

2023 年十堰市初中毕业生学业水平考试

数学试题

满分 120 分，考试时限 120 分钟.

一、选择题（本题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分）下面每小题给出的四个选项中，只有一个正确的，请把正确选项的字母填涂在答题卡中相应的格子内.

1. -3 的倒数是 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. -3

【答案】C

【解析】

【分析】由互为倒数的两数之积为 1，即可求解.

【详解】解： $\because -3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1$,

$\therefore -3$ 的倒数是 $-\frac{1}{3}$.

故选 C

2. 下列几何体中，三视图的三个视图完全相同的几何体是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】找到从物体正面、左面和上面看得到的图形完全相同的几何体即可.

【详解】解：A. 四棱柱的俯视图与主视图和左视图都不同，故此选项错误；

B. 圆锥的俯视图与主视图和左视图不同，故此选项错误；

C. 圆柱的俯视图与主视图和左视图不同，故此选项错误；

D. 球的三视图完全相同，都是圆，故此选项正确.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了三视图的有关知识，掌握三视图都相同的常见的几何体有球和正方体是解答本题的关键.

3. 下列计算正确的是 ()

A. $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$ B. $(-2a)^3 = -8a^3$ C. $a^8 \div a^4 = a^2$ D. $(a-1)^2 = a^2 - 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式运算法则，幂的运算法则，完全平方公式处理.

【详解】A. $\sqrt{2} + \sqrt{5} = \sqrt{7}$ ，不符合运算法则，本选项错误，不符合题意；

B. $(-2a)^3 = -8a^3$ ，根据积的乘方运算法则处理，运算正确，符合题意；

C. $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故选项错误，不符合题意；

D. $(a-1)^2 = a^2 - 2a + 1$ ，故选项错误，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查二次根式的运算、幂的运算法则、完全平方公式；熟练掌握相关法则是解题的关键.

4. 任意掷一枚均匀的小正方体色子，朝上点数是偶数的概率为（ ）

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】由题意可知掷一枚均匀的小正方体色子有 6 种等可能的结果，再找出符合题意的结果数，最后利用概率公式计算即可.

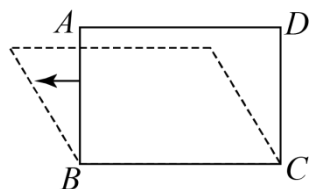
【详解】 $\because$ 任意掷一枚均匀的小正方体色子，共有 6 种等可能的结果，其中朝上点数是偶数的结果有 3 种，

$\therefore$ 朝上点数是偶数的概率为 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

故选 C.

【点睛】本题考查简单的概率计算. 掌握概率公式是解题关键.

5. 如图，将四根木条用钉子钉成一个矩形框架 $ABCD$ ，然后向左扭动框架，观察所得四边形的变化. 下面判断错误的是（ ）



- A. 四边形 $ABCD$ 由矩形变为平行四边形 B. 对角线 BD 的长度减小
C. 四边形 $ABCD$ 的面积不变 D. 四边形 $ABCD$ 的周长不变

【答案】C

【解析】

【分析】根据四边形的不稳定性、矩形的性质和平行四边形的性质，结合图形前后变化逐项判断即可.

【详解】解：A、因为矩形框架 $ABCD$ 向左扭动， $AD = BC$ ， $AB = DC$ ，但 $\angle CBA$ 不再为直角，所以四边形变成平行四边形，故 A 正确，不符合题意；

B、向左扭动框架， BD 的长度减小，故 B 正确，不符合题意；

C、因为拉成平行四边形后，高变小了，但底边没变，所以面积变小了，故 C 错误，符合题意；

D、因为四边形的每条边的长度没变，所以周长没变，故 D 正确，不符合题意，

故选：C.

【点睛】本题主要考查了矩形的性质和平行四边形的性质、四边形的不稳定性，弄清图形变化前后的变量和不变量是解答此题的关键.

6. 为了落实“双减”政策，进一步丰富文体活动，学校准备购进一批篮球和足球，已知每个篮球的价格比每个足球的价格多 20 元，用 1500 元购进篮球的数量比用 800 元购进足球的数量多 5 个，如果设每个足球的价格为 x 元，那么可列方程为（ ）

A. $\frac{1500}{x+20} - \frac{800}{x} = 5$ B. $\frac{1500}{x-20} - \frac{800}{x} = 5$ C. $\frac{800}{x} - \frac{1500}{x+20} = 5$ D. $\frac{800}{x} - \frac{1500}{x-20} = 5$

【答案】A

【解析】

【分析】设每个足球的价格为 x 元，则篮球的价格为 $(x+20)$ 元，根据“用 1500 元购进篮球的数量比用 800 元购进足球的数量多 5 个”列方程即可.

【详解】解：设每个足球的价格为 x 元，则篮球的价格为 $(x+20)$ 元，

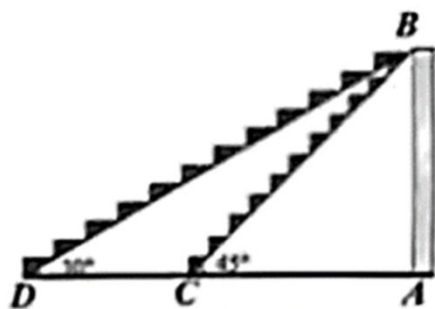
由题意可得：
$$\frac{1500}{x+20} - \frac{800}{x} = 5,$$

故选：A.

【点睛】本题考查分式方程的应用，正确理解题意是关键.

7. 如图所示，有一天桥高 AB 为 5 米， BC 是通向天桥的斜坡， $\angle ACB = 45^\circ$ ，市政部门启动“陡改缓”工程，决定将斜坡的底端 C 延伸到 D 处，使 $\angle D = 30^\circ$ ，则 CD 的长度约为（参考数据：

$\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732$ ）（ ）



- A. 1.59 米 B. 2.07 米 C. 3.55 米 D. 3.66 米

【答案】 D

【解析】

【分析】 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，求得 $AC = AB = 5$ 米，在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中，求得 $AD = 5\sqrt{3}$ 米，即可得到 CD 的长度.

【详解】 解：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 45^\circ$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore AC = AB = 5 \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ADB = 30^\circ$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ，

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \tan \angle ADB,$$

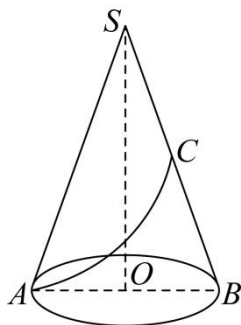
$$\therefore AD = \frac{AB}{\tan 30^\circ} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 5\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$$\therefore CD = AD - AC = 5\sqrt{3} - 5 \approx 8.66 - 5 = 3.66 \text{ (米)}$$

故选： D.

【点睛】 此题考查了解直角三角形的应用，熟练掌握锐角三角函数的定义是解题的关键.

8. 如图，已知点 C 为圆锥母线 SB 的中点， AB 为底面圆的直径， $SB = 6$ ， $AB = 4$ ，一只蚂蚁沿着圆锥的侧面从 A 点爬到 C 点，则蚂蚁爬行的最短路程为 ()



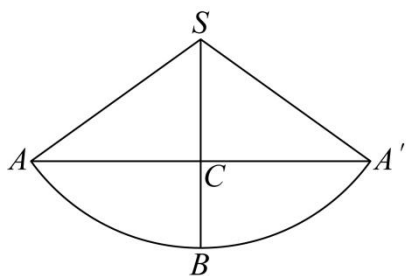
- A. 5 B. $3\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{3}$

【答案】 B

【解析】

【分析】连接 AB ，先根据直径求出底面周长，根据底面周长等于展开后扇形的弧长可求出圆锥的侧面展开后的圆心角，可得 $\triangle SAB$ 是等边三角形，即可求解.

【详解】解：连接 AB ，如图所示，



$\because AB$ 为底面圆的直径， $AB = 4$ ，

设半径为 r ，

$\therefore$ 底面周长 $= 2\pi r = 4\pi$ ，

设圆锥的侧面展开后的圆心角为 n ，

$\because$ 圆锥母线 $SB = 6$ ，

根据底面周长等于展开后扇形的弧长可得： $4\pi = \frac{n\pi \times 6}{180^\circ}$ ，

解得： $n = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle ASC = 60^\circ$ ，

$\because$ 半径 $SA = SB$ ，

$\therefore \triangle SAB$ 是等边三角形，

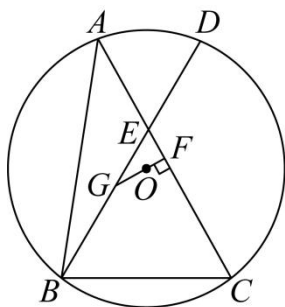
在 $\text{Rt}\triangle ACS$ 中， $AC = SA \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 蚂蚁爬行的最短路程为 $3\sqrt{3}$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查平面展开—最短路径问题，圆锥的侧面展开图是一个扇形。扇形的弧长等于圆锥底面周长，扇形的半径等于圆锥的母线长，本题就是把圆锥的侧面展开成扇形，化曲面为平面，用三角函数求解.

9. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，弦 BD 交 AC 于点 E ， $AE = DE$ ， $BC = CE$ ，过点 O 作 $OF \perp AC$ 于点 F ，延长 FO 交 BE 于点 G ，若 $DE = 3$ ， $EG = 2$ ，则 AB 的长为()

A. $4\sqrt{3}$

B. 7

C. 8

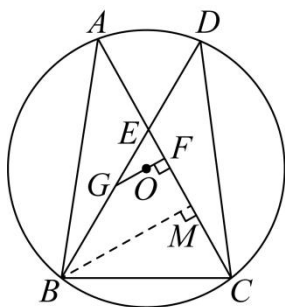
D. $4\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】

【分析】作 $BM \perp AC$ 于点 M ，由题意可得出 $\triangle AEB \cong \triangle DEC$ ，从而可得出 $\triangle EBC$ 为等边三角形，从而得到 $\angle GEF = 60^\circ$ ， $\angle EGF = 30^\circ$ ，再由已知得出 EF ， BC 的长，进而得出 CM ， BM 的长，再求出 AM 的长，再由勾股定理求出 AB 的长.

【详解】解：作 $BM \perp AC$ 于点 M ，



在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle DEC$ 中，

$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ AE = ED \\ \angle AEB = \angle DEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEB \cong \triangle DEC (\text{ASA}),$$

$$\therefore EB = EC,$$

$$\text{又} \because BC = CE,$$

$$\therefore BE = CE = BC,$$

$$\therefore \triangle EBC \text{ 为等边三角形},$$

$$\therefore \angle GEF = 60^\circ, \quad BC = EC$$

$$\therefore \angle EGF = 30^\circ,$$

$$\therefore EG = 2, \quad OF \perp AC, \quad \angle EGF = 30^\circ$$

$$\therefore EF = \frac{1}{2}EG = 1,$$

$$\text{又} \because AE = ED = 3, OF \perp AC$$

$$\therefore CF = AF = AE + EF = 4,$$

$$\therefore AC = 2AF = 8, EC = EF + CF = 5,$$

$$\therefore BC = EC = 5,$$

$$\therefore \angle BCM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MBC = 30^\circ,$$

$$\therefore CM = \frac{5}{2}, \quad BM = \sqrt{BC^2 - CM^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AM = AC - CM = \frac{11}{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 7.$$

故选：B.

【点睛】本题考查全等三角形的判定与性质、等边三角形的判定与性质、三角形的外接圆与外心、勾股定理等知识点，综合性较强，掌握基本图形的性质，熟练运用勾股定理是解题关键.

10. 已知点 $A(x_1, y_1)$ 在直线 $y = 3x + 19$ 上，点 $B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 在抛物线 $y = x^2 + 4x - 1$ 上，若

$y_1 = y_2 = y_3$ 且 $x_1 < x_2 < x_3$ ，则 $x_1 + x_2 + x_3$ 的取值范围是 ()

A. $-12 < x_1 + x_2 + x_3 < -9$

B. $-8 < x_1 + x_2 + x_3 < -6$

C. $-9 < x_1 + x_2 + x_3 < 0$

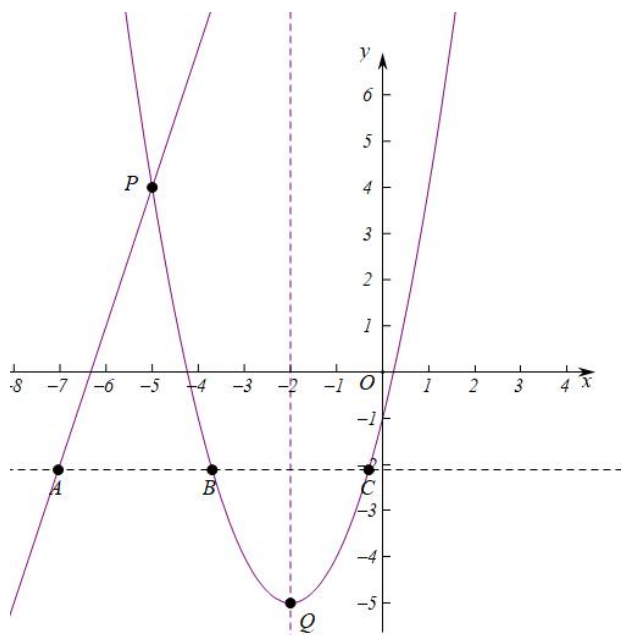
D. $-6 < x_1 + x_2 + x_3 < 1$

【答案】A

【解析】

【分析】设直线 $y = 3x + 19$ 与抛物线 $y = x^2 + 4x - 1$ 对称轴左边的交点为 P ，设抛物线顶点坐标为 Q ，求得其坐标的横坐标，结合图象分析出 x_1 的范围，根据二次函数的性质得出 $x_2 + x_3 = 2 \times (-2) = -4$ ，进而即可求解.

【详解】解：如图所示，设直线 $y = 3x + 19$ 与抛物线 $y = x^2 + 4x - 1$ 对称轴左边的交点为 P ，设抛物线顶点坐标为 Q



$$\text{联立} \begin{cases} y = 3x + 19 \\ y = x^2 + 4x - 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x = -5 \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4 \\ y = 31 \end{cases}$$

$$\therefore P(-5, 4),$$

由 $y = x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$, 则 $Q(-2, -5)$, 对称轴为直线 $x = -2$,

设 $m = y_1 = y_2 = y_3$, 则点 A, B, C 在 $y = m$ 上,

$$\because y_1 = y_2 = y_3 \text{ 且 } x_1 < x_2 < x_3,$$

$$\therefore A \text{ 点在 } P \text{ 点的左侧, 即 } x_1 < -5, \quad x_2 < -2 < x_3,$$

$$\text{当 } m = -5 \text{ 时, } x_2 = x_3$$

$$\text{对于 } y = 3x + 19, \text{ 当 } y = -5, \quad x = -8, \text{ 此时 } x_1 = -8,$$

$$\therefore x_1 > -8,$$

$$\therefore -8 < x_1 < -5$$

$$\because \text{对称轴为直线 } x = -2, \text{ 则 } x_2 + x_3 = 2 \times (-2) = -4,$$

$$\therefore x_1 + x_2 + x_3 \text{ 的取值范围是 } -9 < x_1 + x_2 + x_3 < -12,$$

故选: A.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，一次函数的性质，数形结合熟练掌握是解题的关键.

二、填空题（本题有 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分）

11. 2023 年 5 月 30 日上午，我国载人航天飞船“神舟十六号”发射圆满成功，与此同时，中国载人航天办公室也宣布计划在 2030 年前实现中国人首次登陆距地球平均距离为 38.4 万千米的月球，将 384000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 3.84×10^5

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数，当原数的绝对值 < 1 时， n 负整数.

【详解】解： $384000 = 3.84 \times 10^5$ ，

故答案为： 3.84×10^5 .

【点睛】本题考查科学记数法的表示方法，确定 a 与 n 的值是关键.

12. 若 $x + y = 3$ ， $y = 2$ ，则 $x^2y + xy^2$ 的值是_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】先提公因式分解原式，再整体代值求解即可.

【详解】解： $x^2y + xy^2 = xy(x + y)$ ，

$\because x + y = 3$ ， $y = 2$ ，

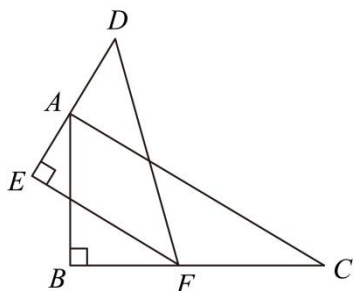
$\therefore x = 1$ ，

$\therefore$ 原式 $= 1 \times 2 \times 3 = 6$ ，

故答案为： 6.

【点睛】本题主要考查因式分解，熟练掌握因式分解的方法，利用整体思想方法是解答的关键.

13. 一副三角板按如图所示放置，点 A 在 DE 上，点 F 在 BC 上，若 $\angle EAB = 35^\circ$ ，则 $\angle DFC =$ _____ $^\circ$.

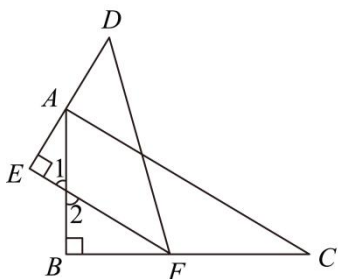


【答案】 100° ## 100 度

【解析】

【分析】 根据直角三角板的性质，得到 $\angle DFE = 45^\circ$ ， $\angle E = \angle B = 90^\circ$ ，结合 $\angle 1 = \angle 2$ 得到 $\angle EAB = \angle BFE = 35^\circ$ ，利用平角的定义计算即可。

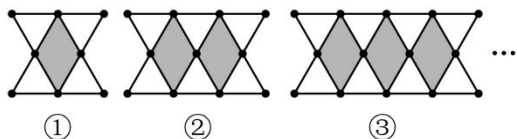
【详解】 解：如图，根据直角三角板的性质，得到 $\angle DFE = 45^\circ$ ， $\angle E = \angle B = 90^\circ$ ，
 $\because \angle 1 = \angle 2$ ，
 $\therefore \angle EAB = \angle BFE = 35^\circ$ ，
 $\angle DFC = 180^\circ - 35^\circ - 45^\circ = 100^\circ$ 。



故答案为： 100° 。

【点睛】 本题考查了三角板的性质，直角三角形的性质，平角的定义，熟练掌握三角板的性质，直角三角形的性质是解题的关键。

14. 用火柴棍拼成如下图案，其中第①个图案由 4 个小等边三角形围成 1 个小菱形，第②个图案由 6 个小等边三角形围成 2 个小菱形，……，若按此规律拼下去，则第 n 个图案需要火柴棍的根数为_____（用含 n 的式子表示）。



【答案】 $6n + 6$ ## $6 + 6n$

【解析】

【分析】 当 $n = 1$ 时，有 $2(1+1) = 4$ 个三角形；当 $n = 2$ 时，有 $2(2+1) = 6$ 个三角形；当 $n = 3$ 时，有

$2(3+1)=8$ 个三角形；第 n 个图案有 $2(n+1)=2n+2$ 个三角形，每个三角形用三根计算即可.

【详解】解：当 $n=1$ 时，有 $2(1+1)=4$ 个三角形；

当 $n=2$ 时，有 $2(2+1)=6$ 个三角形；

当 $n=3$ 时，有 $2(3+1)=8$ 个三角形；

第 n 个图案有 $2(n+1)=2n+2$ 个三角形，

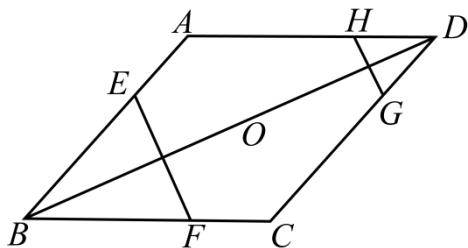
每个三角形用三根，

故第 n 个图案需要火柴棍的根数为 $6n+6$.

故答案为： $6n+6$.

【点睛】 本题考查了整式的加减的数字规律问题，熟练掌握规律的探索方法是解题的关键.

15. 如图，在菱形 $ABCD$ 中，点 E, F, G, H 分别是 AB, BC, CD, AD 上的点，且 $BE = BF = CG = AH$ ，若菱形的面积等于 24， $BD = 8$ ，则 $EF + GH =$ _____.

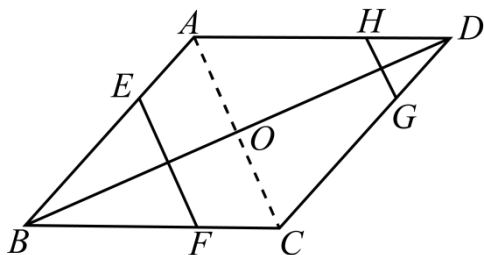


【答案】 6

【解析】

【分析】连接 AC ，交 BD 于点 O ，由题意易得 $AC = 6$ ， $AC \perp BD$ ， $AO = 3$ ， $BO = 4$ ，则有 $AB = AD = 5$ ，然后可得 $EF \parallel AC \parallel GH$ ，设 $BE = BF = CG = AH = a$ ，则有 $DH = 5 - a$ ，进而根据相似三角形的性质可进行求解.

【详解】解：连接 AC ，交 BD 于点 O ，如图所示：



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $BD = 8$ ，

$\therefore AB = BC = AD = CD$ ， $AC \perp BD$ ， $AO = OC = \frac{1}{2}AC$ ， $BO = OD = \frac{1}{2}BD = 4$ ，

$$\therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 24,$$

$$\therefore AC = 6,$$

$$\therefore AO = 3,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 5 = AD,$$

$$\therefore BE = BF = CG = AH,$$

$$\therefore AE = CF = DH = DG,$$

$$\therefore \frac{BE}{AE} = \frac{BF}{CF},$$

$$\therefore EF \parallel AC,$$

同理可得 $GH \parallel AC$,

设 $BE = BF = CG = AH = a$, 则有 $DH = 5 - a$,

$$\therefore EF \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AC}, \text{ 即 } \frac{a}{5} = \frac{EF}{6},$$

$$\therefore EF = \frac{6}{5}a,$$

$$\text{同理可得 } \frac{DH}{DA} = \frac{GH}{CA}, \text{ 即 } \frac{5-a}{5} = \frac{GH}{6},$$

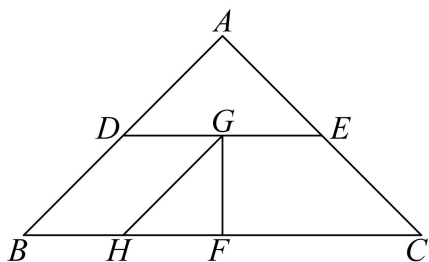
$$\therefore GH = 6 - \frac{6}{5}a,$$

$$\therefore EF + GH = 6;$$

故答案为 6.

【点睛】 本题主要考查相似三角形的性质与判定及菱形的性质，熟练掌握菱形的性质及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

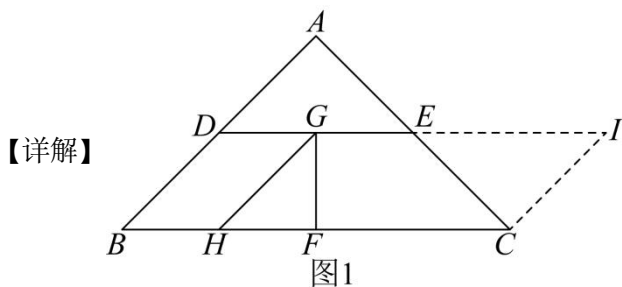
16. 在某次数学探究活动中，小明将一张斜边为 4 的等腰直角三角形 ABC ($\angle A = 90^\circ$) 硬纸片剪切成如图所示的四块 (其中 D, E, F 分别为 AB, AC, BC 的中点， G, H 分别为 DE, BF 的中点)，小明将这四块纸片重新组合拼成四边形 (相互不重叠，不留空隙)，则所能拼成的四边形中周长的最小值为_____，最大值为_____.



【答案】 ①. 8 ②. $8+2\sqrt{2}$

【解析】

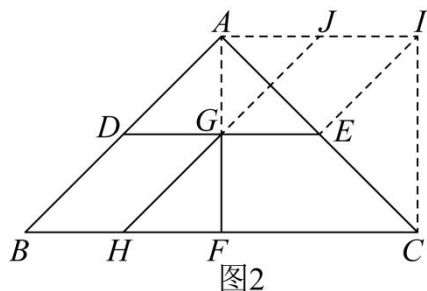
【分析】根据题意，可固定四边形 $GFCE$ ，平移或旋转其它图形，组合成四边形，求出周长，判断最小值，最大值.



如图 1, $BC = 4$, $AC = 4$, $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$, $CI = BD = CE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$

$$DI = BC = 4$$

$\therefore$ 四边形 $BCID$ 周长 $= 4 + 4 + 2\sqrt{2} = 8 + 2\sqrt{2}$;



如图 2, $AF = AI = IC = FC = 2$

$\therefore$ 四边形 $AFCI$ 周长为 $2 \times 4 = 8$;

故答案为：最小值为 8，最大值 $8+2\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查图形变换及勾股定理，通过平移、旋转组成满足要求的四边形是解题的关键.

三、解答题 (本题有 9 个小题, 共 72 分)

17. 计算: $|1-\sqrt{2}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - (\pi-2023)^0$.

【答案】 $\sqrt{2} + 2$

【解析】

【分析】 先化简绝对值、计算负整数指数幂、零指数幂，再进行实数混合运算即可.

【详解】 解： $|1 - \sqrt{2}| + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - (\pi - 2023)^0$

$$= \sqrt{2} - 1 + 4 - 1$$

$$= \sqrt{2} + 2$$

【点睛】 此题考查了实数的混合运算，涉及负整数指数幂、零指数幂及绝对值的计算，熟练掌握相关运算法则是解题的关键.

18. 化简： $\left(1 - \frac{4}{a+3}\right) \div \frac{a^2 - 2a + 1}{2a + 6}$.

【答案】 $\frac{2}{a-1}$

【解析】

【分析】 先计算括号内的减法，再计算除法即可.

【详解】 解： $\left(1 - \frac{4}{a+3}\right) \div \frac{a^2 - 2a + 1}{2a + 6}$

$$= \left(\frac{a+3}{a+3} - \frac{4}{a+3}\right) \div \frac{(a-1)^2}{2(a+3)}$$

$$= \frac{a-1}{a+3} \cdot \frac{2(a+3)}{(a-1)^2}$$

$$= \frac{2}{a-1}$$

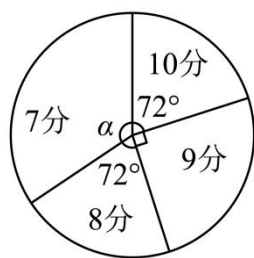
【点睛】 此题考查了分式的混合运算，熟练掌握运算法则和顺序是解题的关键.

19. 市体育局对甲、乙两运动队的某体育项目进行测试，两队人数相等，测试后统计队员的成绩分别为：7分、8分、9分、10分（满分为10分）. 依据测试成绩绘制了如图所示尚不完整的统计图表：

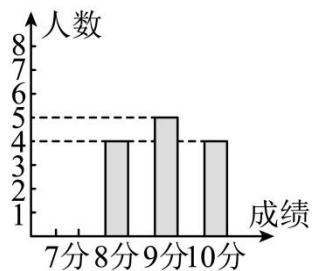
甲队成绩统计表

成绩	7分	8分	9分	10分
人数	0	1	m	7

乙队成绩扇形统计图



乙队成绩条形统计图



请根据图表信息解答下列问题：

- (1) 填空： $\alpha =$ _____ $^{\circ}$ ， $m =$ _____；
- (2) 补齐乙队成绩条形统计图；
- (3) ①甲队成绩的中位数为_____，乙队成绩的中位数为_____；
- ②分别计算甲、乙两队成绩的平均数，并从中位数和平均数的角度分析哪个运动队的成绩较好。

【答案】 (1) $\alpha = 126^{\circ}$, $m = 12$

- (2) 见解析 (3) ①9分，8分 ② $\bar{x}_{\text{甲}} = 9.3$ ， $\bar{x}_{\text{乙}} = 8.3$ ，中位数角度看甲队成绩较好，从平均数角度看甲队成绩较好

【解析】

【分析】 (1) 根据样本容量=频数÷所占百分比，结合圆心角的计算解答即可。

(2) 根据样本容量，求得7分的人数补图即可。

(3) ①根据有序数据的中间数据或中间两个数据的平均数为中位数计算即可。

②根据加权平均数公式计算即可。

【小问1详解】

解：本次抽样调查的样本容量是 $4 \div \frac{72^{\circ}}{360^{\circ}} = 20$ (人)，

$\therefore m = 20 - 1 - 7 = 12$ (人)， $\alpha = \frac{7}{20} \times 360^{\circ} = 126^{\circ}$ ，

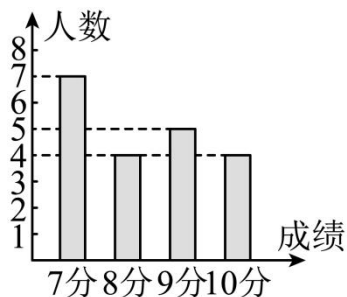
故答案为：126；12。

【小问2详解】

$\therefore 20 - 4 - 5 - 4 = 7$ (人)，

$\therefore$ 补图如下：

乙队成绩条形统计图



【小问3详解】

① $\because$ 甲队的第10个, 11个数据都是9分,

$$\therefore \text{中位数是 } \frac{9+9}{2} = 9 \text{ (分)};$$

$\because$ 乙队的第10个, 11个数据都是8分,

$$\therefore \text{中位数是 } \frac{8+8}{2} = 8 \text{ (分)};$$

故答案为: 9分, 8分.

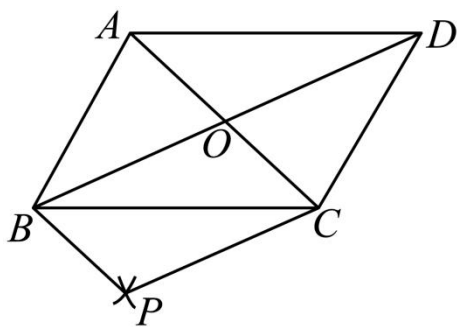
$$\textcircled{2}\textcircled{2} \bar{x}_{\text{甲}} = \frac{7 \times 0 + 8 \times 1 + 9 \times 12 + 10 \times 7}{20} = 9.3 \text{ (分)},$$

$$\bar{x}_{\text{乙}} = \frac{7 \times 7 + 8 \times 4 + 9 \times 5 + 10 \times 4}{20} = 8.3 \text{ (分)},$$

故从中位数角度看甲队成绩较好, 从平均数角度看甲队成绩较好.

【点睛】本题考查了中位数, 条形统计图, 扇形统计图, 熟练掌握中位数, 平均数, 扇形统计图, 条形统计图的基本计算是解题的关键.

20. 如图, $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O , 分别以点 B, C 为圆心, $\frac{1}{2}AC, \frac{1}{2}BD$ 长为半径画弧, 两弧交于点 P , 连接 BP, CP .



(1) 试判断四边形 $BPCO$ 的形状, 并说明理由;

(2) 请说明当 $ABCD$ 的对角线满足什么条件时, 四边形 $BPCO$ 是正方形?

【答案】(1) 平行四边形, 见解析

(2) $AC = BD$ 且 $AC \perp BD$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质，得到 $BP = \frac{1}{2}AC = OC, CP = \frac{1}{2}BD = OB$ ，根据两组对边分别相等的四边形是平行四边形判定即可。

(2) 根据对角线相等、平分且垂直的四边形是正方形判定即可。

【小问 1 详解】

四边形 $BPCO$ 是平行四边形。理由如下：

$\because$ $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O ,

$\therefore AO = OC, BO = OD$,

$\therefore$ 以点 B, C 为圆心， $\frac{1}{2}AC, \frac{1}{2}BD$ 长为半径画弧，两弧交于点 P ,

$\therefore BP = \frac{1}{2}AC = OC, CP = \frac{1}{2}BD = OB$

$\therefore$ 四边形 $BPCO$ 是平行四边形。

【小问 2 详解】

$\therefore$ 对角线相等、平分且垂直的四边形是正方形，

$\therefore AC = BD$ 且 $AC \perp BD$ 时，四边形 $BPCO$ 是正方形。

【点睛】本题考查了平行四边形的判定和性质，正方形的判定和性质，熟练掌握判定和性质是解题的关键。

21. 函数 $y = \frac{k}{x+a}$ 的图象可以由函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象左右平移得到。

(1) 将函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 4 个单位得到函数 $y = \frac{1}{x+a}$ 的图象，则 $a =$ _____；

(2) 下列关于函数 $y = \frac{1}{x+a}$ 的性质：①图象关于点 $(-a, 0)$ 对称；② y 随 x 的增大而减小；③图象关于直线 $y = -x + a$ 对称；④ y 的取值范围为 $y \neq 0$ 。其中说法正确的是 _____ (填写序号)；

(3) 根据 (1) 中 a 的值，写出不等式 $\frac{1}{x+a} > \frac{1}{x}$ 的解集： _____。

【答案】(1) -4

(2) ①④ (3) $x < 0$ 或 $x > 4$

【解析】

【分析】(1) 根据“左加右减”的规律即可求解；

(2) 根据平移的性质得出①正确；类比反比例函数图象的性质即可判断②④，根据平移的性质将 $y = -x$ 向左平移 a 个单位，得出 $y = -x - a$ ，即可判断③；

(3) 根据题意，画出两个函数图象，结合图象即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象向右平移 4 个单位得到函数 $y = \frac{1}{x-4}$ 的图象，

$$\therefore a = -4;$$

故答案为：-4.

【小问 2 详解】

解：∵ $y = \frac{1}{x+a}$ 可以看作是由 $y = \frac{1}{x}$ 向左平移 a ($a > 0$) 个单位得到的，

∵函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象的对称中心为 $(0,0)$ ，将其对称中心向左平移 a 个单位，

则对称中心为 $(-a,0)$ ，故①正确，

②类比反比例函数图象，可得 $x^1 - a$ ，故函数图象不是连续的，

在直线 $x = -a$ 两侧， y 随 x 的增大而减小；故②错误；

③∵ $y = \frac{1}{x}$ 关于 $y = -x$ 对称，

同①可得， $y = -x$ 向左平移 a 个单位得到： $y = -(x+a) = -x-a$

∴图象关于直线 $y = -x-a$ 对称；故③不正确；

④∵平移后的对称中心为 $(-a,0)$ ，左右平移图象后， $y = \frac{1}{x+a}$ 与 y 轴没有交点，

∴ y 的取值范围为 $y \neq 0$ 。故④正确，

故答案为：①④.

【小问 3 详解】

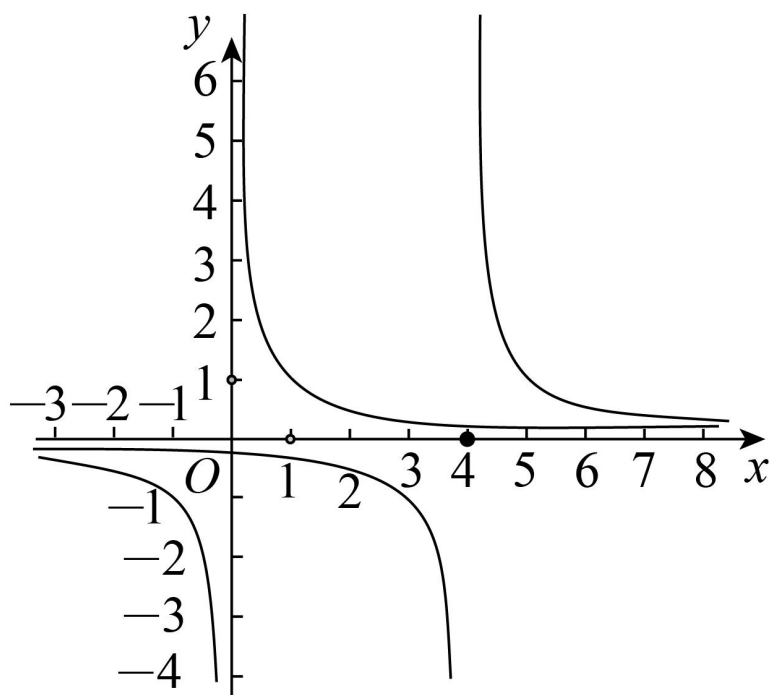
$$\therefore a = -4,$$

$$\therefore \text{不等式 } \frac{1}{x-4} > \frac{1}{x}$$

如图所示，在第三象限内和第一象限内， $\frac{1}{x-4} > \frac{1}{x}$ ，

$$\therefore x < 0 \text{ 或 } x > 4,$$

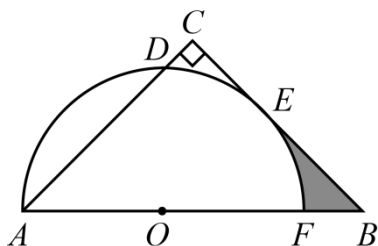
故答案为： $x < 0$ 或 $x > 4$.



【点睛】本题考查了反比例函数的性质，

一次函数的平移，平移的性质，熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

22. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC$ ，点 O 在 AB 上，以 O 为圆心， OA 为半径的半圆分别交 AC, BC, AB 于点 D, E, F ，且点 E 是弧 DF 的中点.



- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 $CE = \sqrt{2}$ ，求图中阴影部分的面积（结果保留 π ）.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $2 - \frac{\pi}{2}$

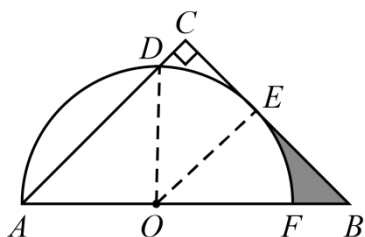
【解析】

【分析】(1) 连接 OE 、 OD ，证出 $OE \perp BC$ ，即可得出结论；

(2) 根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OEB} - S_{\text{扇} OEF}$ ，分别求出 $S_{\triangle OEB}$ 和 $S_{\text{扇} OEF}$ 即可得出答案.

【小问 1 详解】

连接 OE 、 OD ，



$$\because \angle C = 90^\circ, AC = BC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle B = 45^\circ,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ADO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$\because$ 点 E 是弧 DF 的中点,

$$\therefore \angle DOE = \angle EOF = \frac{1}{2} \angle DOF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OEB = 180^\circ - \angle EOF - \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore OE \perp BC,$$

$\because OE$ 为半径,

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

$$\because OE \perp BC, \angle B = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OEB$ 为等腰直角三角形,

$$\text{设 } BE = OE = x, \text{ 则 } OB = \sqrt{2}x,$$

$$\therefore AB = x + \sqrt{2}x,$$

$$\because AB = \sqrt{2}BC,$$

$$\therefore x + \sqrt{2}x = \sqrt{2}(\sqrt{2} + x),$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle OEB} - S_{\text{扇} OEF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{45^\circ \pi \times 2^2}{360^\circ} = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

【点睛】本题是圆的综合题，考查了切线的判定定理、扇形的面积、等腰直角三角形的性质，解题的关键是熟练掌握切线的判定定理.

23. “端午节”吃粽子是中国传统习俗，在“端午节”来临前，某超市购进一种品牌粽子，每盒进价是 40 元，并规定每盒售价不得少于 50 元，日销售量不低于 350 盒，根据以往销售经验发现，当每盒售价定为 50

元时，日销售量为 500 盒，每盒售价每提高 1 元，日销售量减少 10 盒，设每盒售价为 x 元，日销售量为 p 盒.

- (1) 当 $x = 60$ 时， $p =$ _____；
- (2) 当每盒售价定为多少元时，日销售利润 W (元) 最大？最大利润是多少？
- (3) 小强说：“当日销售利润最大时，日销售额不是最大，” 小红说：“当日销售利润不低于 8000 元时，每盒售价 x 的范围为 $60 \leq x \leq 80$.” 你认为他们的说法正确吗？若正确，请说明理由；若不正确，请直接写出正确的结论.

【答案】 (1) 400

(2) 当每盒售价定为 65 元时，日销售利润 W (元) 最大，最大利润是 8750 元.

(3) 他们的说法正确，理由见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据每盒售价定为 50 元时，日销售量为 500 盒，每盒售价每提高 1 元，日销售量减少 10 盒，列式计算即可；

(2) 根据销售量乘以每盒的利润得到 $W = -10(x - 70)^2 + 9000$ ，根据二次函数的性质即可得到答案；

(3) 设日销售额为 y 元，则 $y = -10(x - 50)^2 + 25000$ ，根据二次函数的性质即可判断当日销售利润最大时，日销售额不是最大，即可判断小强的说法；当 $W = 8000$ 时，由 $8000 = -10(x - 70)^2 + 9000$ ，解得 $x_1 = 60, x_2 = 80$ ，由抛物线开口向下，得到当 $60 \leq x \leq 80$ 时， $8000 \leq W \leq 9000$ ，即可判断小红的说法.

【小问 1 详解】

解：当 $x = 60$ 时， $p = 500 - 10(60 - 50) = 400$ (盒)，

故答案为：400

【小问 2 详解】

由题意得， $W = p(x - 40) = [500 - 10(x - 50)](x - 40)$

$$= -10x^2 + 1400x - 40000 = -10(x - 70)^2 + 9000,$$

又 $\because p \geq 350$ ，即 $500 - 10(x - 50) \geq 350$ ，

解得 $x \leq 65$ ，

$\because -10 < 0$ ，

$\therefore$ 当 $x = 65$ 时， W 最大，最大值为 8750，

$\therefore$ 当每盒售价定为 65 元时，日销售利润 W (元) 最大，最大利润是 8750 元.

【小问3详解】

他们的说法正确，理由如下：

设日销售额为 y 元，则

$$y = [500 - 10(x - 50)]x = -10x^2 + 1000x = -10(x - 50)^2 + 25000,$$

$$\because -10 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 50$ 时， y 最大，最大值为 25000，

$\therefore$ 当日销售利润最大时，日销售额不是最大，

即小强的说法正确；

$$\text{当 } W = 8000 \text{ 时， } 8000 = -10(x - 70)^2 + 9000, \text{ 解得 } x_1 = 60, x_2 = 80,$$

$\therefore$ 抛物线开口向下，

$\therefore$ 当 $60 \leq x \leq 80$ 时， $8000 \leq W \leq 9000$ ，

$\therefore$ 当日销售利润不低于 8000 元时，每盒售价 x 的范围为 $60 \leq x \leq 80$ 。

故小红的说法正确。

【点睛】此题考查了二次函数的应用，根据题意正确列出函数解析式是基础，熟练掌握二次函数的性质和正确计算是解题的关键。

24. 过正方形 $ABCD$ 的顶点 D 作直线 DP ，点 C 关于直线 DP 的对称点为点 E ，连接 AE ，直线 AE 交直线 DP 于点 F 。

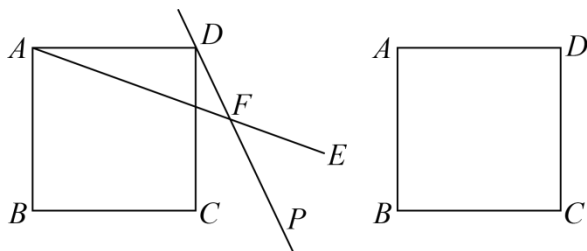


图1

(备用图)

- (1) 如图 1，若 $\angle CDP = 25^\circ$ ，则 $\angle DAF =$ _____ $^\circ$ ；
- (2) 如图 1，请探究线段 CD ， EF ， AF 之间的数量关系，并证明你的结论；
- (3) 在 DP 绕点 D 转动的过程中，设 $AF = a$ ， $EF = b$ 请直接含 a, b 的式子表示 DF 的长。

【答案】(1) 20°

$$(2) \quad CD^2 = \frac{1}{2}(AF^2 + EF^2)$$

$$(3) \quad DF = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b), \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a), \text{ 或 } \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$$

【解析】

【分析】(1) 如图，连接 CE ， DE ，由对称知 $\angle CDP = \angle EDP = 25^\circ$ ， $CD = ED$

由四边形 $ABCD$ 是正方形得 $AD = CD$ ，所以 $AD = ED$ ，从而

$$\angle DAE = \angle DEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADE) = 20^\circ;$$

(2) 如图，连接 CF ， DE ， AC ， CE ，交 DP 于点 H ，由轴对称知， $CF = EF$ ， $CD = DE = AD$ ，

$\angle DEF = \angle DCF$ ，可证得 $\angle AFC = 90^\circ$ ，由勾股定理得， $\text{Rt}\triangle ACF$ 中， $AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + EF^2$ ，

$\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AD^2 + CD^2 = AC^2$ ，从而 $CD^2 = \frac{1}{2}(AF^2 + EF^2)$ ；

(3) 由勾股定理 $CH = HE = FH = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ ， $DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ ，分情况讨论：当点 F 在 D, H

之间时， $DF = DH - FH = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b)$ ；当点 D 在 F, H 之间时， $DF = FH - DH = \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a)$ ；当点

H 在 F, D 之间时， $DF = DH + FH = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$ 。

【小问 1 详解】

解：如图，连接 CE ， DE ，

$\because$ 点 C 关于直线 DP 的对称点为点 E ，

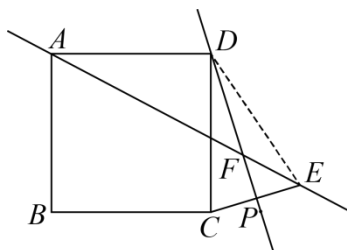
$\therefore CD$ ， ED 关于 DP 对称，

$\therefore \angle CDP = \angle EDP = 25^\circ$ ， $CD = ED$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = CD$ ，

$\therefore AD = ED$ ，



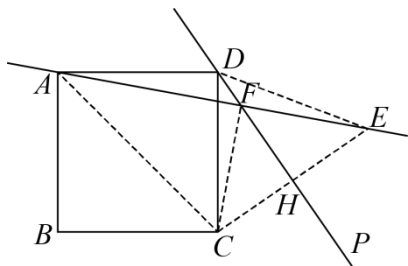
$$\therefore \angle DAE = \angle DEA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADE) = \frac{1}{2}(180^\circ - 90^\circ - 50^\circ) = 20^\circ.$$

故答案为：20.

【小问 2 详解】

解： $CD^2 = \frac{1}{2}(AF^2 + EF^2)$ ；理由如下：

如图，由轴对称知， $CF = EF$ ， $CD = DE = AD$ ， $\angle DEF = \angle DCF$



而 $\angle DEF = \angle DAF$

$$\therefore \angle DAF = \angle DCF$$

$$\therefore \angle FAC + \angle FCA = \angle FAC + \angle DAF + \angle DCA = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AFC = 180^\circ - (\angle FAC + \angle FCA) = 90^\circ$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ACF \text{ 中, } AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + EF^2$$

$$\text{Rt}\triangle ACD \text{ 中, } AD^2 + CD^2 = AC^2$$

$$\therefore 2CD^2 = AF^2 + EF^2 \text{ 即 } CD^2 = \frac{1}{2}(AF^2 + EF^2);$$

【小问3 详解】

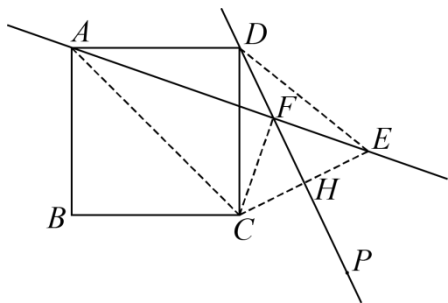
$$\because \angle AFC = 90^\circ, CF = EF = b,$$

$$\therefore CH = HE = FH = \frac{\sqrt{2}}{2}b,$$

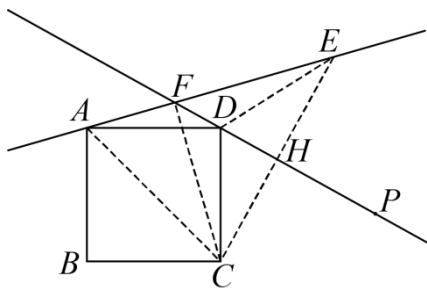
$$\therefore CD^2 = \frac{1}{2}(AF^2 + EF^2) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

$$\therefore DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

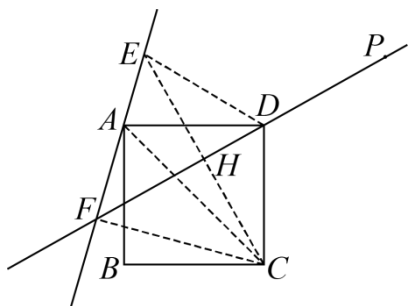
$$\text{如图, 当点 } F \text{ 在 } D, H \text{ 之间时, } DF = DH - FH = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - b),$$



$$\text{如图, 当点 } D \text{ 在 } F, H \text{ 之间时, } DF = FH - DH = \frac{\sqrt{2}}{2}(b - a)$$



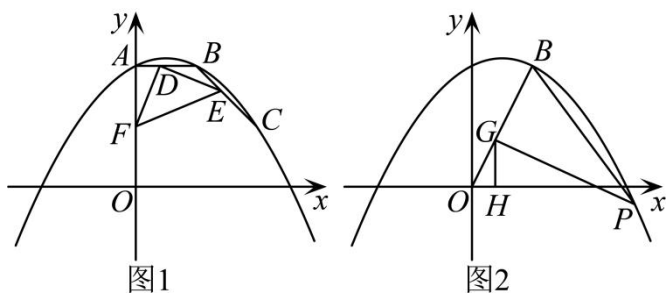
如图，当点 H 在 F, D 之间时， $DF = DH + FH = \frac{\sqrt{2}}{2}(a + b)$



【点睛】 本题考查轴对称的性质，正方形的性质，等腰三角形知识，勾

股定理等，将运动状态的所有可能考虑完备，分类讨论是解题的关键.

25. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 8$ 过点 $B(4, 8)$ 和点 $C(8, 4)$ ，与 y 轴交于点 A .



(1) 求抛物线的解析式；

(2) 如图 1，连接 AB, BC ，点 D 在线段 AB 上（与点 A, B 不重合），点 F 是 OA 的中点，连接 FD ，过点 D 作 $DE \perp FD$ 交 BC 于点 E ，连接 EF ，当 $\triangle DEF$ 面积是 $\triangle ADF$ 面积的 3 倍时，求点 D 的坐标；

(3) 如图 2，点 P 是抛物线上对称轴右侧的点， $H(m, 0)$ 是 x 轴正半轴上的动点，若线段 OB 上存在点 G （与点 O, B 不重合），使得 $\angle GBP = \angle HGP = \angle BOH$ ，求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 8$

(2) $D(6 - 2\sqrt{5}, 0)$

(3) $0 < m < \frac{9}{5}$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) 待定系数法求得直线 BC 的解析式为 $y = -x + 12$ ，设 $E(m, -m + 12)$ ($4 < m < 8$)，过点 E 作 $EG \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 G ，则 $\angle G = 90^\circ$ ，则 G 的坐标为 $(m, 8)$ ，得出 $\triangle BGE$ 是等腰直角三角形，设 $D(t, 8)$ ，则 $AD = t, DG = m - t$ ，证明 $\triangle AFD \sim \triangle GDE$ ，相似三角形的性质得出 $m - t = 4$ ，则 $DG = AF$ ，可得 $\triangle AFD \cong \triangle GDE$ ，当 $\triangle DEF$ 面积是 $\triangle ADF$ 面积的 3 倍时，即 $\frac{1}{2}DF^2 = \frac{1}{2}AD \times AF \times 3$ ，即 $DF^2 = 12AD$ ，在 $Rt\triangle ADF$ 中， $DF^2 = AD^2 + AF^2 = t^2 + 4^2$ ，解方程即可求解；

(3) 根据三角形外角的性质，结合已知条件得出 $\angle OGH = \angle BPG$ ，证明 $\triangle OGH \sim \triangle BPG$ ，则 $\frac{OH}{BG} = \frac{OG}{BP}$ ，设 BP 交 x 轴于点 S ，过点 B 作 $BT \perp x$ 轴于点 T ，求得直线 BS 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3}$ ，联立

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 8 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3} \end{cases}, \text{ 得出 } P\left(\frac{32}{3}, -\frac{8}{9}\right), \text{ 勾股定理求得 } PB \text{ 的长, 根据相似三角形的性质得出 } m \text{ 关于 } n \text{ 的}$$

二次函数关系式，进而根据二次函数的性质求得最值，即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 8$ 过点 $B(4, 8)$ 和点 $C(8, 4)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 16a + 4b + 8 = 8 \\ 64a + 8b + 8 = 4 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

∴ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 8$ ；

【小问 2 详解】

∵ 抛物线 $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 8$ 与 y 轴交于点 A ，

当 $x = 0$ 时， $y = 8$ ，

∴ $A(0, 8)$ ，则 $OA = 8$ ，

∵ $B(4, 8)$ ，

∴ $AB \parallel x$ ， $AB = 4$ ，

$\therefore$ 点 F 是 OA 的中点，则 $F(0,4)$,

$\therefore AB = AF = 4$,

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 点 $B(4,8)$ 和点 $C(8,4)$,

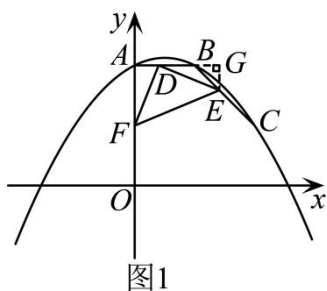
$$\therefore \begin{cases} 8 = 4k + b \\ 4 = 8k + b \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 12 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 12$,

设 $E(m, -m + 12)$ ($4 < m < 8$),

如图所示，过点 E 作 $EG \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 G ，则 $\angle G = 90^\circ$ ，则 G 的坐标为 $(m, 8)$,



$$\therefore GE = 8 - (-m + 12) = m - 4, \quad BG = m - 4$$

$$\therefore BG = GE,$$

$\therefore \triangle BGE$ 是等腰直角三角形,

设 $D(t, 8)$ ，则 $AD = t, DG = m - t$,

$$\therefore DE \perp FD,$$

$$\therefore \angle FDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAD = \angle G = \angle FDE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFD = 90^\circ - \angle ADF = \angle GDE,$$

$$\therefore \triangle AFD \sim \triangle GDE$$

$$\therefore \frac{AD}{GE} = \frac{AF}{DG}$$

$$\therefore \frac{t}{m-4} = \frac{4}{m-t}$$

$$\text{即 } (t-4)m = (t-4)(t+4)$$

$$\therefore m > 4$$

$$\therefore m = t + 4$$

$$\text{即 } m - t = 4,$$

$$\therefore DG = AF,$$

$$\therefore \triangle AFD \cong \triangle GDE$$

$$\therefore DF = DE,$$

$$\text{又 } DE \perp DF,$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 是等腰直角三角形,}$$

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}DF^2,$$

$$\therefore \triangle ADF \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}AD \times AF$$

当 $\triangle DEF$ 面积是 $\triangle ADF$ 面积的3 倍时

$$\text{即 } \frac{1}{2}DF^2 = \frac{1}{2}AD \times AF \times 3$$

$$\text{即 } DF^2 = 12AD$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADF \text{ 中, } DF^2 = AD^2 + AF^2 = t^2 + 4^2$$

$$\therefore AD^2 + AF^2 = 12AD$$

$$\therefore t^2 + 4^2 = 12t$$

$$\text{解得: } t = 6 - 2\sqrt{5} \text{ 或 } t = 2\sqrt{5} + 6 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore D(6 - 2\sqrt{5}, 0);$$

【小问 3 详解】

$$\therefore \angle GBP = \angle HGP = \angle BOH,$$

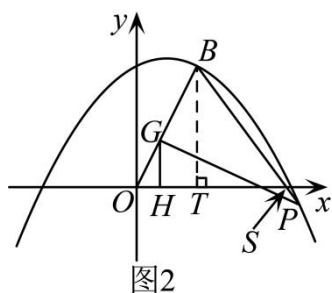
$$\text{又 } \angle OGH + \angle HGP = \angle GBP + \angle BPG,$$

$$\therefore \angle OGH = \angle BPG,$$

$$\therefore \triangle OGH \sim \triangle BPG,$$

$$\therefore \frac{OH}{BG} = \frac{OG}{BP},$$

设 BP 交 x 轴于点 S , 过点 B 作 $BT \perp x$ 轴于点 T ,



$$\therefore \angle GBP = \angle BOH,$$

$$\therefore SB = SO,$$

$$\therefore OT = 4, BT = 8,$$

$$\therefore OB = \sqrt{OT^2 + BT^2} = 4\sqrt{5},$$

设 $BS = k$, 则 $TS = k - 4$,

在 $\text{Rt}\triangle TBS$ 中, $SB^2 = ST^2 + BT^2$,

$$\therefore k^2 = (k-4)^2 + 8^2,$$

解得: $k=10$,

$$\therefore S(10,0),$$

设直线 BS 的解析式为 $y = ex + f$,

$$\therefore \begin{cases} 10e + f = 0 \\ 4e + f = 8 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} e = -\frac{4}{3} \\ f = \frac{40}{3} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } BS \text{ 的解析式为 } y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + 8 \\ y = -\frac{4}{3}x + \frac{40}{3} \end{cases},$$

解得: $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{32}{3} \\ y=-\frac{8}{9} \end{cases}$,

$$\therefore P\left(\frac{32}{3}, -\frac{8}{9}\right),$$

$$\therefore PB = \sqrt{\left(\frac{32}{3} - 4\right)^2 + \left(8 + \frac{8}{9}\right)^2} = \frac{100}{9},$$

$$\therefore \frac{OH}{BG} = \frac{OG}{BP},$$

设 $OG = n$ ，则 $BG = OB - OG = 4\sqrt{5} - n$ ，

$$\therefore \frac{m}{4\sqrt{5} - n} = \frac{n}{\frac{100}{9}},$$

$$\text{整理得: } m = -\frac{9n^2 - 36\sqrt{5}n}{100} = -\frac{9}{100}n^2 + \frac{9\sqrt{5}}{25}n = -\frac{9}{100}(n - 2\sqrt{5})^2 + \frac{9}{5},$$

$\therefore G$ 在线段 OB 上 (与点 O, B 不重合),

$$\therefore 0 < OG < 2\sqrt{5},$$

$$\therefore 0 < n < 2\sqrt{5},$$

$\therefore$ 当 $n = 2\sqrt{5}$ 时, m 取得的最大值为 $\frac{9}{5}$,

$$\therefore 0 < m < \frac{9}{5}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数的综合运用，面积问题，相似三角形的性质与判定，二次函数的性质，掌握二次函数的性质是解题的关键.

