

浙江省 2023 年初中学业水平考试（金华卷）

数学试题卷

考生须知：

1. 全卷共三大题，24 小题，满分为 120 分。考试时间为 120 分钟，本次考试采用开卷形式。
2. 全卷分为卷 I（选择题）和卷 II（非选择题）两部分，全部在答题纸上作答。卷 I 的答案必须用 2B 铅笔填涂；卷 II 的答案必须用黑色字迹钢笔或签字笔写在答题纸相应位置上。
3. 请用黑色字迹钢笔或签字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
4. 作图时，请使用 2B 铅笔，确定后必须使用黑色字迹的钢笔或签字笔描黑。
5. 本次考试不得使用计算器。

卷 I

说明：本卷共有 1 大题，10 小题，共 30 分。请用 2B 铅笔在“答题纸”上将你认为正确的选项对应的小方框涂黑、涂满。

一、选择题（本题有 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 某一天，哈尔滨、北京、杭州、金华四个城市的最低气温分别是 -20°C ， -10°C ， 0°C ， 2°C ，其中最低气温是（ ）
- A. -20°C B. -10°C C. 0°C D. 2°C

【答案】A

【解析】

【分析】根据有理数的大小比较，即可作出判断。

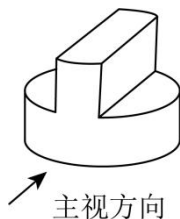
【详解】解： $-20 < -10 < 0 < 2$ ，

故温度最低的城市是哈尔滨，

故选：A。

【点睛】本题考查了有理数的大小比较的知识，解答本题的关键是掌握有理数的大小比较法则。

2. 某物体如图所示，其俯视图是（ ）

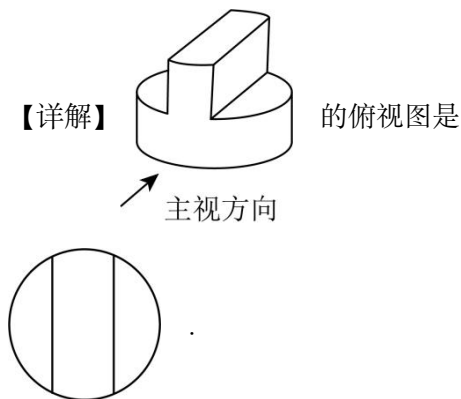




【答案】B

【解析】

【分析】根据俯视图的意义判断即可.



故选 B.

【点睛】本题考查了几何体的三视图，正确理解俯视图是解题的关键.

3. 在 2023 年金华市政府工作报告中提到，2022 年全市共引进大学生约 123000 人，其中数 123000 用科学记数法表示为 ()

- A. 1.23×10^3 B. 123×10^3 C. 12.3×10^4 D. 1.23×10^5

【答案】D

【解析】

【分析】科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于 10 时， n 是正整数，当原数绝对值小于 1 时， n 是负整数.

【详解】解： $123000 = 1.23 \times 10^5$ ，

故选 D

【点睛】本题考查了科学记数法的表示方法，科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数，表示时关键是要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 在下列长度的四条线段中，能与长 6cm, 8cm 的两条线段围成一个三角形的是 ()

- A. 1cm B. 2cm C. 13cm D. 14cm

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形三边的关系求出第三边的取值范围，再判断即可．

【详解】解：设第三边长度为 $x\text{cm}$ ，

则第三边的取值范围是 $2 < x < 14$ ，

只有选项 C 符合，

故选：C．

【点睛】本题考查了三角形三边的关系，能熟练求出第三边的取值范围是本题的关键．

5. 要使 $\sqrt{x-2}$ 有意义，则 x 的值可以是（ ）

A. 0

B. -1

C. -2

D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件求出 x 的取值范围即可得到答案．

【详解】解：∵二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义，

∴ $x-2 \geq 0$ ，

∴ $x \geq 2$ ，

∴四个选项中，只要 D 选项中的 2 符合题意，

故选 D．

【点睛】本题主要考查了二次根式有意义的条件，熟知二次根式有意义的条件是被开方数大于等于 0 是解题的关键．

6. 上周双休日，某班 8 名同学课外阅读的时间如下（单位：时）：1，4，2，4，3，3，4，5．这组数据的众数是（ ）

A. 1 时

B. 2 时

C. 3 时

D. 4 时

【答案】D

【解析】

【分析】根据众数的含义可得答案．

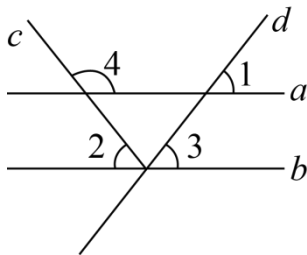
【详解】解：这组数据中出现次数最多的是：4 时，

所以众数是 4 时；

故选 D

【点睛】本题考查的是众数的含义，熟记一组数据中出现次数最多的数据就是这组数据的众数是解本题的关键．

7. 如图，已知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 50^\circ$ ，则 $\angle 4$ 的度数是（ ）



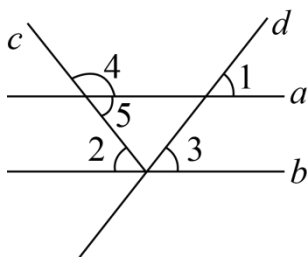
- A. 120° B. 125° C. 130° D. 135°

【答案】C

【解析】

【分析】由 $\angle 1 = \angle 3 = 50^\circ$ 可得 $a \parallel b$ ，可得 $\angle 2 = \angle 5 = 50^\circ$ ，再利用邻补角的含义可得答案.

【详解】解：如图，标记角，



$$\therefore \angle 1 = \angle 3 = 50^\circ,$$

$$\therefore a \parallel b, \text{ 而 } \angle 2 = 50^\circ,$$

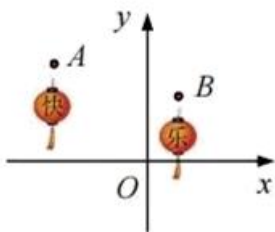
$$\therefore \angle 2 = \angle 5 = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 = 180^\circ - \angle 5 = 130^\circ;$$

故选 C

【点睛】本题考查的是平行线的判定与性质，邻补角的含义，熟记平行线的判定与性质是解本题的关键.

8. 如图，两个灯笼的位置 A, B 的坐标分别是 $(-3, 3), (1, 2)$ ，将点 B 向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位得到点 B' ，则关于点 A, B' 的位置描述正确是（ ）



- A. 关于 x 轴对称 B. 关于 y 轴对称
C. 关于原点 O 对称 D. 关于直线 $y = x$ 对称

【答案】B

【解析】

【分析】先根据平移方式求出 $B'(3,3)$ ，再根据关于 y 轴对称的点横坐标互为相反数，纵坐标相同进行求解即可.

【详解】解：∵将 $B(1,2)$ 向右平移 2 个单位，再向上平移 1 个单位得到点 B' ，

$$\therefore B'(3,3),$$

$$\therefore A(-3,3),$$

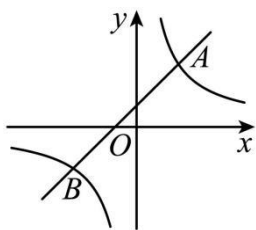
∴点 A, B' 关于 y 轴对称，

故选 B.

【点睛】本题主要考查了坐标与图形变化—平移和轴对称，正确根据平移方式求出 $B'(3,3)$ 是解题的关键.

9. 如图，一次函数 $y = ax + b$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 $A(2,3)$ ， $B(m, -2)$ ，则不等式

$$ax + b > \frac{k}{x} \text{ 的解是 ()}$$



A. $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$

B. $x < -3$ 或 $0 < x < 2$

C. $-2 < x < 0$ 或 $x > 2$

D. $-3 < x < 0$ 或 $x > 3$

【答案】A

【解析】

【分析】先求出反比例函数解析式，进而求出点 B 的坐标，然后直接利用图象法求解即可.

【详解】解：∵ $A(2,3)$ 在反比例函数图象上，

$$\therefore k = 3 \times 2 = 6,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{6}{x},$$

∵ $B(m, -2)$ 在反比例函数图象上，

$$\therefore m = \frac{6}{-2} = -3,$$

$$\therefore B(-3, -2),$$

由题意得关于 x 的不等式 $ax+b > \frac{k}{x}$ 的解集即为一次函数图象在反比例函数图象上方时自变量的取值范围，

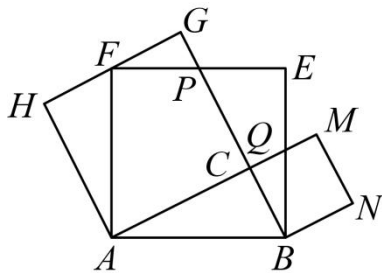
$\therefore$ 关于 x 的不等式 $ax+b > \frac{k}{x}$ 的解集为 $-3 < x < 0$ 或 $x > 2$ ，

故选：A.

【点睛】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，解题的关键是正确求出点 B 的坐标.

10. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以其三边为边在 AB 的同侧作三个正方形，点 F 在 GH 上， CG

与 EF 交于点 P ， CM 与 BE 交于点 Q 。若 $HF = FG$ ，则 $\frac{S_{\text{四边形}PCQE}}{S_{\text{正方形}ABEF}}$ 的值是 ()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{5}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{12}$

D. $\frac{6}{25}$

【答案】 B

【解析】

【分析】 设 $HF = FG = a$ ，正方形 $ACGH$ 的边长为 $2a$ ，证明 $\tan \angle HAF = \tan \angle GFP$ ，先后求得 $GP = \frac{1}{2}a$ ， $PC = \frac{3}{2}a$ ， $BC = a$ ，利用三角形面积公式求得 $S_{\triangle BCQ} = \frac{1}{4}a^2$ ，证明 $\text{Rt}\triangle BQC \sim \text{Rt}\triangle BPE$ ，求得 $S_{\triangle BEP} = \frac{5}{4}a^2$ ， $S_{\text{四边形}CQEP} = a^2$ ，据此求解即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ACGH$ 是正方形，且 $HF = FG$ ，

设 $HF = FG = a$ ，则 $AC = CG = GH = AH = 2a$ ，

$\because$ 四边形 $ABEF$ 是正方形，

$\therefore \angle AFP = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle HAF = 90^\circ - \angle HFA = \angle GFP$ ，

$\therefore \tan \angle HAF = \tan \angle GFP$ ，即 $\frac{HF}{HA} = \frac{GP}{FG} = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore GP = \frac{1}{2}a$ ，

$\therefore PC = 2a - \frac{1}{2}a = \frac{3}{2}a$ ，

同理 $\tan \angle HAF = \tan \angle CAB$ ，即 $\frac{HF}{HA} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore BC = a,$$

$$\text{同理 } CQ = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore PB = \frac{5}{2}a,$$

$$BQ^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2, \quad S_{\triangle BCQ} = \frac{1}{2} \times a \times \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle BQC \sim \text{Rt}\triangle BPE,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle BCQ}}{S_{\triangle BEP}} = \left(\frac{BQ}{BP}\right)^2 = \frac{\frac{5}{4}a^2}{\frac{25}{4}a^2} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle BEP} = 5S_{\triangle BCQ} = \frac{5}{4}a^2,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}CQEP} = S_{\triangle BEP} - S_{\triangle BCQ} = a^2,$$

$$\therefore S_{\text{正方形}ABEF} = AB^2 = AC^2 + BC^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2,$$

$$\therefore \frac{S_{\text{四边形}PCQE}}{S_{\text{正方形}ABEF}} = \frac{a^2}{5a^2} = \frac{1}{5},$$

故选：B.

【点睛】本题考查了正方形的性质，相似三角形的判定和性质，三角函数的定义，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题.

卷 II

说明：本卷共有 2 大题，14 小题，共 90 分. 请用黑色字迹钢笔或签字笔将答案写在“答题纸”的相应位置上.

二、填空题（本题有 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. 因式分解： $x^2+x=$ _____.

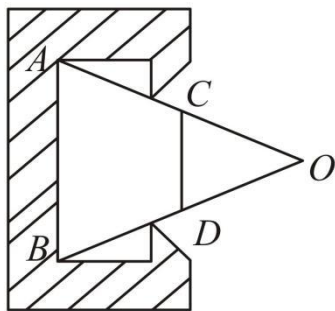
【答案】 $x(x+1)$

【解析】

【分析】要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式，若有公因式，则把它提取出来，之后再观察是否是完全平方公式或平方差公式，若是就考虑用公式法继续分解因式. 因此，直接提取公因式 x 即可.

【详解】解： $x^2+x=x(x+1)$

12. 如图，把两根钢条 OA ， OB 的一个端点连在一起，点 C ， D 分别是 OA ， OB 的中点．若 $CD = 4\text{cm}$ ，则该工件内槽宽 AB 的长为_____ cm ．



【答案】8

【解析】

【分析】利用三角形中位线定理即可求解．

【详解】解：∵点 C ， D 分别是 OA ， OB 的中点，

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AB,$$

$$\therefore AB = 2CD = 8(\text{cm}),$$

故答案为：8．

【点睛】本题考查了三角形中位线定理的应用，掌握“三角形的中位线是第三边的一半”是解题的关键．

13. 下表为某中学统计的七年级 500 名学生体重达标情况（单位：人），在该年级随机抽取一名学生，该生体重“标准”的概率是_____．

“偏瘦”	“标准”	“超重”	“肥胖”
80	350	46	24

【答案】 $\frac{7}{10}$

【解析】

【分析】根据概率公式计算即可得出结果．

【详解】解：该生体重“标准”的概率是 $\frac{350}{500} = \frac{7}{10}$ ，

故答案为： $\frac{7}{10}$ ．

【点睛】本题考查了概率公式，熟练掌握概率 = 所求情况数与总情况数之比是本题的关键．

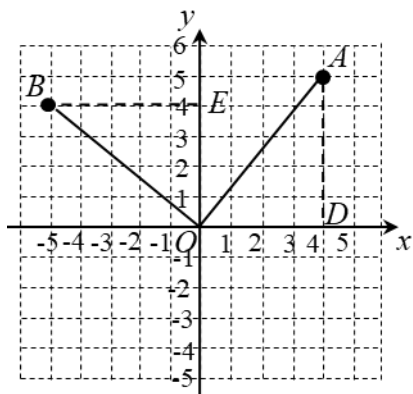
14. 在直角坐标系中，点 $(4,5)$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 90° ，得到的点的坐标是_____．

【答案】 $(-5, 4)$

【解析】

【分析】 把点绕原点旋转的问题转化为直角三角形旋转的问题，画出图形可解决问题.

【详解】 解：过 A 点作 $AD \perp x$ 轴，过 B 点作 $BE \perp y$ 轴，



$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4, 5)$,

$\therefore AD = 5, OD = 4$,

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOE + \angle AOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOD + \angle AOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOD = \angle BOE$,

$\therefore OA = OB$,

在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOE$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADO = \angle BEO \\ \angle AOD = \angle BOE, \\ OA = OB \end{cases}$$

$\therefore \triangle AOD \cong \triangle BOE$ (AAS),

$\therefore OE = OD = 4, BE = AD = 5$,

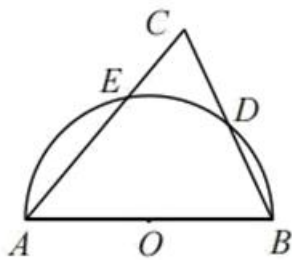
$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-5, 4)$,

故答案为: $(-5, 4)$.

【点睛】 本题考查坐标与图形变化-旋转，解题的关键是正确作出图形解决问题.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 6\text{cm}$, $\angle BAC = 50^\circ$ ，以 AB 为直径作半圆，交 BC 于点 D ，交 AC 于

点 E ，则弧 DE 的长为_____ cm.

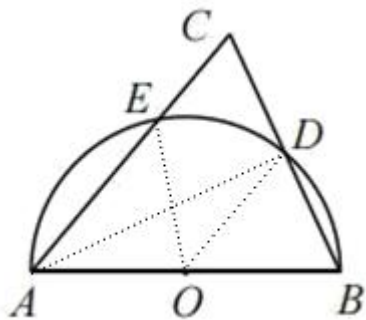


【答案】 $\frac{5\pi}{6}$ ## $\frac{5}{6}\pi$

【解析】

【分析】连接 AD ， OD ， OE ，根据等腰三角形三线合一性质，圆周角定理，中位线定理，弧长公式计算即可.

【详解】解：如图，连接 AD ， OD ， OE ，



$\because AB$ 为直径,

$\therefore AD \perp AB$,

$\because AB = AC = 6\text{cm}$, $\angle BAC = 50^\circ$,

$\therefore BD = CD$, $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 25^\circ$,

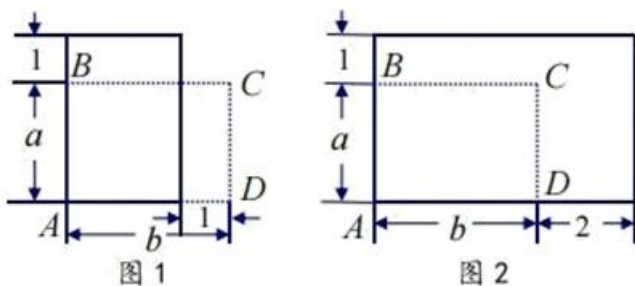
$\therefore \angle DOE = 2\angle BAD = 50^\circ$, $OD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC = 3\text{cm}$,

$\therefore$ 弧 DE 的长为 $\frac{50 \times \pi \times 3}{180} = \frac{5\pi}{6}(\text{cm})$,

故答案为: $\frac{5\pi}{6}$ cm.

【点睛】本题考查了等腰三角形三线合一性质，中位线定理，弧长公式，熟练掌握三线合一性质，弧长公式，圆周角定理是解题的关键.

16. 如图是一块矩形菜地 $ABCD$, $AB = a(\text{m})$, $AD = b(\text{m})$, 面积为 $s(\text{m}^2)$. 现将边 AB 增加 1m .



(1) 如图 1, 若 $a = 5$, 边 AD 减少 1m , 得到的矩形面积不变, 则 b 的值是_____.

(2) 如图 2, 若边 AD 增加 2m , 有且只有一个 a 的值, 使得到的矩形面积为 $2s(\text{m}^2)$, 则 s 的值是_____.

【答案】 ①. 6 ②. $6 + 4\sqrt{2}$ 或 $4\sqrt{2} + 6$

【解析】

【分析】(1) 根据面积的不变性, 列式计算即可.

(2) 根据面积, 建立分式方程, 转化为 a 一元二次方程, 判别式为零计算即可.

【详解】(1) 根据题意, 得, 起始长方形的面积为 $s = ab(\text{m}^2)$, 变化后长方形的面积为 $(a+1)(b-1)(\text{m}^2)$,

$\because a = 5$, 边 AD 减少 1m , 得到的矩形面积不变,

$$\therefore (5+1)(b-1) = 5b,$$

解得 $b = 6$,

故答案为: 6.

(2) 根据题意, 得, 起始长方形的面积为 $s = ab(\text{m}^2)$, 变化后长方形的面积为 $(a+1)(b+2)(\text{m}^2)$,

$$\therefore 2s = (a+1)(b+2), \quad b = \frac{s}{a},$$

$$\therefore 2s = (a+1)\left(\frac{s}{a} + 2\right),$$

$$\therefore \frac{2s}{a+1} = \frac{s}{a} + 2,$$

$$\therefore 2a^2 + (2-s)a + s = 0,$$

$\because$ 有且只有一个 a 的值,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (2-s)^2 - 8s = 0,$$

$$\therefore s^2 - 12s + 4 = 0,$$

解得 $s_1 = 6 + 4\sqrt{2}$, $s_2 = 6 - 4\sqrt{2}$ (舍去),

故答案为： $6+4\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了图形的面积变化，一元二次方程的应用，正确转化为一元二次方程是解题的关键.

三、解答题（本题有 8 小题，共 66 分，各小题都必须写出解答过程）

17. 计算： $(-2023)^0 + \sqrt{4} - 2\sin 30^\circ + |-5|$.

【答案】 7

【解析】

【分析】 根据零指数幂、算术平方根的定义、特殊角的三角函数值、绝对值的意义，计算即可.

【详解】 解： 原式 $= 1 + 2 - 2 \times \frac{1}{2} + 5$,

$$= 1 + 2 - 1 + 5,$$

$$= 7.$$

【点睛】 本题考查了零指数幂、算术平方根的定义、特殊角的三角函数值、绝对值的意义. 本题的关键是注意各部分的运算法则，细心计算.

18. 已知 $x = \frac{1}{3}$ ，求 $(2x+1)(2x-1) + x(3-4x)$ 的值.

【答案】 0

【解析】

【分析】 原式利用平方差公式、单项式乘多项式去括号合并得到最简结果，把已知等式变形后代入计算即可求出值.

【详解】 解： $(2x+1)(2x-1) + x(3-4x)$

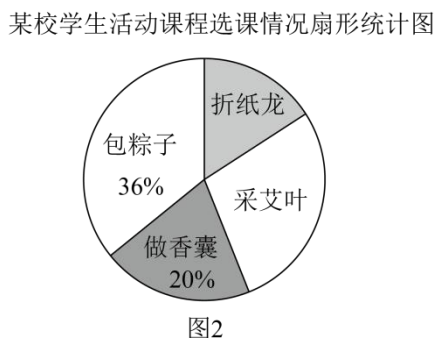
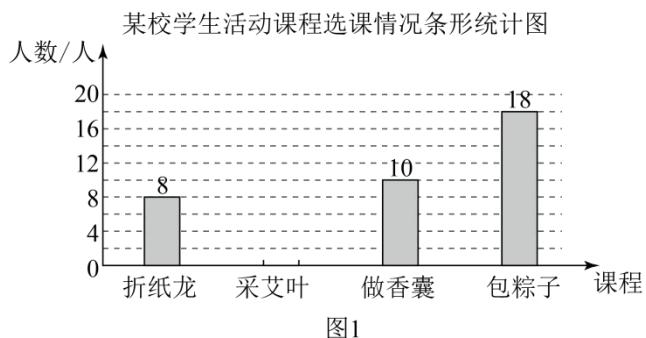
$$= 4x^2 - 1 + 3x - 4x^2$$

$$= -1 + 3x.$$

当 $x = \frac{1}{3}$ 时，原式 $= -1 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$.

【点睛】 此题考查了整式的混合运算－化简求值，熟练掌握运算是解本题的关键.

19. 为激发学生参与劳动的兴趣，某校开设了以“端午”为主题的活动课程，要求每位学生在“折纸龙”“采艾叶”“做香囊”与“包粽子”四门课程中选且只选其中一门，随机调查了本校部分学生的选课情况，绘制了两幅不完整的统计图. 请根据图表信息回答下列问题：



(1) 求本次被调查的学生人数，并补全条形统计图.

(2) 本校共有1000名学生，若每间教室最多可安排30名学生，试估计开设“折纸龙”课程的教室至少需要几间.

【答案】 (1) 本次调查抽取的学生人数为50人，见解析

(2) 6间

【解析】

【分析】 (1) 根据条形统计图已知数据和扇形统计图已知的对应数据，即可求出被调查的总人数，再利用总人数减去选择“折纸龙”“做香囊”与“包粽子”的人数，即可得到选择“采艾叶”的人数，补全条形统计图即可；

(2) 根据选择“折纸龙”人数的占比乘以1000，可求出学校选择“折纸龙”的总人数，设需要 x 间教室，根据题意列方程 $30x \geq 160$ ，取最小整数即可得到答案.

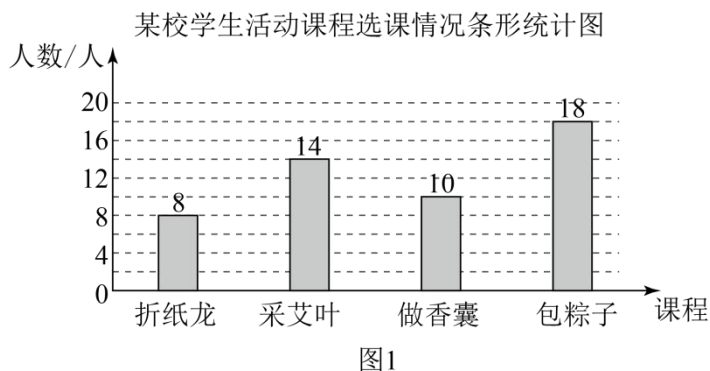
【小问1详解】

解：由选“包粽子”人数18人，在扇形统计图中占比36%，可得 $18 \div 36\% = 50$ ，

$\therefore$ 本次调查抽取的学生人数为50人.

其中选“采艾叶”的人数： $50 - (8 + 10 + 18) = 14$.

补全条形统计图，如图：



【小问2详解】

解：选“折纸龙”课程的比例 $8 \div 50 = 16\%$.

$\therefore$ 选“折纸龙”课程的总人数为 $1000 \times 16\% = 160$ (人),

设需要 x 间教室，

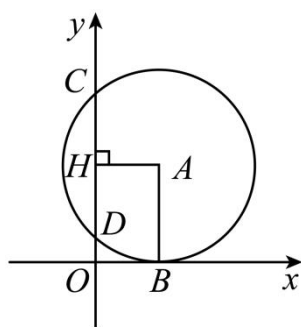
可得 $30x \geq 160$ ，

解得 $x \geq \frac{16}{3}$ ， x 取最小整数 6.

$\therefore$ 估计至少需要 6 间教室.

【点睛】 本题考查了条形统计图与扇形统计图结合，用样本估计总体，用一元一次不等式解决实际问题，结合条形统计图和扇形统计图求出相关数据是解题的关键.

20. 如图，点 A 在第一象限内， $\odot A$ 与 x 轴相切于点 B ，与 y 轴相交于点 C, D . 连接 AB ，过点 A 作 $AH \perp CD$ 于点 H .



(1) 求证：四边形 $ABOH$ 为矩形.

(2) 已知 $\odot A$ 的半径为 4， $OB = \sqrt{7}$ ，求弦 CD 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 6

【解析】

【分析】 (1) 根据切线的性质及有三个角是直角的四边形是矩形判定即可.

(2) 根据矩形的性质、垂径定理及圆的性质计算即可.

【小问 1 详解】

证明： $\because \odot A$ 与 x 轴相切于点 B ，

$\therefore AB \perp x$ 轴.

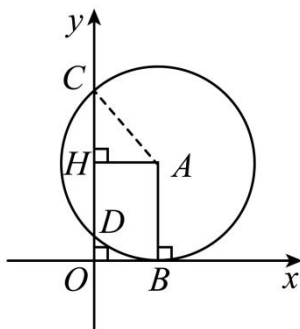
$\because AH \perp CD, HO \perp OB$ ，

$\therefore \angle AHO = \angle HOB = \angle OBA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $AHOB$ 是矩形.

【小问 2 详解】

如图，连接 AC .



∵ 四边形 $AHOB$ 是矩形,

$$\therefore AH = OB = \sqrt{7}.$$

在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中, $CH^2 = AC^2 - AH^2$,

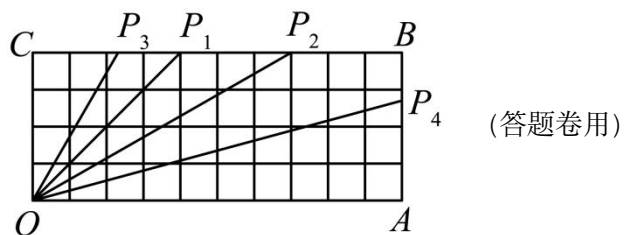
$$\therefore CH = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3.$$

∵ 点 A 为圆心, $AH \perp CD$,

$$\therefore CD = 2CH = 6.$$

【点睛】 本题考查了矩形的判定，垂径定理，圆的性质，熟练掌握矩形的判定和垂径定理是解题的关键.

21. 如图，为制作角度尺，将长为 10，宽为 4 的矩形 $OABC$ 分割成 4×10 的小正方形网格。在该矩形边上取点 P ，来表示 $\angle POA$ 的度数。阅读以下作图过程，并回答下列问题：



作法 (如图)	结论	
①在 CB 上取点 P_1 , 使 $CP_1 = 4$.	$\angle P_1OA = 45^\circ$, 点 P_1 表示 45° .	
②以 O 为圆心, 8 为半径作弧, 与 BC 交于点 P_2 .	$\angle P_2OA = 30^\circ$, 点 P_2 表示 30° .	
③分别以 O, P_2 为圆心, 大于 OP_2 长度一半的长为半径作弧, 相交于点 E, F , 连	...	

结 EF 与 BC 相交于点 P_3 .		
④以 P_2 为圆心, OP_2 的长为半径作弧, 与射线 CB 交于点 D , 连结 OD 交 AB 于 点 P_4 .	...	

(1) 分别求点 P_3, P_4 表示的度数.

(2) 用直尺和圆规在该矩形的边上作点 P_5 , 使该点表示 37.5° (保留作图痕迹, 不写作法).

【答案】(1) 点 P_3 表示 60° ; 点 P_4 表示 15°

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质可求出 $\angle OP_2C$ 度数, 根据线段垂直平分线的性质 $\angle P_2OP_3$ 度数, 即可求出 $\angle P_3OA$ 的度数, 从而知道 P_3 点表示度数; 利用半径相等即可求出 $\angle P_2OD = \angle P_2DO$, 再根据平行线的性质即可求出 $\angle P_2OD = \angle DOA$ 以及对应的度数, 从而知道 P_4 点表示度数.

(2) 利用角平分线的性质作图即可求出答案.

【小问1详解】

解: ① $\because$ 四边形 $OABC$ 是矩形,

$\therefore BC \parallel OA$.

$\therefore \angle OP_2C = \angle P_2OA = 30^\circ$

由作图可知, EF 是 OP_2 的中垂线,

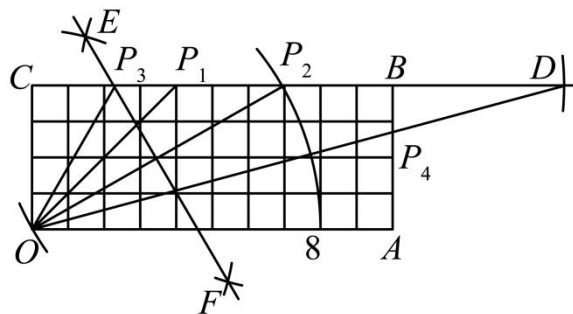


图1

$\therefore OP_3 = P_3P_2$.

$$\therefore \angle P_3OP_2 = \angle P_3P_2O = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle P_3OA = \angle P_3OP_2 + \angle P_2OA = 60^\circ.$$

$\therefore$ 点 P_3 表示 60° .

②由作图可知, $P_2D = P_2O$.

$$\therefore \angle P_2OD = \angle P_2DO.$$

又 $\because CB \parallel OA$,

$$\therefore \angle P_2DO = \angle DOA.$$

$$\therefore \angle P_2OD = \angle DOA = \frac{1}{2} \angle P_2OA = 15^\circ.$$

$\therefore$ 点 P_4 表示 15° .

故答案为: 点 P_3 表示 60° , 点 P_4 表示 15° .

【小问 2 详解】

解: 如图所示,

作 $\angle P_3OP_4$ 的角平分线等. 如图 2, 点 P_5 即为所求作的点.

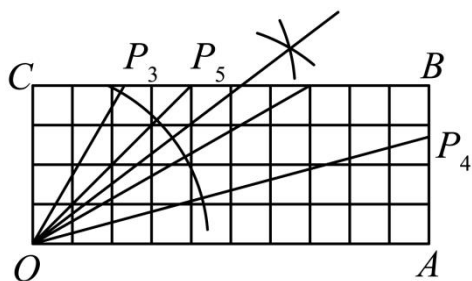


图2

$\therefore$ 点 P_3 表示 60° , 点 P_4 表示 15° .

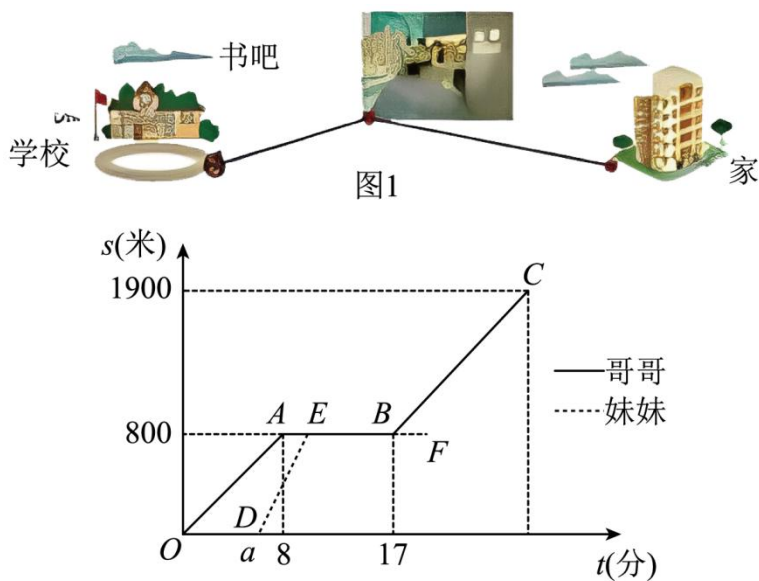
$$\angle P_5OA = \frac{1}{2} (\angle P_3OA - \angle P_4OA) + \angle P_4OA = \frac{1}{2} (\angle P_3OA + \angle P_4OA) = \frac{1}{2} (60^\circ + 15^\circ) = 37.5^\circ.$$

$\therefore P_5$ 表示 37.5° .

【点睛】 本题考查的是尺规作图的应用, 涉及到的知识点有线段垂直平分线、角平分线性质的、圆的相关性质, 解题的关键需要正确理解题意, 清楚知道用到的相关知识点.

22. 兄妹俩放学后沿图 1 中的马路从学校出发, 到书吧看书后回家, 哥哥步行先出发, 途中速度保持不变;

妹妹骑车，到书吧前的速度为 200 米/分. 图 2 中的图象分别表示两人离学校的路程 s (米) 与哥哥离开学校的时间 t (分) 的函数关系.



(1) 求哥哥步行的速度.

(2) 已知妹妹比哥哥迟 2 分钟到书吧.

①求图中 a 的值;

②妹妹在书吧待了 10 分钟后回家，速度是哥哥的 1.6 倍，能否在哥哥到家前追上哥哥？若能，求追上时兄妹俩离家还有多远；若不能，说明理由.

【答案】(1) $v = 100$

(2) ① $a = 6$; ②能追上，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 结合图表可得 $A(8, 800)$ ，根据速度等于路程除以时间，即可解答；

(2) ①根据妹妹到书吧前的速度为 200 米/分，可知 DE 的解析式的 k 为 200，设 DE 的解析式为 $s = 200t + b$ ，根据妹妹比哥哥迟 2 分钟到书吧可得 $E(12, 800)$ ，将 $E(12, 800)$ 代入 $s = 200t + b$ ，即可得到一次函数解析式，把 $s = 0$ 代入一次函数即可得到 a 的值；

②如图，将妹妹走完全程的图象画出，将 BC 和 FG 的解析式求出，求两个函数的交点即可.

【小问 1 详解】

解：由图可得 $A(8, 800)$ ，

$$\therefore v = \frac{800}{8} = 100 \text{ (米/分)},$$

$\therefore$ 哥哥步行速度为 100 米/分.

【小问 2 详解】

①根据妹妹到书吧前的速度为 200 米/分，可知 DE 的解析式的 k 为 200，

设 DE 所在直线为 $s = 200t + b$ ，将 $(10, 800)$ 代入，得 $800 = 200 \times 10 + b$ ，

解得 $b = -1200$ 。

$\therefore DE$ 所在直线为 $s = 200t - 1200$ ，

当 $s = 0$ 时， $200t - 1200 = 0$ ，解得 $t = 6$ 。

$\therefore a = 6$ 。

②能追上。

如图，根据哥哥的速度没变，可得 BC, OA 的解析式的 k 值相同，妹妹的速度减小但仍大于哥哥的速度，将妹妹的行程图象补充完整，

设 BC 所在直线为 $s = 100t + b_1$ ，将 $B(17, 800)$ 代入，得 $800 = 100 \times 17 + b_1$ ，

解得 $b_1 = -900$ ，

$\therefore s = 100t - 900$ 。

$\therefore$ 妹妹的速度是 160 米/分。

设 FG 所在直线为 $s = 160t + b_2$ ，将 $F(20, 800)$ 代入，得 $800 = 160 \times 20 + b_2$ ，

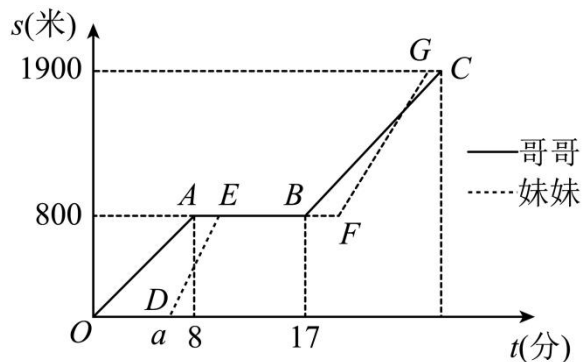
解得 $b_2 = -2400$ ，

$\therefore s = 160t - 2400$ 。

$$\text{联立方程} \begin{cases} s = 100t - 900 \\ s = 160t - 2400 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} t = 25 \\ s = 1600 \end{cases},$$

$\therefore 1900 - 1600 = 300$ 米，即追上时兄妹俩离家 300 米远。



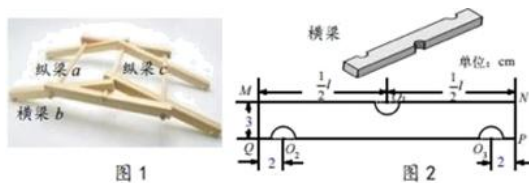
【点睛】本题考查了一次函数的实际应用（行程问题），

从图像中获得正确的信息是解题的关键。

23. 问题：如何设计“倍力桥”的结构？

图1是搭成的“倍力桥”，纵梁 a, c 夹住横梁 b ，使得横梁不能移动，结构稳固.

图2是长为 l (cm)，宽为3cm的横梁侧面示意图，三个凹槽都是半径为1cm的半圆. 圆心分别为 O_1, O_2, O_3 , $O_1M = O_1N, O_2Q = O_3P = 2$ cm，纵梁是底面半径为1cm的圆柱体. 用相同规格的横梁、纵梁搭“桥”，间隙忽略不计.

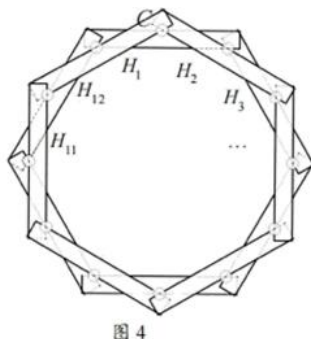
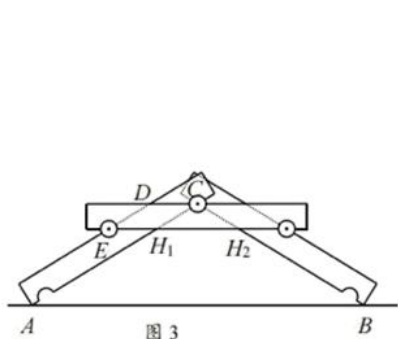


探究1：图3是“桥”侧面示意图， A, B 为横梁与地面的交点， C, E 为圆心， D, H_1, H_2 是横梁侧面两边的交点. 测得 $AB = 32$ cm，点 C 到 AB 的距离为12cm. 试判断四边形 $CDEH_1$ 的形状，并求 l 的值.

探究2：若搭成的“桥”刚好能绕成环，其侧面示意图的内部形成一个多边形.

①若有12根横梁绕成环，图4是其侧面示意图，内部形成十二边形 $H_1H_2H_3 \cdots H_{12}$ ，求 l 的值；

②若有 n 根横梁绕成的环(n 为偶数, 且 $n \geq 6$)，试用关于 n 的代数式表示内部形成的多边形 $H_1H_2H_3 \cdots H_n$ 的周长.



【答案】探究1：四边形 $CDEH_1$ 是菱形， $l = 22$ cm；探究2：① $l = (16 + 6\sqrt{3})$ cm；② $\left(\frac{6n}{\tan \frac{360^\circ}{n}} \right)$ cm

【解析】

【分析】探究1：根据图形即可判断出 $CDEH_1$ 形状；根据等腰三角形性质可求出 AM 长度，利用勾股定理即可求出 CA 长度，从而求出 l 值.

探究2：①根据十二边形的特性可知 $\angle CH_1N = 30^\circ$ ，利用特殊角正切值求出 CH_1 长度，最后利用菱形的性质求出 EH_1 的长度，从而求得 l 值. ②根据正多边形的特性可知 $\angle CH_1N$ 的度数，利用特殊角正切值求出

CH_1 和 H_1N 长度，最后利用菱形的性质求出 EH_1 的长度，从而求得 l 值.

【详解】解：探究 1：四边形 $CDEH_1$ 是菱形，理由如下：

由图 1 可知， $CD \parallel EH_1$ ， $ED \parallel CH_1$ ，

$\therefore CDEH_1$ 为平行四边形.

$\because$ 桥梁的规格是相同的，

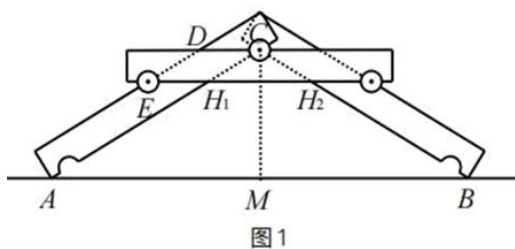
$\therefore$ 桥梁的宽度相同，即四边形 $CDEH_1$ 每条边上的高相等，

$\therefore \square CDEH_1$ 的面积等于边长乘这条边上的高，

$\therefore CDEH_1$ 每条边相等，

$\therefore CDEH_1$ 为菱形.

②如图 1，过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M .



由题意，得 $CA = CB$, $CM = 12$ ， $AB = 32\text{cm}$.

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AB = 16.$$

在 $\text{Rt}\triangle CAM$ 中， $CA^2 = AM^2 + CM^2$ ，

$$\therefore CA = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20.$$

$$\therefore l = CA + 2 = 22\text{cm}.$$

故答案为： $l = 22\text{cm}$.

探究 2：①如图 2，过点 C 作 $CN \perp H_1H_2$ 于点 N .

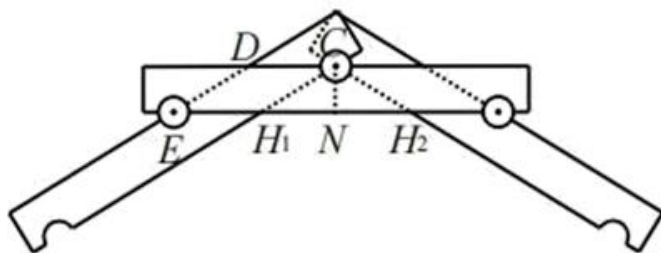


图 2

由题意, 得 $\angle H_1CH_2 = 120^\circ, CH_1 = CH_2, CN = 3$,

$$\therefore \angle CH_1N = 30^\circ.$$

$$\therefore CH_1 = 2CN = 6, H_1N = \frac{CN}{\tan 30^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}.$$

又 $\because$ 四边形 $CDEH_1$ 是菱形,

$$\therefore EH_1 = CH_1 = 6.$$

$$\therefore l = 2(2 + 6 + 3\sqrt{3}) = (16 + 6\sqrt{3}) \text{ cm}.$$

故答案为: $l = (16 + 6\sqrt{3})\text{cm}$.

②如图 3, 过点 C 作 $CN \perp H_1H_2$ 于点 N .

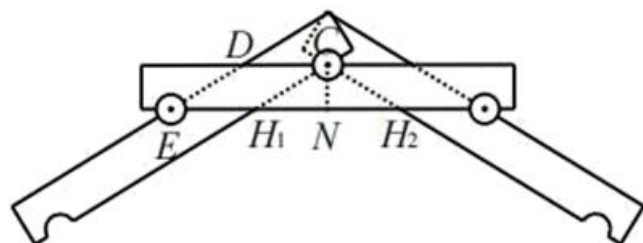


图 3

由题意, 形成的多边形为正 n 边形,

$$\therefore \text{外角 } \angle CH_1H_2 = \frac{360^\circ}{n}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CNH_1 \text{ 中, } H_1N = \frac{CN}{\tan \angle CH_1H_2} = \frac{3}{\tan \frac{360^\circ}{n}}.$$

又 $\because CH_1 = CH_2, CN \perp H_1H_2,$

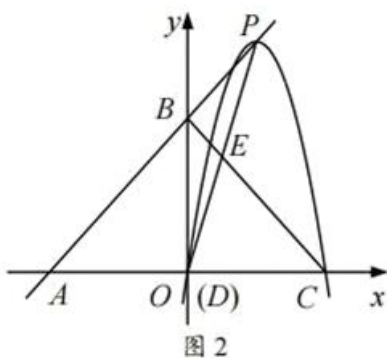
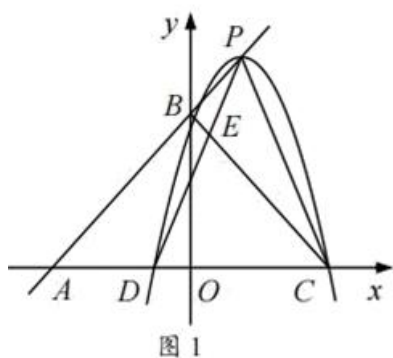
$$\therefore H_1H_2 = 2H_1N = \frac{6}{\tan \frac{360^\circ}{n}}.$$

$$\therefore \text{形成的多边形的周长为} \left(\frac{6n}{\tan \frac{360^\circ}{n}} \right) \text{cm}.$$

$$\text{故答案为:} \left(\frac{6n}{\tan \frac{360^\circ}{n}} \right) \text{cm}.$$

【点睛】本题是一道生活实际应用题，考查的是菱形的性质和判定、锐角三角函数、勾股定理，解题的关键在于将生活实际和有关数学知识有效结合以及熟练掌握相关性质.

24. 如图，直线 $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}$ 与 x 轴， y 轴分别交于点 A, B ，抛物线的顶点 P 在直线 AB 上，与 x 轴的交点为 C, D ，其中点 C 的坐标为 $(2, 0)$ 。直线 BC 与直线 PD 相交于点 E 。



(1) 如图 2，若抛物线经过原点 O 。

①求该抛物线的函数表达式；②求 $\frac{BE}{EC}$ 的值。

(2) 连接 PC ， $\angle CPE$ 与 $\angle BAO$ 能否相等？若能，求符合条件的点 P 的横坐标；若不能，试说明理由。

【答案】(1) ① $y = -\frac{3\sqrt{5}}{2}x^2 + 3\sqrt{5}x$ ；② $\frac{1}{3}$

(2) 能， 6 或 $\frac{2}{3}$ 或 $-\frac{6}{7}$ 或 $-\frac{14}{3}$ 。

【解析】

【分析】(1) ①先求顶点的坐标，然后待定系数法求解析式即可求解；

②过点 E 作 $EH \perp OC$ 于点 H 。设直线 BC 为 $y = kx + \sqrt{5}$ ，把 $C(2, 0)$ 代入，得 $0 = 2k + \sqrt{5}$ ，解得

$k = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ，直线 BC 为 $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}$ 。同理，直线 OP 为 $y = \frac{3\sqrt{5}}{2}x$ 。联立两直线解析式得出

$E\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$ ，根据 $EH \parallel BO$ ，由平行线分线段成比例即可求解；

(2) 设点 P 的坐标为 $\left(t, \frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{5}\right)$ ，则点 D 的坐标为 $(2t-2, 0)$ 。①如图 2-1，当 $t > 2$ 时，存在

$\angle CPE = \angle BAO$ 。记 $\angle CPE = \angle BAO = \alpha$, $\angle APC = \beta$ ，则 $\angle APD = \alpha + \beta$ 。过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，

则 $AF = t + 2$ 。在 $Rt\triangle APF$ 中， $\cos \angle BAO = \frac{AF}{AP} = \frac{2}{3}$ ，进而得出点 P 的横坐标为 6。②如图 2-2，当 $0 < t \leq 2$

时，存在 $\angle CPE = \angle BAO$ 。记 $\angle CPE = \angle BAD = \alpha$, $\angle APD = \beta$ 。过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，则

$AF = t + 2$ 。在 $Rt\triangle APF$ 中， $\cos \angle BAO = \frac{AF}{AP} = \frac{2}{3}$ ，得出点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$ 。③如图 2-3，当 $-2 < t \leq 0$

时，存在 $\angle CPE = \angle BAO$ 。记 $\angle BAO = \alpha$ 。过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，则 $AF = t + 2$ 。在 $Rt\triangle APF$ 中，

$\frac{AF}{AP} = \cos \angle BAO = \frac{2}{3}$ ，得出点 P 的横坐标为 $-\frac{6}{7}$ 。④如图 2-4，当 $t \leq -2$ 时，存在 $\angle CPE = \angle BAO$ 。记

$\angle BAO = \alpha$ 。过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，则 $AF = -t - 2$ 。在 $Rt\triangle APF$ 中， $\frac{AF}{AP} = \cos \angle PAF = \frac{2}{3}$ ，得

出点 P 的横坐标为 $-\frac{14}{3}$ 。

【小问 1 详解】

解：① $\because OC = 2$ ，

$\therefore$ 顶点 P 的横坐标为 1。

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时， $y = \frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，

$\therefore$ 点 P 的坐标是 $\left(1, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ 。

设抛物线的函数表达式为 $y = a(x-1)^2 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，把 $(0, 0)$ 代入，

得 $0 = a + \frac{3\sqrt{5}}{2}$ ，

$$\text{解得 } a = -\frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore \text{该抛物线的函数表达式为 } y = -\frac{3\sqrt{5}}{2}(x-1)^2 + \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{即 } y = -\frac{3\sqrt{5}}{2}x^2 + 3\sqrt{5}x.$$

②如图 1，过点 E 作 $EH \perp OC$ 于点 H 。

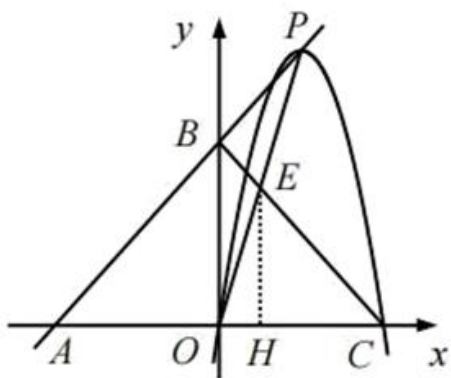


图 1

设直线 BC 为 $y = kx + \sqrt{5}$ ，把 $C(2, 0)$ 代入，得 $0 = 2k + \sqrt{5}$ ，

$$\text{解得 } k = -\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 为 } y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}.$$

同理，直线 OP 为 $y = \frac{3\sqrt{5}}{2}x$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{5}}{2}x + \sqrt{5}, \\ y = \frac{3\sqrt{5}}{2}x. \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{3\sqrt{5}}{4}. \end{cases}$$

$$\therefore E\left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4}\right).$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}, HC = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore EH \parallel BO,$$

$$\therefore \frac{BE}{EC} = \frac{OH}{HC} = \frac{1}{3}.$$

【小问2 详解】

设点 P 的坐标为 $\left(t, \frac{\sqrt{5}}{2}t + \sqrt{5}\right)$, 则点 D 的坐标为 $(2t-2, 0)$.

①如图 2-1, 当 $t > 2$ 时, 存在 $\angle CPE = \angle BAO$.

记 $\angle CPE = \angle BAO = \alpha, \angle APC = \beta$, 则 $\angle APD = \alpha + \beta$.

$\therefore \angle PCD$ 为 $\triangle PAC$ 的外角,

$$\therefore \angle PCD = \alpha + \beta.$$

$$\therefore PC = PD.$$

$$\therefore \angle PDC = \angle PCD = \alpha + \beta.$$

$$\therefore \angle APD = \angle ADP.$$

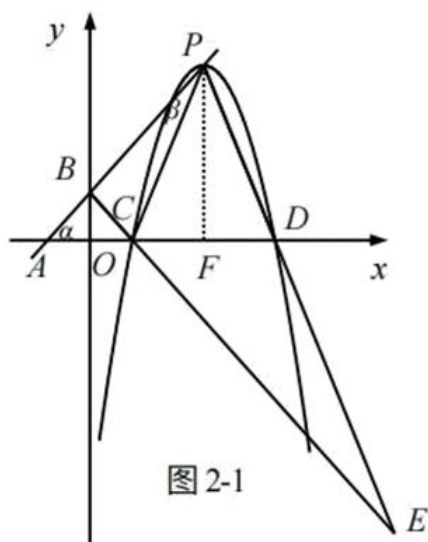
$$\therefore AP = AD = 2t.$$

过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F , 则 $AF = t + 2$.

$$\text{在 Rt}\triangle APF \text{ 中, } \cos \angle BAO = \frac{AF}{AP} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{t+2}{2t} = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } t = 6.$$

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 6.



②如图 2-2，当 $0 < t \leq 2$ 时，存在 $\angle CPE = \angle BAO$ 。

记 $\angle CPE = \angle BAD = \alpha$, $\angle APD = \beta$ 。

$\because \angle PDC$ 为 $\triangle PAD$ 的外角，

$\therefore \angle PDC = \alpha + \beta$ 。

$\therefore \angle PCD = \angle PDC = \alpha + \beta$

$\therefore \angle APC = \angle ACP$ 。

$\therefore AP = AC = 4$ 。

过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，则 $AF = t + 2$ 。

在 $\text{Rt}\triangle APF$ 中， $\cos \angle BAO = \frac{AF}{AP} = \frac{2}{3}$ ，

$\therefore \frac{t+2}{4} = \frac{2}{3}$ ，解得 $t = \frac{2}{3}$ 。

$\therefore$ 点 P 的横坐标为 $\frac{2}{3}$ 。

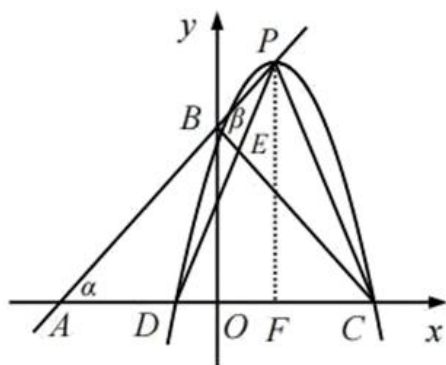


图 2-2

③如图 2-3，当 $-2 < t \leq 0$ 时，存在 $\angle CPE = \angle BAO$ 。记 $\angle BAO = \alpha$ 。

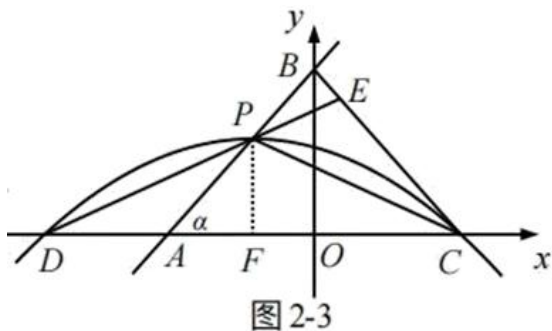


图 2-3

$$\therefore PC = PD,$$

$$\therefore \angle PDC = \angle PCD = \frac{1}{2} \angle CPE = \frac{1}{2} \alpha.$$

$$\therefore \angle APD = \angle BAO - \angle PDC = \alpha - \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \alpha.$$

$$\therefore \angle APD = \angle PDA.$$

$$\therefore AD = AP = -2t.$$

过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，则 $AF = t + 2$ 。

$$\text{在 Rt}\triangle APF \text{ 中, } \frac{AF}{AP} = \cos \angle BAO = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{t+2}{-2t} = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } t = -\frac{6}{7}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的横坐标为 } -\frac{6}{7}.$$

④如图 2-4，当 $t \leq -2$ 时，存在 $\angle CPE = \angle BAO$ 。记 $\angle BAO = \alpha$ 。

$$\therefore PC = PD,$$

$$\therefore \angle PCD = \angle PDC = \frac{1}{2} \angle CPE = \frac{1}{2} \alpha.$$

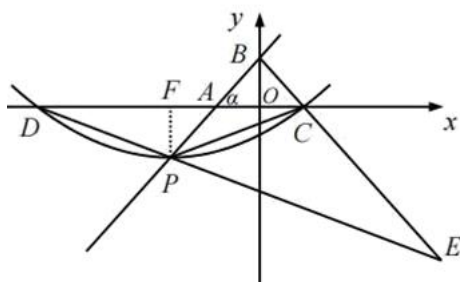


图 2-4

$$\therefore \angle APC = \angle BAO - \angle PCD = \alpha - \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha.$$

$$\therefore PA = CA = 4.$$

过点 P 作 $PF \perp x$ 轴于点 F ，则 $AF = -t - 2$ 。

$$\text{在 Rt}\triangle APF \text{ 中, } \frac{AF}{AP} = \cos \angle PAF = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{-2-t}{4} = \frac{2}{3}, \text{ 解得 } t = -\frac{14}{3}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的横坐标为 } -\frac{14}{3}.$$

$$\text{综上, 点 } P \text{ 的横坐标为 } 6, \frac{2}{3}, -\frac{6}{7}, -\frac{14}{3}.$$

【点睛】本题考查了二次函数综合运用，解直角三角形，平行线分线段成比例，熟练掌握以上知识，分类讨论是解题的关键。

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】