

2023 年湖北省宜昌市初中学业水平考试

数学试题

一、选择题（下列各题中，只有一个选项是符合题目要求的，请在答题卡上指定的位置填涂符合要求的选项前面的字母代号。每题 3 分，计 33 分。）

1. 下列运算正确的个数是 ().

① $|2023| = 2023$; ② $2023^0 = 1$; ③ $2023^{-1} = \frac{1}{2023}$; ④ $\sqrt{2023^2} = 2023$.

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】根据 $|a| = \begin{cases} a(a > 0) \\ 0(a = 0) \\ -a(a < 0) \end{cases}$, $a^0 = 1(a \neq 0)$, $a^{-p} = \frac{1}{a^p}(a \neq 0)$, $\sqrt{a^2} = |a|$, 进行逐一计算即可.

【详解】解：① $\because 2023 > 0$, $\therefore |2023| = 2023$, 故此项正确;

② $\because 2023 \neq 0$, $\therefore 2023^0 = 1$, 故此项正确;

③ $2023^{-1} = \frac{1}{2023}$, 此项正确;

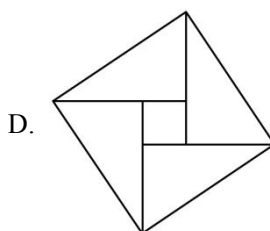
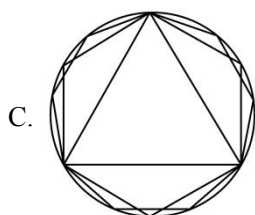
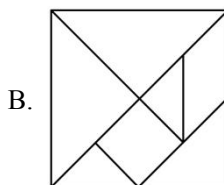
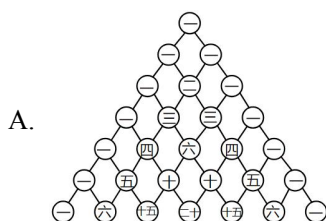
④ $\sqrt{2023^2} = |2023| = 2023$, 故此项正确;

$\therefore$ 正确的个数是 4 个.

故选: A.

【点睛】本题考查了实数的运算, 掌握相关的公式是解题的关键.

2. 我国古代数学的许多创新与发明都曾在世界上有重要影响. 下列图形“杨辉三角”“中国七巧板”“刘徽割圆术”“赵爽弦图”中, 中心对称图形是 ().



【答案】D

【解析】

【分析】根据中心对称图形的概念进行判断即可.

【详解】解：A. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

C. 不是中心对称图形，故此选项不合题意；

D. 是中心对称图形，故此选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查的是中心对称图形. 中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与自身重合.

3. “五一”假期，宜昌旅游市场接待游客 606.7 万人次，实现旅游总收入 41.5 亿元. 数据“41.5 亿”用科学记数法表示为 ().

A. 415×10^7 B. 41.5×10^8 C. 4.15×10^9 D. 4.15×10^{10}

【答案】C

【解析】

【分析】根据科学记数法的定义，表示一个 $|a| > 10$ 的数的方法：从右往左数到最后一个非“0”数字，小数点移动的位数为 n 就是 10^n ，据此即可求解.

【详解】解：41.5 亿 = 4150000000，

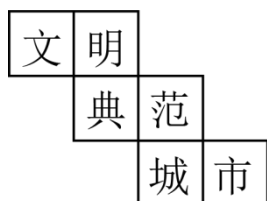
∵ 从右往左数到最后一个非“0”数字是 4，小数点共移动了 9 个位数，

∴ 41.5 亿 = 4150000000 = 4.15×10^9 .

故选：C.

【点睛】本题考查了科学记数法的定义，掌握定义并会表示一个具体较大的数是解题的关键.

4. “争创全国文明典范城市，让文明成为宜昌人民的内在气质和城市的亮丽名片”. 如图，是一个正方体的平面展开图，把展开图折叠成正方体后，“城”字对面的字是 ().



A. 文

B. 明

C. 典

D. 范

【答案】B

【解析】

【分析】根据正方体的平面展开图的特点，相对的两个面中间一定隔着一个小正方形，且没有公共边和公共顶点，即“对面无邻点”，以此来找相对面.

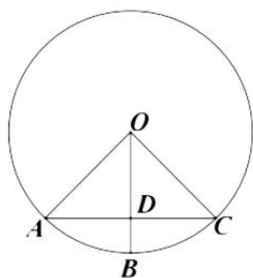
【详解】解：正方体的表面展开图，相对的面之间一定相隔一个正方形，

∴“城”字对面的字是“明”，

故选：B.

【点睛】本题考查了正方体相对面上的字，熟练掌握正方体的平面展开图特点是解题的关键.

5. 如图， OA ， OB ， OC 都是 $\odot O$ 的半径， AC ， OB 交于点 D . 若 $AD = CD = 8$ ， $OD = 6$ ，则 BD 的长为 ().



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】B

【解析】

【分析】根据等腰三角形的性质得出 $OD \perp AC$ ，根据勾股定理求出 $OC = 10$ ，进一步可求出 BD 的长.

【详解】解：∵ $AD = CD = 8$ ，

∴点 D 为 AC 的中点，

∴ $AO = CO$ ，

∴ $OD \perp AC$ ，

由勾股定理得， $OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ ，

∴ $OB = 10$ ，

∴ $BD = OB - OD = 10 - 6 = 4$ ，

故选：B.

【点睛】本题主要考查了等腰三角形的性质，勾股定理以及圆的有关性质，正确掌握相关性质是解答本题的关键

6. 下列运算正确的是 ().

A. $2x^4 \div x^3 = 2x$

B. $(x^3)^4 = x^7$

C. $x^4 + x^3 = x^7$

D. $x^3 \cdot x^4 = x^{12}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据单项式除以单项式，幂的乘方、合并同类项以及同底数幂的乘法法则计算后再判断即可.

【详解】解：A. $2x^4 \div x^3 = 2x$ ，计算正确，故选项 A 符合题意；B. $(x^3)^4 = x^{12}$ ，原选项计算错误，故选项 B 不符合题意；C. x^4 与 x^3 不是同类项不能合并，原选项计算错误，故选项 C 不符合题意；D. $x^3 \cdot x^4 = x^7$ ，原选项计算错误，故选项 D 不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题主要考查单项式除以单项式，幂的乘方、合并同类项以及同底数幂的乘法，解答的关键是对相应的运算法则的掌握.

7. 某反比例函数图象上四个点的坐标分别为 $(-3, y_1), (-2, 3), (1, y_2), (2, y_3)$ ，则， y_1, y_2, y_3 的大小关系为 ()A. $y_2 < y_1 < y_3$ B. $y_3 < y_2 < y_1$ C. $y_2 < y_3 < y_1$ D. $y_1 < y_3 < y_2$

【答案】C

【解析】

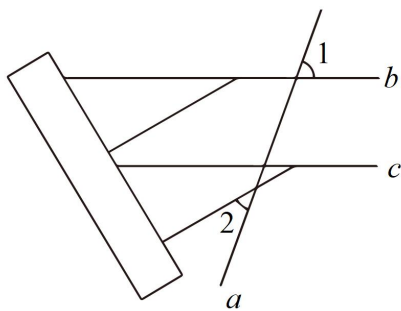
【分析】先根据点 $(-2, 3)$ 求出反比例函数的解析式，再根据反比例函数的性质即可得.【详解】解：设反比例函数的解析式为 $y = \frac{k}{x}$ ，将点 $(-2, 3)$ 代入得： $k = -2 \times 3 = -6$ ，则反比例函数的解析式为 $y = -\frac{6}{x}$ ，所以这个函数的图象位于第二、四象限，且在每一象限内， y 随 x 的增大而增大，又 $\because$ 点 $(-3, y_1), (1, y_2), (2, y_3)$ 在函数 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象上，且 $-3 < 0 < 1 < 2$ ， $\therefore y_1 > 0 > y_3 > y_2$ ，即 $y_2 < y_3 < y_1$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了求反比例函数的解析式、反比例函数的图象与性质，熟练掌握反比例函数的图象与性质是解题关键.

8. 如图，小颖按如下方式操作直尺和含 30° 角的三角尺，依次画出了直线 a, b, c 。如果 $\angle 1 = 70^\circ$ ，则 $\angle 2$

的度数为 ().



A. 110°

B. 70°

C. 40°

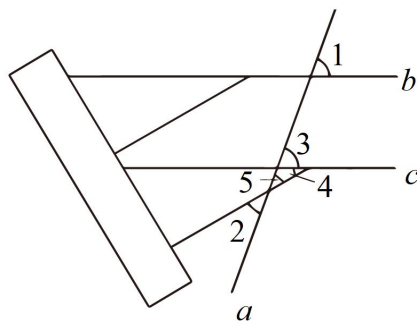
D. 30°

【答案】C

【解析】

【分析】可求 $\angle 3 = \angle 4 + \angle 5 = 70^\circ$ ，由 $\angle 2 = \angle 5$ ，即可求解.

【详解】解：如图，



由题意得： $\angle 4 = 30^\circ$ ， $a \parallel b$ ，

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 70^\circ$ ，

$\because \angle 3 = \angle 4 + \angle 5 = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle 5 = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle 2 = \angle 5 = 40^\circ$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了平行线的性质，对顶角的性质，三角形外角定理，掌握平行线的性质是解题的关键.

9. 在日历上，某些数满足一定的规律. 如图是某年8月份的日历，任意选择其中所示的含4个数字的方框部分，设右上角的数字为 a ，则下列叙述中正确的是 ().

日	一	二	三	四	五	六
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11

12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

- A. 左上角的数字为 $a+1$ B. 左下角的数字为 $a+7$
 C. 右下角的数字为 $a+8$ D. 方框中 4 个位置的数相加，结果是 4 的倍数

【答案】D

【解析】

【分析】根据日历中的数字规律：同一行中后面的数字比它前面的大 1，同一列中上一行比下一行的大 7，然后用含 a 的式子表示其余三个数，表达规律即可.

【详解】解：日历中的数字规律：同一行中后面的数字比它前面的大 1，同一列中上一行比下一行的大 7，任意选择其中所示的含 4 个数字的方框部分，设右上角的数字为 a ，则有：

左上角的数字为 $a-1$ ，故选项 A 错误，不符合题意；

左下角的数字为 $a+6$ ，故选项 B 错误，不符合题意；

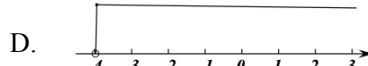
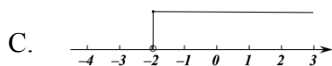
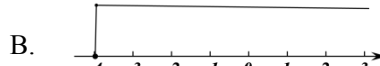
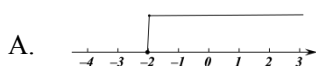
右下角的数字为 $a+7$ ，故选项 C 错误，不符合题意；

把方框中 4 个位置的数相加，即： $a-1+a+a+6+a+7=4a+12=4(a+3)$ ，结果是 4 的倍数，故选项 D 正确；

故选：D.

【点睛】本题考查整式的混合运算和列代数式，解题的关键是掌握整式相关运算的法则.

10. 解不等式 $\frac{1+4x}{3} > x-1$ ，下列在数轴上表示的解集正确的是 ().



【答案】D

【解析】

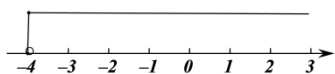
【分析】按去分母、去括号、移项、合并同类项，未知数系数化为 1 的步骤求出解集，再把解集在数轴上表示出来，注意包含端点值用实心圆点，不包含端点值用空心圆点，即可求解.

【详解】解： $1+4x > 3x-3$

$$4x - 3x > -3 - 1$$

$$x > -4,$$

解集在数轴上表示为



故选：D.

【点睛】本题考查了一元一次不等式的解法及解集在数轴上的表示方法，掌握解法及表示方法是解题的关键.

11. 某校学生去距离学校12km的博物馆参观，一部分学生骑自行车先走，过了20min后，其余学生乘汽车出发，结果他们同时到达. 已知汽车的速度是骑车学生速度的2倍，汽车的速度是（ ）.

- A. 0.2km/min B. 0.3km/min C. 0.4km/min D. 0.6km/min

【答案】B

【解析】

【分析】设骑车学生的速度为 x km/min，则汽车的速度为 $2x$ km/min，根据题意可得，乘坐汽车比骑自行车少用20min，据此列分式方程求解.

【详解】解：设骑车学生的速度为 x km/min，则汽车的速度为 $2x$ km/min，

$$\text{由题意得：} \frac{12}{x} - \frac{12}{2x} = 20,$$

$$\text{解得：} x = 0.3,$$

经检验： $x = 0.3$ 是原方程的解，且符合题意，

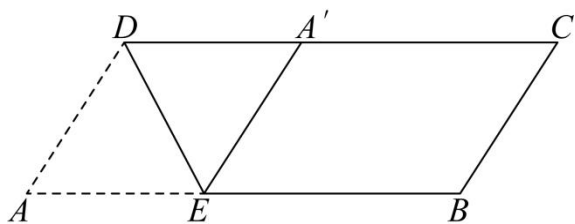
所以，骑车学生的速度为0.3km/min.

故选：B.

【点睛】本题考查了分式方程的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程求解，注意检验.

二、填空题（将答案写在答题卡上指定的位置. 每题3分，计12分.）

12. 如图，小宇将一张平行四边形纸片折叠，使点A落在长边CD上的点A'处，并得到折痕DE，小宇测得长边 $CD = 8$ ，则四边形 $A'EBC$ 的周长为_____.



【答案】16

【解析】

【分析】可证 $\angle ADE = \angle AED$ ，从而可得 $AD = AE$ ，再证四边形 $A'EBC$ 是平行四边形，可得

$C_{\square A'EBC} = 2(A'C + A'E)$ ，即可求解.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle AED = \angle A'DE,$$

由折叠得： $\angle ADE = \angle A'DE$ ，

$$AD = A'D, \quad AE = A'E,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED,$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore AD = AE = A'D = A'E,$$

$$\therefore AB - BE = CD - A'D,$$

$$\therefore A'C = BE,$$

∴ 四边形 $A'EBC$ 是平行四边形，

$$\therefore C_{\square A'EBC} = 2(A'C + A'E)$$

$$= 2(A'C + A'D)$$

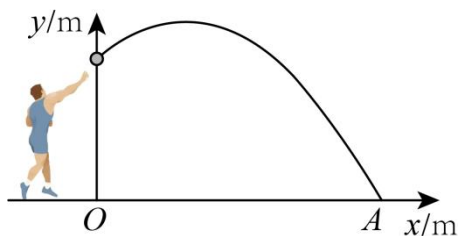
$$= 2CD = 16.$$

故答案：16.

【点睛】本题考查了平行四边形判定及性质，折叠的性质，掌握相关的判定方法及性质是解题的关键.

13. 如图，一名学生推铅球，铅球行进高度 y (单位：m) 与水平距离 x (单位：m) 之间的关系是

$$y = -\frac{1}{12}(x-10)(x+4), \text{ 则铅球推出的距离 } OA = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m.}$$



【答案】10

【解析】

【分析】令 $y = 0$ ，则 $0 = -\frac{1}{12}(x-10)(x+4)$ ，再解方程，结合函数图象可得答案.

【详解】解：令 $y=0$ ，则 $0 = -\frac{1}{12}(x-10)(x+4)$ ，

解得： $x_1=10$ ， $x_2=-4$ ，

$\therefore OA=10$ ，

故答案为：10.

【点睛】本题考查的是二次函数的实际应用，理解题意令 $y=0$ 求解方程的解是解本题的关键.

14. 已知 x_1 、 x_2 是方程 $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 的两根，则代数式 $\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}$ 的值为_____.

【答案】1

【解析】

【分析】根据 x_1 、 x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两个根，则有 $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$ ，求解即可.

【详解】解：由题意得

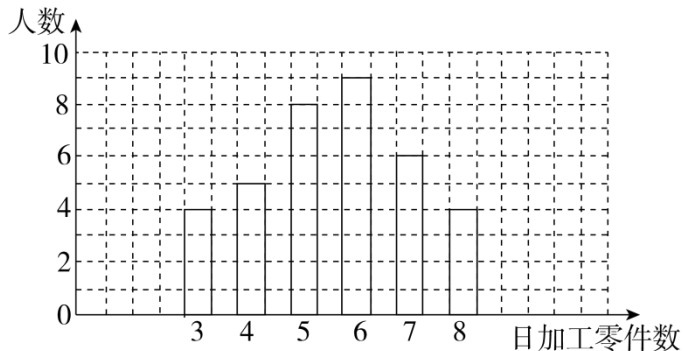
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$\text{原式} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = 1.$$

故答案：1.

【点睛】本题考查了韦达定理，掌握定理是解题的关键.

15. 如图，条形图描述了某车间工人日加工零件数的情况. 这些工人日加工零件数的中位数是_____.



【答案】6

【解析】

【分析】将这组数据按从小到大的顺序排列，数据的个数是奇数时，中间的数为中位数，数据的个数为偶数时，中间两个数的平均数即可求解.

【详解】解：由图得：工人人数为 $4+5+8+9+6+4=36$,

$\therefore$ 将这组数据按从小到大的顺序排列后，中间的两个数为第18、19个数，

$\therefore$ 第18、19个数都是6，

$$\therefore \frac{6+6}{2} = 6,$$

故答案：6.

【点睛】本题考查了中位数的定义，理解定义是解题的关键.

三、解答题（将解答过程写在答题卡上指定的位置. 本大题共有9题，计75分.）

16. 先化简，再求值： $\frac{a^2-4a+4}{a^2-4} \div \frac{a-2}{a^2+2a} + 3$ ，其中 $a = \sqrt{3}-3$.

【答案】 $a+3, \sqrt{3}$

【解析】

【分析】先利用分式除法法则对原式进行化简，再把 $a = \sqrt{3}-3$ 代入化简结果进行计算即可.

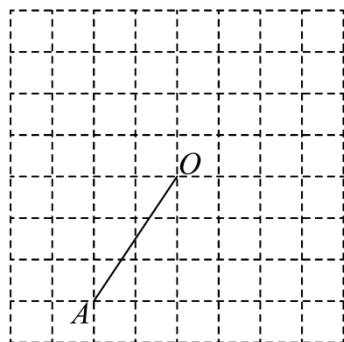
$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & \frac{a^2-4a+4}{a^2-4} \div \frac{a-2}{a^2+2a} + 3 \\ &= \frac{(a-2)^2}{(a+2)(a-2)} \times \frac{a(a+2)}{a-2} + 3 \\ &= a+3 \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{3}-3$ 时，

$$\text{原式} = \sqrt{3}-3+3 = \sqrt{3}.$$

【点睛】此题考查了分式的化简求值，熟练掌握分式的除法运算法则和二次根式的运算法则是解题的关键.

17. 如图，在方格纸中按要求画图，并完成填空.



- (1) 画出线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90° 后得到的线段 OB ，连接 AB ；
- (2) 画出与 $\triangle AOB$ 关于直线 OB 对称的图形，点 A 的对称点是 C ；
- (3) 填空： $\angle OCB$ 的度数为_____.

【答案】(1) 详见解析

(2) 详见解析 (3) 45°

【解析】

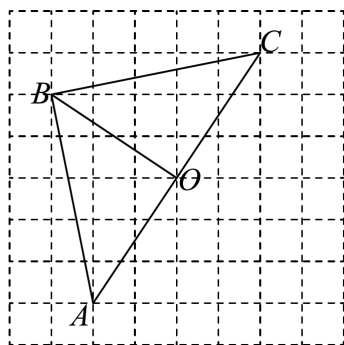
【分析】(1) 根据题目叙述画出图形即可；

(2) 根据题目叙述画出图形即可；

(3) 由 (1) 作图可得 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，且 $\angle A = 45^\circ$ ，由对称的性质可得 $\angle OCB = 45^\circ$.

【小问 1 详解】

在方格纸中画出线段 OA 绕点 O 顺时针旋转 90° 后得到的线段 OB ，连接 AB ，如图；



【小问 2 详解】

画出与 $\triangle AOB$ 关于直线 OB 对称的图形，点 A 的对称点是 C ；如上图所示：

【小问 3 详解】

由 (1) 作图可得 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，且 $\angle A = 45^\circ$ ，

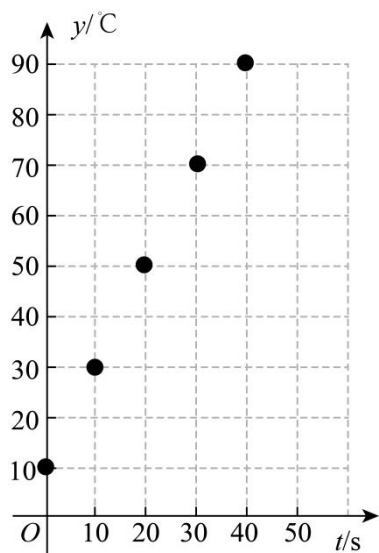
再根据对称的性质可得 $\angle OCB = \angle A = 45^\circ$.

故答案为： 45° .

【点睛】此题考查了旋转作图及作轴对称图形，解答本题的关键是仔细审题，得出旋转三要素，进而得出旋转后的图形.

18. 某食用油的沸点温度远高于水的沸点温度. 小聪想用刻度不超过 100°C 的温度计测算出这种食用油沸点的温度. 在老师的指导下，他在锅中倒入一些这种食用油均匀加热，并每隔 10s 测量一次锅中油温，得到的数据记录如下：

时间 t/s	0	10	20	30	40
油温 $y/^\circ\text{C}$	10	30	50	70	90



(1) 小聪在直角坐标系中描出了表中数据对应的点. 经老师介绍, 在这种食用油达到沸点前, 锅中油温 y (单位: $^{\circ}\text{C}$) 与加热的时间 t (单位: s) 符合初中学习过的某种函数关系, 填空: 可能是_____函数关系 (请选填“正比例”“一次”“二次”“反比例”);

(2) 根据以上判断, 求 y 关于 t 的函数解析式;

(3) 当加热110s时, 油沸腾了, 请推算沸点的温度.

【答案】 (1) 一次 (2) $y = 2t + 10$

(3) 当加热110s时, 油沸腾了, 推算沸点的温度为 230°C

【解析】

【分析】 (1) 根据表格中两个变量变化的对应值进行解答即可.

(2) 运用待定系数法求解即可;

(3) 把 $t = 110$ 代入函数关系式, 求出函数值即可.

【小问1详解】

由表格中两个变量对应值的变化规律可知, 时间每增加10s, 油的温度就升高 20°C ,

故可知可能是一次函数关系,

故答案为: 一次;

【小问2详解】

设这个一次函数的解析式为 $y = kt + b (k \neq 0)$,

$\therefore$ 当 $t = 0$ 时, $y = 10$; 当 $t = 10$ 时, $y = 30$,

$$\therefore \begin{cases} 10 = b \\ 30 = 10k + b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k=2 \\ b=10 \end{cases},$$

$\therefore y$ 关于 t 的函数解析式为 $y = 2t + 10$;

【小问 3 详解】

当 $t = 110$ 时, $y = 2 \times 110 + 10 = 230$

答: 当加热 110s 时, 油沸腾了, 推算沸点的温度为 230°C .

【点睛】 本题考查函数的表示方法以及求函数值; 能够通过表格确定自变量与因变量的变化关系是解题的关键.

19. 2023 年 5 月 30 日, “神舟十六号” 航天飞船成功发射. 如图, 飞船在离地球大约 330km 的圆形轨道上, 当运行到地球表面 P 点的正上方 F 点时, 从中直接看到地球表面一个最远的点是点 Q . 在 $\text{Rt}\triangle OQF$ 中, $OP = OQ \approx 6400\text{km}$.

(参考数据: $\cos 16^{\circ} \approx 0.96, \cos 18^{\circ} \approx 0.95, \cos 20^{\circ} \approx 0.94, \cos 22^{\circ} \approx 0.93, \pi \approx 3.14$)

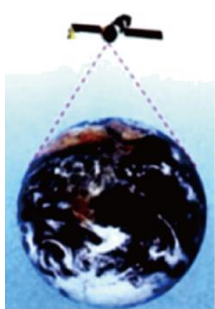


图 1

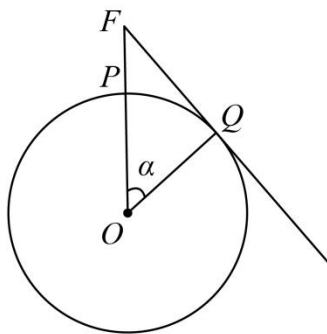


图 2

- (1) 求 $\cos \alpha$ 的值 (精确到 0.01);
- (2) 在 $\odot O$ 中, 求 $\widehat{PQ}$ 的长 (结果取整数).

【答案】 (1) 0.95

(2) 2010km

【解析】

【分析】 (1) 在 $\text{Rt}\triangle OFQ$ 中, 利用余弦函数即可求解;

(2) 先求得 α 的度数, 再利用弧长公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: 由题意可知, $PF = 330\text{km}$,

$$\because OP = OQ \approx 6400\text{km},$$

$$\therefore OF = OP + PF = 330 + 6400 = 6730\text{km},$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle OFQ \text{ 中, } \cos \alpha = \frac{OQ}{OF} = \frac{6400}{6730} \approx 0.95;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: } \because \cos \alpha \approx 0.95, \cos 18^\circ \approx 0.95,$$

$$\therefore \alpha = 18^\circ,$$

$$\therefore \widehat{PQ} \text{ 的长为 } l = \frac{18 \times \pi \times 6400}{180} = 640\pi$$

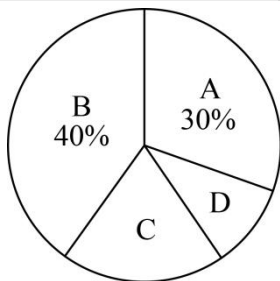
$$\approx 2009.6$$

$$\approx 2010\text{km}.$$

【点睛】 本题考查了求余弦函数的值，弧长公式的应用，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

20. “阅读新时代，书香满宜昌”. 在“全民阅读月”活动中，某校提供了四类适合学生阅读的书籍：A 文学类，B 科幻类，C 漫画类，D 数理类. 为了解学生阅读兴趣，学校随机抽取了部分学生进行调查（每位学生仅选一类）. 根据收集到的数据，整理后得到下列不完整的图表：

书籍类别	学生人数
A 文学类	24
B 科幻类	m
C 漫画类	16
D 数理类	8



- (1) 本次抽查的学生人数是_____，统计表中的 $m =$ _____；
- (2) 在扇形统计图中，“C 漫画类”对应的圆心角的度数是_____；
- (3) 若该校共有 1200 名学生，请你估计该校学生选择“D 数理类”书籍的学生人数；
- (4) 学校决定成立“文学”“科幻”“漫画”“数理”四个阅读社团. 若小文、小明随机选取四个社团中

的一个，请利用列表或画树状图的方法，求他们选择同一社团的概率.

【答案】(1) 80, 32

(2) 72°

(3) 120

(4) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 利用 A 文学类的人数除以对应的百分比即可得到本次抽查的学生人数，用抽查总人数乘以 B 科幻类的百分比即可得到 m 的值；

(2) 用 360° 乘以“ C 漫画类”对应的百分比即可得到“ C 漫画类”对应的圆心角的度数；

(3) 用该校共有学生数乘以抽查学生中选择“ D 数理类”书籍的学生的百分比即可得到该校学生选择“ D 数理类”书籍的学生人数；

(4) 画出树状图，找到等可能情况总数和小文、小明选择同一社团的情况数，利用概率公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：由题意得，本次抽查的学生人数是 $24 \div 30\% = 80$ (人)，

统计表中的 $m = 80 \times 40\% = 32$ ，

故答案为：80, 32

【小问 2 详解】

在扇形统计图中，“ C 漫画类”对应的圆心角的度数是：

$$360^\circ \times \frac{16}{80} \times 100\% = 72^\circ,$$

故答案为： 72°

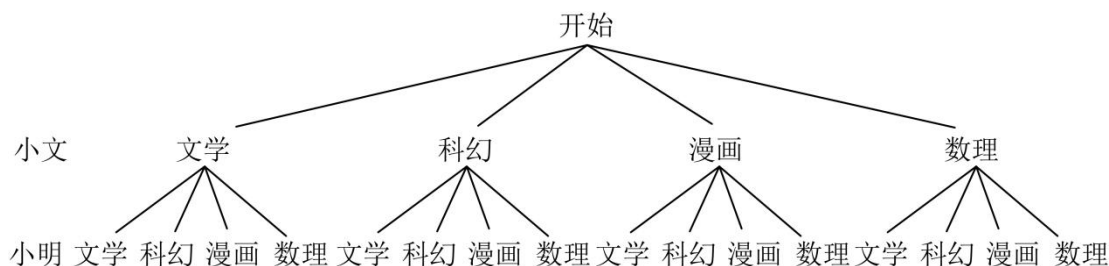
【小问 3 详解】

由题意得， $1200 \times \frac{8}{80} \times 100\% = 120$ (人)，

即估计该校学生选择“ D 数理类”书籍的学生为 120 人；

【小问 4 详解】

树状图如下：



从树状图可看出共有 16 种等可能的情况，小文、小明选择同一社团的情况数共有 4 种，

$$\therefore P(\text{小文、小明选择同一社团}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

【点睛】此题考查了树状图或列表法求概率、样本估计总体、扇形统计图等相关知识，读懂题意，熟练掌握树状图或列表法求概率和准确计算是解题的关键.

21. 如图 1，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， PB 是 $\odot O$ 的切线， PA 交 $\odot O$ 于点 C ， $AB = 4$ ， $PB = 3$.

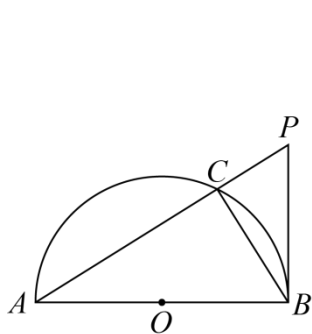


图1

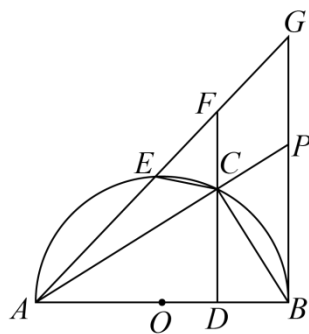


图2

- (1) 填空： $\angle PBA$ 的度数是_____， PA 的长为_____；
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (3) 如图 2， $CD \perp AB$ ，垂足为 D 。 E 是 $\widehat{AC}$ 上一点， $AE = 5EC$ 。 延长 AE ，与 DC ， BP 的延长线分别交于点 F, G ，求 $\frac{EF}{FG}$ 的值.

【答案】 (1) 90° ， 5；

(2) $\frac{96}{25}$

(3) $\frac{7}{18}$

【解析】

【分析】 (1) 根据切线性质和勾股定理分别求解即可；

(2) 由面积法求出 $BC = \frac{12}{5}$ ，再利用勾股定理求 AC ，则 $\triangle ABC$ 的面积可求；

(3) 先证明 $\triangle EAC \sim \triangle PAG$ ，得到 $\frac{AC}{AG} = \frac{AE}{AP} = \frac{EC}{GP}$ ，利用 $AE = 5EC$ ，分别得到 $GP = 1$ ， $AB = BG$ 进而计算 $AG = 4\sqrt{2}$ ， $AF = \frac{64\sqrt{2}}{25}$ ，在分别求出 EF, FG 则问题可解；

【小问 1 详解】

解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径， PB 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle PBA$ 的度数是 90° ；

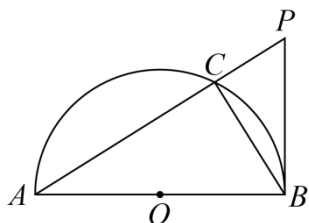
$\because AB = 4$ ， $PB = 3$ ，

$$\therefore PA = \sqrt{AB^2 + PB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5;$$

故答案为: 90° , 5;

【小问 2 详解】

如图,



$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = \angle PCB = 90^\circ,$$

$$\because AB = 4, \quad PB = 3, \quad PA = 5,$$

$$\therefore \text{由面积法} \frac{1}{2} AB \cdot PB = \frac{1}{2} AP \cdot BC,$$

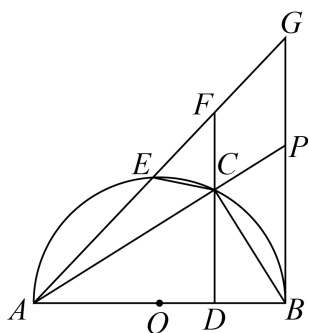
$$\therefore BC = \frac{12}{5}$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{16}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{5} \times \frac{12}{5} = \frac{96}{25};$$

【小问 3 详解】

方法一：如图，



由 $\angle ACB = \angle ABP = 90^\circ$

$$\therefore \angle APB = \angle ABC$$

$$\therefore \angle FEC = \angle ABC$$

$$\therefore \angle FEC = \angle APB$$

$$\therefore \angle AEC = \angle APG$$

$$\because \angle EAC = \angle PAG$$

$$\therefore \triangle EAC \sim \triangle PAG$$

$$\therefore \frac{AC}{AG} = \frac{AE}{AP} = \frac{EC}{GP}$$

$$\text{设 } EC = x, \quad AE = 5x$$

$$\because AP = 5$$

$$\backslash GP = 1$$

$$\therefore BG = BP + PG = 3 + 1 = 4$$

$$\therefore AB = BG$$

$$\therefore \triangle ABG \text{ 是等腰直角三角形, } AG = 4\sqrt{2}$$

$$\because AC = \frac{16}{5},$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\therefore AE = 5x = 2\sqrt{2}$$

$$\because \angle GAB = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle FAD \text{ 是等腰直角三角形}$$

$$\because \cos \angle CAD = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \frac{AD}{\frac{16}{5}} = \frac{\frac{16}{5}}{4},$$

$$\therefore AD = \frac{64}{25},$$

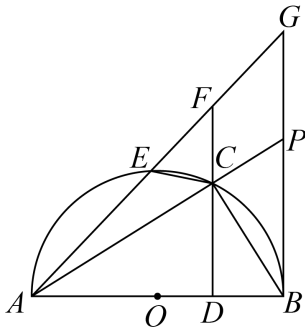
$$\therefore AF = \frac{64\sqrt{2}}{25},$$

$$\therefore EF = AF - AE = \frac{14\sqrt{2}}{25},$$

$$\therefore FG = AG - AF = \frac{36\sqrt{2}}{25},$$

$$\therefore \frac{EF}{FG} = \frac{14}{25} \sqrt{2} : \frac{36}{25} \sqrt{2} = \frac{7}{18}.$$

方法二：如图



由 $\angle ACB = \angle ADC = 90^\circ$

$$\therefore \angle ACD = \angle ABC$$

$$\because \angle FEC = \angle ABC$$

$$\therefore \angle FEC = \angle ACD$$

$$\therefore \angle AEC = \angle ACF$$

$$\because \angle EAC = \angle CAF$$

$$\therefore \triangle EAC \sim \triangle CAF$$

$$\therefore \frac{AC}{AF} = \frac{AE}{AC} = \frac{EC}{FC}$$

设 $EC = x, AE = 5x$

$$\because AC = \frac{16}{5}$$

$$\therefore FC = \frac{16}{25},$$

$$\because AD = \frac{64}{25}, \quad CD = \frac{48}{25}$$

$$\therefore FD = FC + CD = \frac{16}{25} + \frac{48}{25} = \frac{64}{25}$$

$$\therefore AD = DF$$

$$\therefore \triangle ADF \text{ 是等腰直角三角形, } AF = \frac{64}{25} \sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

$$\therefore AE = 5x = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore EF = AF - AE = \frac{14\sqrt{2}}{25}$$

$$\because \angle FAD = 45^\circ$$

$$\therefore \triangle GAB \text{ 是等腰直角三角形, } AG = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore GF = AG - AF = \frac{36\sqrt{2}}{25}$$

$$\therefore \frac{EF}{FG} = \frac{14}{25} \sqrt{2} : \frac{36}{25} \sqrt{2} = \frac{7}{18}.$$

【点睛】本题考查了圆的切线的性质和相似三角形的性质和判定，解答关键是根据条件证明三角形相似，再根据相似三角形的性质解答问题.

22. 为纪念爱国诗人屈原，人们有了端午节吃粽子的习俗. 某顾客端午节前在超市购买豆沙粽 10 个，肉粽 12 个，共付款 136 元，已知肉粽单价是豆沙粽的 2 倍.

(1) 求豆沙粽和肉粽的单价；

(2) 超市为了促销，购买粽子达 20 个及以上时实行优惠，下表列出了小欢妈妈、小乐妈妈的购买数量（单位：个）和付款金额（单位：元）；

	豆沙粽数量	肉粽数量	付款金额
小欢妈妈	20	30	270
小乐妈妈	30	20	230

①根据上表，求豆沙粽和肉粽优惠后的单价；

②为进一步提升粽子的销量，超市将两种粽子打包成 A, B 两种包装销售，每包都是 40 个粽子（包装成本忽略不计），每包的销售价格按其中每个粽子优惠后的单价合计. A, B 两种包装中分别有 m 个豆沙粽，m 个肉粽，A 包装中的豆沙粽数量不超过肉粽的一半. 端午节当天统计发现，A, B 两种包装的销量分别为 $(80-4m)$ 包， $(4m+8)$ 包，A, B 两种包装的销售总额为 17280 元. 求 m 的值.

【答案】(1) 豆沙粽的单价为 4 元，肉粽的单价为 8 元

(2) ①豆沙粽优惠后的单价为 3 元，肉粽优惠后的单价为 7 元；② $m = 10$

【解析】

【分析】(1) 设豆沙粽的单价为 x 元，则肉粽的单价为 $2x$ 元，依题意列一元一次方程即可求解；

(2) ①设豆沙粽优惠后的单价为 a 元，则肉粽优惠后的单价为 b 元，依题意列二元一次方程组即可求解；

②根据销售额=销售单价×销售量，列一元二次方程，解之即可得出 m 的值.

【小问 1 详解】

解：设豆沙粽的单价为 x 元，则肉粽的单价为 $2x$ 元，

依题意得 $10x + 12 \times 2x = 136$ ，

解得 $x = 4$ ；

则 $2x = 8$ ；

所以豆沙粽的单价为 4 元，肉粽的单价为 8 元；

【小问 2 详解】

解：①设豆沙粽优惠后的单价为 a 元，则肉粽优惠后的单价为 b 元，

$$\text{依题意得} \begin{cases} 20a + 30b = 270 \\ 30a + 20b = 230 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases},$$

所以豆沙粽优惠后的单价为 3 元，肉粽优惠后的单价为 7 元；

②依题意得 $[3m + (40 - m) \times 7] \times (80 - 4m) + [3 \times (40 - m) + 7m] \times (4m + 8) = 17280$ ，

解得 $m = 19$ 或 $m = 10$ ，

$$\because m < \frac{1}{2}(40 - m),$$

$$\therefore m < \frac{40}{3},$$

$$\therefore m = 10.$$

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用、二元一次方程组的应用和一元一次方程的应用，根据题意找到题中的等量关系列出方程或方程组是解题的关键.

23. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别是边 AD ， AB 上的点，连接 CE ， EF ， CF 。

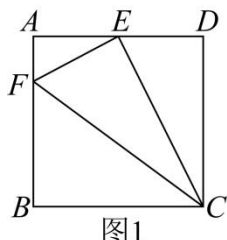


图1

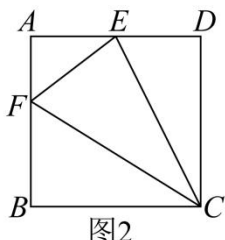


图2

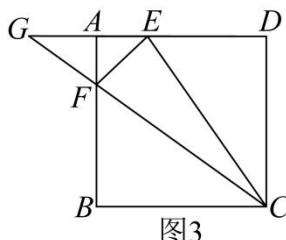


图3

(1) 若正方形 $ABCD$ 的边长为 2， E 是 AD 的中点.

①如图 1，当 $\angle FEC = 90^\circ$ 时，求证： $\triangle AEF \sim \triangle DCE$ ；

②如图 2，当 $\tan \angle FCE = \frac{2}{3}$ 时，求 AF 的长；

(2) 如图 3, 延长 CF , DA 交于点 G , 当 $GE = DE$, $\sin \angle FCE = \frac{1}{3}$ 时, 求证: $AE = AF$.

【答案】(1) ①详见解析; ② $AF = \frac{6}{7}$

(2) 详见解析

【解析】

【分析】(1) ①由 $\angle ADC = \angle BAD = \angle FEC = 90^\circ$, 证明 $\angle AEF = \angle ECD$, 可得结论; ②如图, 延长 DA , CF 交于点 G 作 $GH \perp CE$, 垂足为 H , 证明 $\triangle CED \sim \triangle GEH$, 可得 $\frac{GE}{CE} = \frac{GH}{CD} = \frac{EH}{ED}$, 可得 $CE = \sqrt{5}$,

设 $EH = m, GH = 2m, EG = \sqrt{5}m$ 可得 $\tan \angle FCE = \frac{GH}{CH} = \frac{2m}{\sqrt{5}+m} = \frac{2}{3}$, 可得 $m = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 可得

$EG = \sqrt{5}m = \frac{5}{2}$, 证明 $\triangle AGF \sim \triangle DGC$, 可得 $\frac{AG}{DG} = \frac{AF}{DC}$, 从而可得答案;

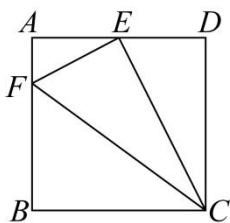
(2) 如图, 延长 CE , 作 $GH \perp CE$, 垂足为 H , 证明 $\triangle CED \sim \triangle GEH$, 设 $AD = CD = a, GE = DE = t, EH = x, GH = y, CE = n$, 可得 $x = \frac{t^2}{n}, y = \frac{at}{n}$, 由 $\sin \angle FCE = \frac{1}{3}$, 可得

$\tan \angle FCE = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, 可得 $2\sqrt{2}at = t^2 + n^2$, 由 $n^2 = t^2 + a^2$ 可得 $a^2 - 2\sqrt{2}at + 2t^2 = 0$, 可得 $a = \sqrt{2}t$, 证

明 $\triangle AGF \sim \triangle DGC$, 可得 $\frac{AG}{DG} = \frac{AF}{DC}$, $AF = \frac{a(2t-a)}{2t} = a - \frac{a^2}{2t} = a - \frac{2t^2}{2t} = a - t$, 从而可得答案.

【小问 1 详解】

解: 如图,



正方形 $ABCD$ 中, $CD = AD = 2$,

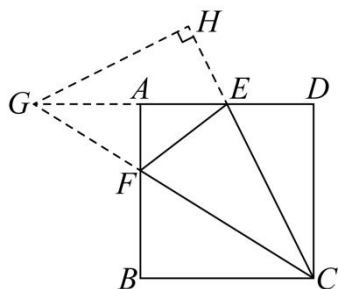
① $\because \angle ADC = \angle BAD = \angle FEC = 90^\circ$,

$\therefore \angle AEF + \angle CED = 90^\circ = \angle CED + \angle DCE$,

$\therefore \angle AEF = \angle ECD$,

$\therefore \triangle AEF \sim \triangle DCE$,

②如图,



延长 DA ， CF 交于点 G ，

作 $GH \perp CE$ ，垂足为 H ，

$\because \angle EDC = \angle EHG = 90^\circ$ 且 $\angle CED = \angle GEH$ ，

$\therefore \triangle CED \sim \triangle GEH$ ，

$$\therefore \frac{GE}{CE} = \frac{GH}{CD} = \frac{EH}{ED},$$

$\because CD = 2, DE = 1$ ，

$$\therefore CE = \sqrt{5},$$

方法一：设 $EH = m$ ，

$$\therefore \frac{GE}{\sqrt{5}} = \frac{GH}{2} = \frac{m}{1},$$

$$\therefore GH = 2m, EG = \sqrt{5}m,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle CHG \text{ 中, } \tan \angle FCE = \frac{GH}{CH} = \frac{2m}{\sqrt{5} + m} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore m = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore EG = \sqrt{5}m = \frac{5}{2},$$

方法二：在 $\text{Rt}\triangle GHE$ 中，由 $\tan \angle FCE = \frac{2}{3}$ ，设 $GH = 2n, CH = 3n$ ，

$$\therefore \frac{3n - \sqrt{5}}{1} = \frac{2n}{2} = \frac{GE}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore n = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore GE = \sqrt{5}n = \frac{5}{2},$$

又 $\because \angle GAF = \angle GDC = 90^\circ$ 且 $\angle AGF = \angle DGC$,

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle DGC,$$

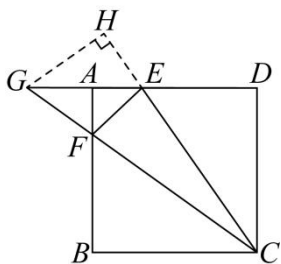
$$\therefore \frac{AG}{DG} = \frac{AF}{DC},$$

$$\therefore \frac{3}{2} : \frac{7}{2} = AF : 2,$$

$$\therefore AF = \frac{6}{7};$$

【小问 2 详解】

如图



延长 CE ，作 $GH \perp CE$ ，垂足为 H ，

$\because \angle EDC = \angle EHG = 90^\circ$ 且 $\angle CED = \angle GEH$ ，

$$\therefore \triangle CED \sim \triangle GEH,$$

设 $AD = CD = a, GE = DE = t, EH = x, GH = y, CE = n$ ，

$$\therefore \frac{x}{t} = \frac{y}{a} = \frac{t}{n},$$

$$\therefore x = \frac{t^2}{n}, y = \frac{at}{n},$$

在 $\text{Rt} \triangle CHG$ 中， $\sin \angle FCE = \frac{1}{3}$ ，

$$\therefore \tan \angle FCE = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{y}{x+n} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$\therefore 2\sqrt{2}y = x + n,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{2}at}{n} = \frac{t^2}{n} + n,$$

$$\therefore 2\sqrt{2}at = t^2 + n^2,$$

$$\because \text{在 Rt}\triangle CDE \text{ 中, } n^2 = t^2 + a^2,$$

$$\therefore 2\sqrt{2}at = t^2 + t^2 + a^2,$$

$$\therefore a^2 - 2\sqrt{2}at + 2t^2 = 0,$$

$$\therefore (a - \sqrt{2}t)^2 = 0, \text{ 则 } a = \sqrt{2}t,$$

$$\text{又} \because \angle GAF = \angle GDC = 90^\circ \text{ 且 } \angle AGF = \angle DGC,$$

$$\therefore \triangle AGF \sim \triangle DGC,$$

$$\therefore \frac{AG}{DG} = \frac{AF}{DC},$$

$$\therefore \frac{AF}{a} = \frac{2t-a}{2t},$$

$$\therefore AF = \frac{a(2t-a)}{2t} = a - \frac{a^2}{2t} = a - \frac{2t^2}{2t} = a - t,$$

$$\therefore AE = a - t,$$

$$\therefore AE = AF.$$

【点睛】本题考查的是正方形的性质，勾股定理的应用，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，本题计算量大，对学生的要求高，熟练的利用参数建立方程是解本题的关键。

24. 如图，已知 $A(0,2), B(2,0)$ 。点 E 位于第二象限且在直线 $y = -2x$ 上， $\angle EOD = 90^\circ$ ， $OD = OE$ ，连接 AB ， DE ， AE ， DB 。

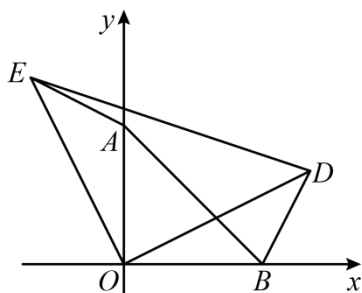


图1

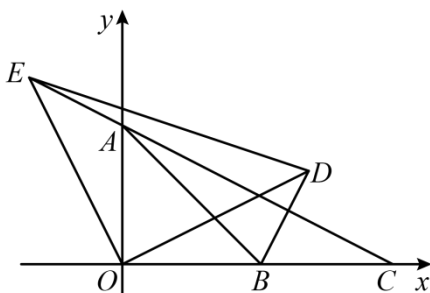


图2

- (1) 直接判断 $\triangle AOB$ 的形状: $\triangle AOB$ 是_____三角形;
- (2) 求证: $\triangle AOE \cong \triangle BOD$;
- (3) 直线 EA 交 x 轴于点 $C(t, 0), t > 2$. 将经过 B, C 两点的抛物线 $y_1 = ax^2 + bx - 4$ 向左平移 2 个单位, 得到抛物线 y_2 .
- ①若直线 EA 与抛物线 y_1 有唯一交点, 求 t 的值;
- ②若抛物线 y_2 的顶点 P 在直线 EA 上, 求 t 的值;
- ③将抛物线 y_2 再向下平移, $\frac{2}{(t-1)^2}$ 个单位, 得到抛物线 y_3 . 若点 D 在抛物线 y_3 上, 求点 D 的坐标.

【答案】(1) 等腰直角三角形

(2) 详见解析 (3) ① $t = 3$; ② $t = 6$; ③ $D\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right)$

【解析】

【分析】(1) 由 $A(0, 2), B(2, 0)$ 得到 $OA = OB = 2$, 又由 $\angle AOB = 90^\circ$, 即可得到结论;

(2) 由 $\angle EOD = 90^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$ 得到 $\angle AOE = \angle BOD$, 又有 $AO = OB$, $OD = OE$, 利用 SAS 即可证明 $\triangle AOE \cong \triangle BOD$;

(3) ①求出直线 AC 的解析式和抛物线 y_1 的解析式, 联立得 $x^2 - (t+3)x + 3t = 0$, 由

$\Delta = (t+3)^2 - 4 \times 3t = (t-3)^2 = 0$ 即可得到 t 的值;

②抛物线 $y_1 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t+2)x - 4$ 向左平移 2 个单位得到抛物线 $y_2 = -\frac{2}{t}\left(x - \frac{t-2}{2}\right)^2 + \frac{(t-2)^2}{2t}$, 则抛

物线 y_2 的顶点 $P\left(\frac{t-2}{2}, \frac{(t-2)^2}{2t}\right)$, 将顶点 $P\left(\frac{t-2}{2}, \frac{(t-2)^2}{2t}\right)$ 代入 $y_{AC} = -\frac{2}{t}x + 2$ 得到 $t^2 - 6t = 0$, 解得

$t_1 = 0, t_2 = 6$, 根据 $t > 2$ 即可得到 t 的值;

③过点 E 作 $EM \perp x$ 轴, 垂足为 M , 过点 D 作 $DN \perp x$ 轴, 垂足为 N , 先证明 $\triangle ODN \cong \triangle EOM$ (AAS),

则 $ON = EM, DN = OM$, 设 $EM = 2OM = 2m$, 由 $OA \parallel EM$ 得到 $OC : CM = OA : EM$, 则 $\frac{t}{t+m} = \frac{2}{2m}$,

求得 $m = \frac{t}{t-1}$, 得到 $D\left(\frac{2t}{t-1}, \frac{t}{t-1}\right)$, 由抛物线 y_2 再向下平移 $\frac{2}{(t-1)^2}$ 个单位, 得到抛物线

$$y_3 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t-2)x - \frac{2}{(t-1)^2}, \text{把 } D\left(\frac{2t}{t-1}, \frac{t}{t-1}\right) \text{ 代入抛物线 } y_3 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t-2)x - \frac{2}{(t-1)^2}, \text{得到}$$

$$3t^2 - 19t + 6 = 0, \text{解得 } t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 6, \text{由 } t > 2, \text{得 } t = 6, \text{即可得到点 } D \text{ 的坐标.}$$

【小问 1 详解】

证明: $\because A(0, 2), B(2, 0),$

$$\therefore OA = OB = 2,$$

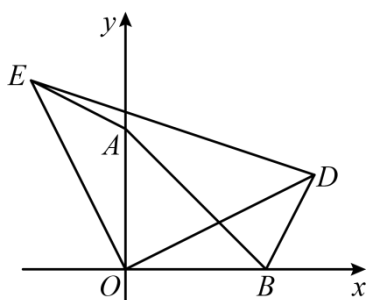
$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等腰直角三角形,

故答案为: 等腰直角三角形

【小问 2 详解】

如图,



$$\therefore \angle EOD = 90^\circ, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB - \angle AOD = \angle DOE - \angle AOD,$$

$$\therefore \angle AOE = \angle BOD,$$

$$\therefore AO = OB, OD = OE,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOD(\text{SAS});$$

【小问 3 详解】

①设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b,$

$$\because A(0, 2), C(t, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} b = 2 \\ kt + b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore y_{AC} = -\frac{2}{t}x + 2,$$

将 $C(t, 0), B(2, 0)$ 代入抛物线 $y_1 = ax^2 + bx - 4$ 得,

$$\begin{cases} 0 = at^2 + bt - 4 \\ 0 = 4a + 2b - 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a = -\frac{2}{t}, b = \frac{2}{t}(t+2),$$

$$\therefore y_1 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t+2)x - 4,$$

$\because$ 直线 $y_{AC} = -\frac{2}{t}x + 2$ 与抛物线 $y_1 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t+2)x - 4$ 有唯一交点

$$\therefore \text{联立解析式组成方程组解得 } x^2 - (t+3)x + 3t = 0$$

$$\therefore \Delta = (t+3)^2 - 4 \times 3t = (t-3)^2 = 0$$

$$\therefore t = 3$$

② $\because$ 抛物线 $y_1 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t+2)x - 4$ 向左平移 2 个单位得到 y_2 ,

$$\therefore \text{抛物线 } y_2 = -\frac{2}{t}\left(x - \frac{t-2}{2}\right)^2 + \frac{(t-2)^2}{2t},$$

$$\therefore \text{抛物线 } y_2 \text{ 的顶点 } P\left(\frac{t-2}{2}, \frac{(t-2)^2}{2t}\right),$$

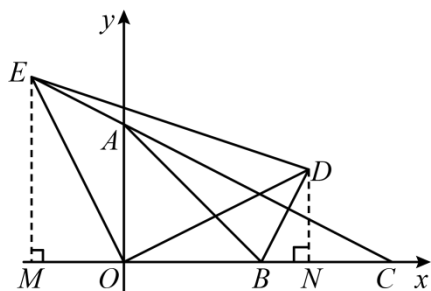
$$\text{将顶点 } P\left(\frac{t-2}{2}, \frac{(t-2)^2}{2t}\right) \text{ 代入 } y_{AC} = -\frac{2}{t}x + 2,$$

$$\therefore t^2 - 6t = 0, \text{ 解得 } t_1 = 0, t_2 = 6,$$

$$\because t > 2,$$

$$\therefore t = 6;$$

③ 过点 E 作 $EM \perp x$ 轴, 垂足为 M , 过点 D 作 $DN \perp x$ 轴, 垂足为 N ,



$$\therefore \angle EMO = \angle OND = 90^\circ,$$

$$\because \angle DOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOM + \angle MEO = \angle EOM + \angle NOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MEO = \angle NOD,$$

$$\therefore OD = OE,$$

$$\therefore \triangle ODN \cong \triangle EOM (\text{AAS}),$$

$$\therefore ON = EM, DN = OM,$$

$$\therefore OE \text{ 的解析式为 } y = -2x,$$

$$\therefore \text{ 设 } EM = 2OM = 2m,$$

$$\therefore DN = OM = m,$$

$$\because EM \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore OA \parallel EM,$$

$$\therefore \triangle CAO \sim \triangle CEM,$$

$$\therefore OC : CM = OA : EM,$$

$$\therefore \frac{t}{t+m} = \frac{2}{2m},$$

$$\therefore m = \frac{t}{t-1},$$

$$\therefore EM = ON = 2OM = 2m = \frac{2t}{t-1}, \quad DN = OM = m = \frac{t}{t-1},$$

$$\therefore D\left(\frac{2t}{t-1}, \frac{t}{t-1}\right),$$

$$\because \text{ 抛物线 } y_2 \text{ 再向下平移 } \frac{2}{(t-1)^2} \text{ 个单位, 得到抛物线 } y_3,$$

$$\therefore \text{ 抛物线 } y_3 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t-2)x - \frac{2}{(t-1)^2},$$

$$\therefore D\left(\frac{2t}{t-1}, \frac{t}{t-1}\right) \text{ 代入抛物线 } y_3 = -\frac{2}{t}x^2 + \frac{2}{t}(t-2)x - \frac{2}{(t-1)^2},$$

$$\therefore 3t^2 - 19t + 6 = 0,$$

解得 $t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = 6$,

由 $t > 2$, 得 $t = 6$,

$$\therefore \frac{2t}{t-1} = \frac{12}{6-1} = \frac{12}{5}, \frac{t}{t-1} = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5},$$

$$\therefore D\left(\frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

【点睛】 此题是二次函数和几何综合题，考查了二次函数的平移、二次函数与一次函数的交点问题、待定系数法求函数解析式、解一元二次方程、全等三角形的判定和性质及相似三角形的判定与性质等知识点，综合性较强，熟练掌握二次函数的平移和数形结合是解题的关键.

