle DFH = 90^\circ$ ，进而可得 $\angle DHF = \angle DBA = \angle DEF$ ，结合 $\angle EDF = \angle BDA$ ，即可得证；

(2) 连接 AC 交 BD 于 G . 根据菱形的性质以及勾股定理求得 $AG = 4, AC = 8$, 进而根据等面积法求得 DH , 由 $\triangle DEF \sim \triangle DBA$ 得: $\angle DFE = \angle DAH$, 在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, 即可求解.

【小问 1 详解】

证明: ① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CD$$

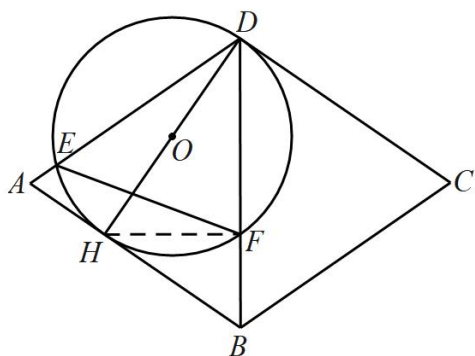
$$\therefore DH \perp AB,$$

$$\therefore \angle CDH = \angle DHA = 90^\circ, \text{ 则 } CD \perp OD$$

又 $\because D$ 为 $\odot O$ 的半径的外端点,

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

②连接 HF ,



$$\because \widehat{DF} = \widehat{DF}$$

$$\therefore \angle DEF = \angle DHF$$

$\therefore DH$ 为 $\odot O$ 直径,

$$\therefore \angle DFH = 90^\circ,$$

而 $\angle DHB = 90^\circ$

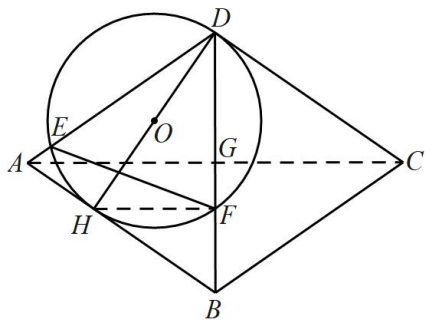
$$\therefore \angle DHF = \angle DBA = \angle DEF,$$

又 $\because \angle EDF = \angle BDA$

$$\therefore_{\Delta} DEF \sim_{\Delta} DBA.$$

【小问 2 详解】

解: 连接 AC 交 BD 于 G .



∵ 菱形 $ABCD$, $BD = 6$,

∴ $AC \perp BD$, $AG = GC$, $DG = GB = 3$,

∴ 在 $\text{Rt}\triangle AGB$ 中, $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = 4$,

∴ $AC = 2AG = 8$,

∴ $S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AB \cdot DH$,

∴ $DH = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$,

在 $\text{Rt}\triangle ADH$ 中, $\sin \angle DAH = \frac{DH}{AD} = \frac{DH}{AB} = \frac{24}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{24}{25}$,

由 $\triangle DEF \sim \triangle DBA$ 得: $\angle DFE = \angle DAH$,

∴ $\sin \angle DFE = \sin \angle DAH = \frac{24}{25}$.

【点睛】 本题考查了切线的判定, 相似三角形的性质与判定, 圆周角定理, 菱形的性质, 勾股定理, 求角的正弦值, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

22. 荆州古城旁“荆街”某商铺打算购进 A, B 两种文创饰品对游客销售. 已知 1400 元采购 A 种的件数是 630 元采购 B 种件数的 2 倍, A 种的进价比 B 种的进价每件多 1 元, 两种饰品的售价均为每件 15 元; 计划采购这两种饰品共 600 件, 采购 B 种的件数不低于 390 件, 不超过 A 种件数的 4 倍.

(1) 求 A, B 饰品每件的进价分别为多少元?

(2) 若采购这两种饰品只有一种情况可优惠, 即一次性采购 A 种超过 150 件时, A 种超过的部分按进价打 6 折. 设购进 A 种饰品 x 件,

①求 x 的取值范围;

②设计能让这次采购的饰品获利最大的方案, 并求出最大利润.

【答案】 (1) A 种饰品每件进价为 10 元, B 种饰品每件进价为 9 元;

(2) ① $120 \leq x \leq 210$ 且 x 为整数, ②当采购 A 种饰品 210 件, B 种饰品 390 件时, 商铺获利最大, 最大利润为 3630 元.

【解析】

【分析】 (1) 分别设出 A, B 饰品每件的进价, 依据数量列出方程求解即可;

(2) ①依据题意列出不等式即可；

②根据不同的范围，列出不同函数关系式，分别求出最大值，比较即可得到李荣最大值.

【小问 1 详解】

(1) 设 A 种饰品每件的进价为 a 元，则 B 种饰品每件的进价为 $(a-1)$ 元.

由题意得： $\frac{1400}{a} = \frac{630}{a-1} \times 2$ ，解得： $a = 10$ ，

经检验， $a = 10$ 是所列方程的根，且符合题意.

A 种饰品每件进价为 10 元，B 种饰品每件进价为 9 元.

【小问 2 详解】

①根据题意得： $\begin{cases} 600 - x \geq 390 \\ 600 - x \leq 4x \end{cases}$ ，

解得： $120 \leq x \leq 210$ 且 x 为整数；

②设采购 A 种饰品 x 件时的总利润为 w 元.

当 $120 \leq x \leq 150$ 时， $w = 15 \times 600 - 10x - 9(600 - x)$ ，

即 $w = -x + 3600$ ，

$\because -1 < 0$ ，

$\therefore w$ 随 x 的增大而减小.

$\therefore$ 当 $x = 120$ 时， w 有最大值 3480.

当 $150 < x \leq 210$ 时， $w = 15 \times 600 - [10 \times 150 + 10 \times 60\%(x - 150)] - 9(600 - x)$

整理得： $w = 3x + 3000$ ，

$\because 3 > 0$ ，

$\therefore w$ 随 x 的增大而增大.

$\therefore$ 当 $x = 210$ 时， w 有最大值 3630.

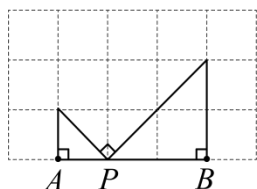
$\because 3630 > 3480$ ，

$\therefore w$ 的最大值为 3630，此时 $600 - x = 390$.

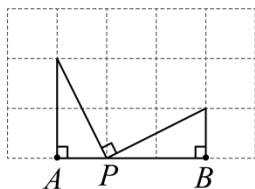
即当采购 A 种饰品 210 件，B 种饰品 390 件时，商铺获利最大，最大利润为 3630 元.

【点睛】 本题考查了分式方程的应用，一元一次不等式组的应用，一次函数利润最大化方案问题，关键是对分段函数的理解和正确求出最大值.

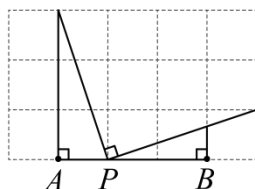
23. 如图 1，点 P 是线段 AB 上与点 A ，点 B 不重合的任意一点，在 AB 的同侧分别以 A ， P ， B 为顶点作 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ ，其中 $\angle 1$ 与 $\angle 3$ 的一边分别是射线 AB 和射线 BA ， $\angle 2$ 的两边不在直线 AB 上，我们规定



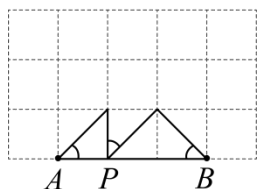
方法1



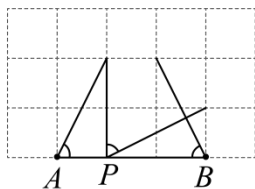
方法2



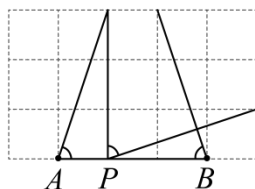
方法3



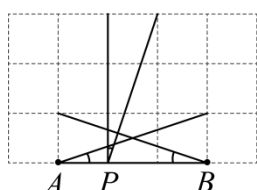
方法4



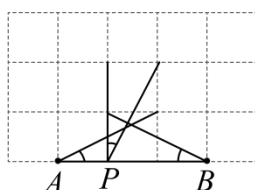
方法5



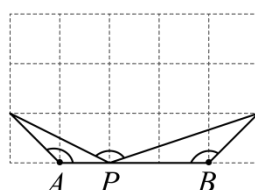
方法6



方法7



方法8

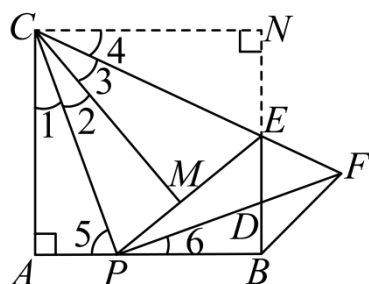


方法9

【小问2详解】

① $\triangle PCF$ 是等腰直角三角形. 理由为:

如图, 过点 C 作 $CN \perp BE$ 交 BE 的延长线于 N .



由折叠得 $AC = CM$, $\angle CMP = \angle CME = \angle A = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$

$\because AC = AB$, $\angle A = \angle PBD = \angle N = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABNC$ 为正方形

$\therefore CN = AC = CM$

又 $\because CE = CE$,

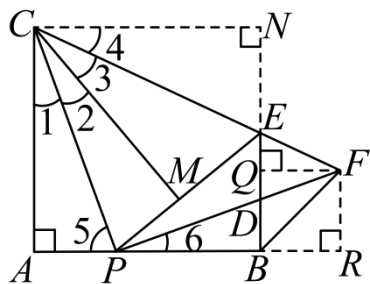
$\therefore \text{Rt}\triangle CME \cong \text{Rt}\triangle CNE$ (HL)

$\therefore \angle 3 = \angle 4$, 而 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$, $\angle CPF = 90^\circ$

$\therefore \angle PCF = \angle 2 + \angle 3 = \angle CFP = 45^\circ$

$\therefore \triangle PCF$ 是等腰直角三角形.

②过点 F 作 $FQ \perp BE$ 于 Q , $FR \perp PB$ 交 PB 的延长线于 R , 则 $\angle R = \angle A = 90^\circ$.



$$\because \angle 1 + \angle 5 = \angle 5 + \angle 6 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 6,$$

由 $\triangle PCF$ 是等腰直角三角形知: $PC = PF$,

$$\therefore \triangle APC \cong \triangle RFP (\text{AAS}),$$

$$\therefore AP = FR, \quad AC = PR, \quad \text{而 } AC = AB,$$

$$\therefore AP = BR = FR,$$

$$\text{在 Rt}\triangle BRF \text{ 中, } BR^2 + FR^2 = BF^2, \quad BF = \sqrt{2}k,$$

$$\therefore AP = BR = FR = k,$$

$$\therefore PB = 2AP = 2k,$$

$$\therefore AB = AP + PB = BN = 3k,$$

$$\text{由 } BR = FR, \quad \angle QBR = \angle R = \angle FQB = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } BRFQ \text{ 为正方形, } BQ = QF = k,$$

$$\text{由 } FQ \perp BN, \quad CN \perp BN \text{ 得: } FQ \parallel CN,$$

$$\therefore \triangle QEF \sim \triangle NEC,$$

$$\therefore \frac{QE}{NE} = \frac{QF}{CN}, \quad \text{而 } QE = BN - NE - BQ = 3k - NE - k = 2k - NE,$$

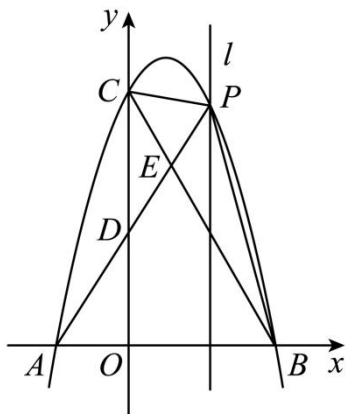
$$\text{即 } \frac{2k - NE}{NE} = \frac{k}{3k} = \frac{1}{3}, \quad \text{解得: } NE = \frac{3}{2}k,$$

$$\text{由 ① 知: } PM = AP = k, \quad ME = NE = \frac{3}{2}k,$$

$$\therefore PE = PM + ME = k + \frac{3}{2}k = \frac{5}{2}k.$$

【点睛】本题考查了几何新定义，正方形的性质与判定，折叠问题，全等三角形的性质与判定，相似三角形的性质与判定，勾股定理，理解新定义，掌握正方形的性质是解题的关键。

$$24. \text{ 已知: } y \text{ 关于 } x \text{ 的函数 } y = (a-2)x^2 + (a+1)x + b.$$



- (1) 若函数的图象与坐标轴有两个公共点，且 $a = 4b$ ，则 a 的值是_____；
- (2) 如图，若函数的图象为抛物线，与 x 轴有两个公共点 $A(-2, 0)$ ， $B(4, 0)$ ，并与动直线 $l: x = m (0 < m < 4)$ 交于点 P ，连接 PA ， PB ， PC ， BC ，其中 PA 交 y 轴于点 D ，交 BC 于点 E 。设 $\triangle PBE$ 的面积为 S_1 ， $\triangle CDE$ 的面积为 S_2 。
- ①当点 P 为抛物线顶点时，求 $\triangle PBC$ 的面积；
- ②探究直线 l 在运动过程中， $S_1 - S_2$ 是否存在最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，说明理由。

【答案】(1) 0 或 2 或 $-\frac{1}{4}$

(2) ①6，②存在， $\frac{16}{3}$

【解析】

【分析】(1) 根据函数与坐标轴交点情况，分情况讨论函数为一次函数和二次函数的时候，按照图像的性质以及与坐标轴交点的情况即可求出 a 值。

(2) ①根据 A 和 B 的坐标点即可求出抛物线的解析式，即可求出顶点坐标 P ，从而求出 PH 长度，再利用 A 和 B 的坐标点即可求出 BC 的直线解析式，结合 $x_F = x_P$ 即可求出 F 点坐标，从而求出 PF 长度，最后利用面积法即可求出 $\triangle PBC$ 的面积。

②观察图形，用 m 值表示出点 P 坐标，再根据平行线分线段成比例求出 OD 长度，利用割补法表示出 S_1 和 S_2 ，将二者相减转化成关于 m 的二次函数的顶点式，利用 m 取值范围即可求出 $S_1 - S_2$ 的最小值。

【小问 1 详解】

解：∵函数的图象与坐标轴有两个公共点，

$$\therefore (a-2)x^2 + (a+1)x + b = 0,$$

$$\because a = 4b,$$

$$\therefore (a-2)x^2 + (a+1)x + \frac{a}{4} = 0,$$

当函数为一次函数时, $a-2=0$,

$$\therefore a=2.$$

当函数为二次函数时,

$$(a-2)x^2 + (a+1)x + \frac{a}{4} = 0,$$

若函数的图象与坐标轴有两个公共点, 即与 x 轴, y 轴分别只有一个交点时,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (a+1)^2 - 4(a-2) \cdot \frac{a}{4} = 4a+1=0,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4}.$$

当函数为二次函数时, 函数的图象与坐标轴有两个公共点, 即其中一点经过原点,

$$\therefore b=0,$$

$$\therefore a=4b,$$

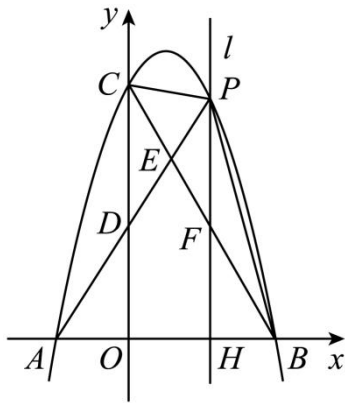
$$\therefore a=0.$$

综上所述, $a=2$ 或 0 .

故答案为: 0 或 2 或 $-\frac{1}{4}$.

【小问 2 详解】

解: ①如图所示, 设直线 l 与 BC 交于点 F , 直线 l 与 AB 交于点 H .



依题意得:
$$\begin{cases} 2a+b=10 \\ 20a+b=28 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=8 \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为: } y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9.$$

$\therefore$ 点 P 为抛物线顶点时, $P(1,9)$, $C(0,8)$,

$$\therefore PH=9, \quad x_P=1,$$

由 $B(4,0)$, $C(0,8)$ 得直线 BC 的解析式为 $y = -2x + 8$,

$\because F$ 在直线 BC 上, 且在直线 l 上, 则 F 的横坐标等于 P 的横坐标,

$$\therefore F(1,6),$$

$$\therefore FH = 6, OH = 1,$$

$$\therefore PF = PH - FH = 9 - 6 = 3, BH = OB - OH = 4 - 1 = 3$$

$$\therefore S_{\triangle PBC} = S_{\triangle PFC} + S_{\triangle PFB} = \frac{1}{2}x_P \cdot OH + \frac{1}{2}HB \cdot PF = \frac{1}{2} \times 3 \times 1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 6.$$

故答案为: 6.

② $S_1 - S_2$ 存在最大值, 理由如下:

如图, 设直线 $x = m$ 交 x 轴于 H .

由①得: $OB = 4$, $AO = 2$, $AB = 6$, $OC = 8$, $AH = 2 + m$, $P(m, -m^2 + 2m + 8)$

$$\therefore PH = -m^2 + 2m + 8,$$

$$\because OD \perp x, PH \perp AB,$$

$$\therefore OD \parallel PH,$$

$$\therefore \frac{AO}{AH} = \frac{OD}{PH},$$

$$\text{即 } \frac{2}{2+m} = \frac{OD}{-m^2 + 2m + 8},$$

$$\therefore OD = 8 - 2m$$

$$\because S_1 = S_{\triangle PAB} - S_{\triangle AOD} - S_{\text{四边形}EDOB}, S_2 = S_{\triangle OBC} - S_{\text{四边形}EDOB},$$

$$\therefore S_1 - S_2 = S_{\triangle PAB} - S_{\triangle AOD} - S_{\triangle OBC} = \frac{6(-m^2 + 2m + 8)}{2} - \frac{2(8 - 2m)}{2} - \frac{4 \times 8}{2} = -3m^2 + 8m,$$

$$\therefore S_1 - S_2 = -3\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{16}{3},$$

$$-3 < 0, 0 < m < 4,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{4}{3} \text{ 时, } S_1 - S_2 \text{ 有最大值, 最大值为 } \frac{16}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{16}{3}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数的综合应用, 涉及到函数与坐标轴交点问题, 二次函数与面积问题, 平行线分线段成比例, 解题的关键在于分情况讨论函数与坐标轴交点问题, 以及二次函数最值问题.

