

2023 年杭州市初中学业水平考试

数学

考生须知：

1. 本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟。
2. 答题前，在答题纸上写姓名和准考证号，并在试卷首页的指定位置写上姓名和座位号。
3. 必须在答题纸的对应答题位置上答题，写在其他地方无效。答题方式详见答题纸上的说明。
4. 如需画图作答，必须用黑色字迹的钢笔或签字笔将图形线条描黑。
5. 考试结束后，试题卷和答题纸一并上交。

参考公式：

二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的顶点坐标公式： $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 。

试题卷

一、选择题：(本大题有 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分)

1. 杭州奥体中心体育场又称“大莲花”，里面有 80800 个座位。数据 80800 用科学记数法表示为 ()



- A. 8.8×10^4 B. 8.08×10^4 C. 8.8×10^5 D. 8.08×10^5

【答案】B

【解析】

【分析】根据科学记数法的表示方法求解即可。

【详解】 $80800 = 8.08 \times 10^4$ 。

故选：B。

【点睛】本题主要考查科学记数法。科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数。解题关键是正确确定 a 的值以及 n 的值。

2. $(-2)^2 + 2^2 =$ ()

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】先计算乘方，再计算加法即可求解.

【详解】解： $(-2)^2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$,

故选：D.

【点睛】本题考查有理数度混合运算，熟练掌握有理数乘方运算法则是解题的关键.

3. 分解因式： $4a^2 - 1 = (\quad)$ A. $(2a-1)(2a+1)$ B. $(a-2)(a+2)$ C. $(a-4)(a+1)$ D. $(4a-1)(a+1)$

【答案】A

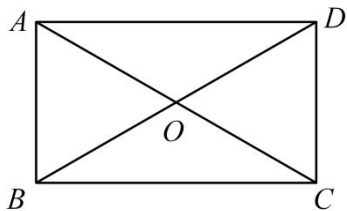
【解析】

【分析】利用平方差公式分解即可.

【详解】 $4a^2 - 1 = (2a)^2 - 1 = (2a+1)(2a-1)$.

故选：A.

【点睛】此题考查了因式分解的方法，解题的关键是熟练掌握因式分解的方法. 因式分解的方法有：提公因式法，平方差公式法，完全平方公式法，十字相乘法等.

4. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O . 若 $\angle AOB = 60^\circ$ ，则 $\frac{AB}{BC} = (\quad)$ A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据矩形性质得出 $OA = OC = \frac{1}{2}AC$, $OB = OD = \frac{1}{2}BD$, $AC = BD$, 推出 $OA = OB$ 则有等边三角形 AOB , 即 $\angle BAO = 60^\circ$, 然后运用余切函数即可解答.【详解】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC, \quad OB = OD = \frac{1}{2}BD, \quad AC = BD,$$

$$\therefore OA = OB,$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle BAO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选：D.

【点睛】本题考查了等边三角形性质和判定、矩形的性质、余切的定义等知识点，求出 $\angle BAO = 60^\circ$ 是解答本题的关键.

5. 在直角坐标系中，把点 $A(m, 2)$ 先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位得到点 B . 若点 B 的横坐标和纵坐标相等，则 $m =$ ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【答案】C

【解析】

【分析】先根据平移方式确定点 B 的坐标，再根据点 B 的横坐标和纵坐标相等列方程，解方程即可.

【详解】解： $\because$ 点 $A(m, 2)$ 先向右平移 1 个单位，再向上平移 3 个单位得到点 B ,

$$\therefore B(m+1, 2+3), \text{ 即 } B(m+1, 5),$$

$\because$ 点 B 的横坐标和纵坐标相等,

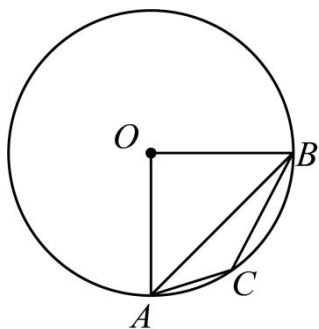
$$\therefore m+1 = 5,$$

$$\therefore m = 4,$$

故选 C.

【点睛】本题考查平面直角坐标系内点的平移，一元一次方程的应用等，解题的关键是掌握平面直角坐标系内点平移时坐标的变化规律：横坐标右加左减，纵坐标上加下减.

6. 如图，在 $\odot O$ 中，半径 OA, OB 互相垂直，点 C 在劣弧 AB 上. 若 $\angle ABC = 19^\circ$ ，则 $\angle BAC =$ ()

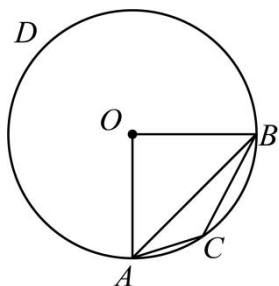
A. 23° B. 24° C. 25° D. 26°

【答案】D

【解析】

【分析】根据 OA, OB 互相垂直可得 $\widehat{ADB}$ 所对的圆心角为 270° ，根据圆周角定理可得 $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 270^\circ = 135^\circ$ ，再根据三角形内角和定理即可求解。

【详解】解：如图，



$\because$ 半径 OA, OB 互相垂直，

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \widehat{ADB}$ 所对的圆心角为 270° ，

$\therefore \widehat{ADB}$ 所对的圆周角 $\angle ACB = \frac{1}{2} \times 270^\circ = 135^\circ$ ，

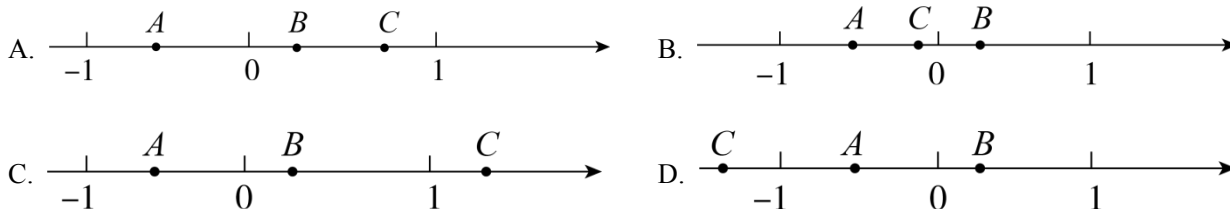
又 $\because \angle ABC = 19^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = 26^\circ$ ，

故选 D.

【点睛】本题考查圆周角定理、三角形内角和定理，解题的关键是掌握：同圆或等圆中，同弧所对的圆周角等于圆心角的一半。

7. 已知数轴上的点 A, B 分别表示数 a, b ，其中 $-1 < a < 0$ ， $0 < b < 1$ 。若 $a \times b = c$ ，数 c 在数轴上用点 C 表示，则点 A, B, C 在数轴上的位置可能是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】先由 $-1 < a < 0$, $0 < b < 1$, $a \times b = c$, 根据不等式性质得出 $a < c < 0$, 再分别判定即可.

【详解】解: $\because -1 < a < 0$, $0 < b < 1$,

$$\therefore a < ab < 0$$

$$\because a \times b = c$$

$$\therefore a < c < 0$$

A、 $0 < b < c < 1$, 故此选项不符合题意;

B、 $a < c < 0$, 故此选项符合题意;

C、 $c > 1$, 故此选项不符合题意;

D、 $c < -1$, 故此选项不符合题意;

故选: B.

【点睛】本题考查用数轴上的点表示数, 不等式性质, 由 $-1 < a < 0$, $0 < b < 1$, $a \times b = c$ 得出 $a < c < 0$ 是解题的关键.

8. 设二次函数 $y = a(x-m)(x-m-k)$ ($a > 0, m, k$ 是实数), 则 ()

A. 当 $k = 2$ 时, 函数 y 的最小值为 $-a$

B. 当 $k = 2$ 时, 函数 y 的最小值为 $-2a$

C. 当 $k = 4$ 时, 函数 y 的最小值为 $-a$

D. 当 $k = 4$ 时, 函数 y 的最小值为 $-2a$

【答案】A

【解析】

【分析】令 $y = 0$, 则 $0 = a(x-m)(x-m-k)$, 解得: $x_1 = m$, $x_2 = m+k$, 从而求得抛物线对称轴为直线 $x = \frac{m+m+k}{2} = \frac{2m+k}{2}$, 再分别求出当 $k = 2$ 或 $k = 4$ 时函数 y 的最小值即可求解.

【详解】解: 令 $y = 0$, 则 $0 = a(x-m)(x-m-k)$,

解得: $x_1 = m$, $x_2 = m+k$,

$$\therefore \text{抛物线对称轴为直线 } x = \frac{m+m+k}{2} = \frac{2m+k}{2}$$

当 $k = 2$ 时, 抛物线对称轴为直线 $x = m+1$,

把 $x = m + 1$ 代入 $y = a(x - m)(x - m - 2)$, 得 $y = -a$,

$\therefore a > 0$

$\therefore$ 当 $x = m + 1$, $k = 2$ 时, y 有最小值, 最小值为 $-a$.

故 A 正确, B 错误;

当 $k = 4$ 时, 抛物线对称轴为直线 $x = m + 2$,

把 $x = m + 2$ 代入 $y = a(x - m)(x - m - 4)$, 得 $y = -4a$,

$\therefore a > 0$

$\therefore$ 当 $x = m + 2$, $k = 4$ 时, y 有最小值, 最小值为 $-4a$,

故 C、D 错误,

故选: A.

【点睛】本题考查抛物线的最值, 抛物线对称轴. 利用抛物线的对称性求出抛物线对称轴是解题的关键.

9. 一枚质地均匀的正方体骰子 (六个面分别标有数字 1, 2, 3, 4, 5, 6), 投掷 5 次, 分别记录每次骰子向上的一面出现的数字. 根据下面的统计结果, 能判断记录的这 5 个数字中一定没有出现数字 6 的是 ()

A. 中位数是 3, 众数是 2

B. 平均数是 3, 中位数是 2

C. 平均数是 3, 方差是 2

D. 平均数是 3, 众数是 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据中位数、众数、平均数、方差的定义, 结合选项中设定情况, 逐项判断即可.

【详解】解: 当中位数是 3, 众数是 2 时, 记录的 5 个数字可能为: 2, 2, 3, 4, 5 或 2, 2, 3, 4, 6 或 2, 2, 3, 5, 6, 故 A 选项不合题意;

当平均数是 3, 中位数是 2 时, 5 个数之和为 15, 记录的 5 个数字可能为 1, 1, 2, 5, 6 或 1, 2, 2, 5, 5, 故 B 选项不合题意;

当平均数是 3, 方差是 2 时, 5 个数之和为 15, 假设 6 出现了 1 次, 方差最小的情况下另外 4 个数为: 1, 2, 3, 3, 此时方差 $s = \frac{1}{5} \times [(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (6-3)^2] = 2.8 > 2$,

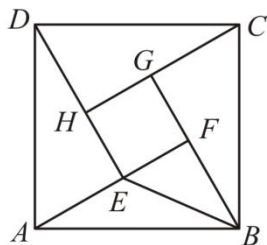
因此假设不成立, 即一定没有出现数字 6, 故 C 选项符合题意;

当平均数是 3, 众数是 2 时, 5 个数之和为 15, 2 至少出现两次, 记录的 5 个数字可能为 1, 2, 2, 4, 6, 故 D 选项不合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查中位数、众数、平均数、方差, 解题的关键是根据每个选项中的设定情况, 列出可能出现的 5 个数字.

10. 第二十四届国际数学家大会会徽的设计基础是 1700 多年前中国古代数学家赵爽的“弦图”. 如图, 在由四个全等的直角三角形 ($\triangle DAE, \triangle ABF, \triangle BCG, \triangle CDH$) 和中间一个小正方形 $EFGH$ 拼成的大正方形 $ABCD$ 中, $\angle ABF > \angle BAF$, 连接 BE . 设 $\angle BAF = \alpha, \angle BEF = \beta$, 若正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $1:n$, $\tan \alpha = \tan^2 \beta$, 则 $n = (\quad)$



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】设 $BF = AE = a$, $EF = b$, 首先根据 $\tan \alpha = \tan^2 \beta$ 得到 $2a^2 + 2ab = 2b^2$, 然后表示出正方形 $ABCD$ 的面积为 $AB^2 = 3b^2$, 正方形 $EFGH$ 的面积为 $EF^2 = b^2$, 最后利用正方形 $EFGH$ 与正方形 $ABCD$ 的面积之比为 $1:n$ 求解即可.

【详解】设 $BF = AE = a$, $EF = b$,

$\because \tan \alpha = \tan^2 \beta$, $\angle AFB = 90^\circ$,

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \left(\frac{BF}{EF} \right)^2, \text{ 即 } \frac{a}{a+b} = \left(\frac{a}{b} \right)^2,$$

$$\therefore \frac{a}{a+b} = \frac{a^2}{b^2}, \text{ 整理得 } a^2 + ab = b^2,$$

$$\therefore 2a^2 + 2ab = 2b^2,$$

$$\therefore \angle AFB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB^2 = AF^2 + BF^2 = (a+b)^2 + a^2 = 2a^2 + 2ab + b^2 = 3b^2,$$

$$\therefore \text{正方形 } ABCD \text{ 的面积为 } AB^2 = 3b^2,$$

$$\therefore \text{正方形 } EFGH \text{ 的面积为 } EF^2 = b^2,$$

$$\therefore \text{正方形 } EFGH \text{ 与正方形 } ABCD \text{ 的面积之比为 } 1:n,$$

$$\therefore \frac{b^2}{3b^2} = \frac{1}{n},$$

$\therefore$ 解得 $n=3$.

故选：C.

【点睛】此题考查了勾股定理，解直角三角形，赵爽“弦图”等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

二、填空题：(本大题有 6 个小题，每小题 4 分，共 24 分)

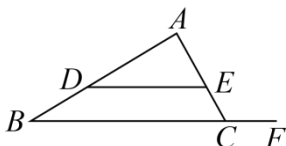
11. 计算： $\sqrt{2} - \sqrt{8} =$ _____

【答案】 $-\sqrt{2}$

【解析】

【详解】试题解析： $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

12. 如图，点 D, E 分别在 $\triangle ABC$ 的边 AB, AC 上，且 $DE \parallel BC$ ，点 F 在线段 BC 的延长线上. 若 $\angle ADE = 28^\circ$ ， $\angle ACF = 118^\circ$ ，则 $\angle A =$ _____.



【答案】 90° ## 90 度

【解析】

【分析】首先根据平行线的性质得到 $\angle B = \angle ADE = 28^\circ$ ，然后根据三角形外角的性质求解即可.

【详解】 $\because DE \parallel BC$ ， $\angle ADE = 28^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle ADE = 28^\circ,$$

$$\because \angle ACF = 118^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACF - \angle B = 118^\circ - 28^\circ = 90^\circ.$$

故答案为： 90° .

【点睛】此题考查了平行线的性质和三角形外角的性质，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

13. 一个仅装有球的不透明布袋里只有 6 个红球和 n 个白球（仅有颜色不同）. 若从中任意摸出一个球是红球的概率为 $\frac{2}{5}$ ，则 $n =$ _____.

【答案】 9

【解析】

【分析】根据概率公式列分式方程，解方程即可.

【详解】解：∵从中任意摸出一个球是红球的概率为 $\frac{2}{5}$ ，

$$\therefore \frac{6}{6+n} = \frac{2}{5},$$

去分母，得 $6 \times 5 = 2(6+n)$ ，

解得 $n=9$ ，

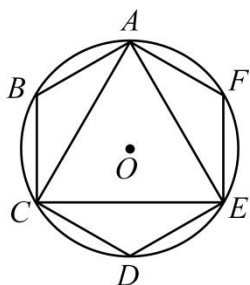
经检验 $n=9$ 是所列分式方程的根，

∴ $n=9$ ，

故答案为：9.

【点睛】本题考查已知概率求数量、解分式方程，解题的关键是掌握概率公式.

14. 如图，六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，设正六边形 $ABCDEF$ 的面积为 S_1 ， $\triangle ACE$ 的面积为 S_2 ，则 $\frac{S_1}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

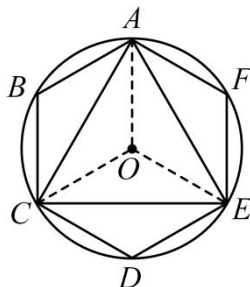


【答案】2

【解析】

【分析】连接 OA, OC, OE ，首先证明出 $\triangle ACE$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，然后证明出 $\triangle BAC \cong \triangle OAC$ (ASA)，得到 $S_{\triangle BAC} = S_{\triangle AFE} = S_{\triangle CDE}$ ， $S_{\triangle OAC} = S_{\triangle OAE} = S_{\triangle OCE}$ ，进而求解即可.

【详解】如图所示，连接 OA, OC, OE ，



∵六边形 $ABCDEF$ 是 $\odot O$ 的内接正六边形，

∴ $AC = AE = CE$ ，

$\therefore \triangle ACE$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形,

$\therefore \angle B = 120^\circ, AB = BC,$

$\therefore \angle BAC = \angle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 30^\circ,$

$\therefore \angle CAE = 60^\circ,$

$\therefore \angle OAC = \angle OAE = 30^\circ,$

$\therefore \angle BAC = \angle OAC = 30^\circ,$

同理可得, $\angle BCA = \angle OCA = 30^\circ,$

又 $\because AC = AC,$

$\therefore \triangle BAC \cong \triangle OAC (ASA),$

$\therefore S_{\triangle BAC} = S_{\triangle OAC},$

由圆和正六边形的性质可得, $S_{\triangle BAC} = S_{\triangle AFE} = S_{\triangle CDE},$

由圆和正三角形的性质可得, $S_{\triangle OAC} = S_{\triangle OAE} = S_{\triangle OCE},$

$\therefore S_1 = S_{\triangle BAC} + S_{\triangle AFE} + S_{\triangle CDE} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAE} + S_{\triangle OCE} = 2(S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAE} + S_{\triangle OCE}) = 2S_2,$

$\therefore \frac{S_1}{S_2} = 2.$

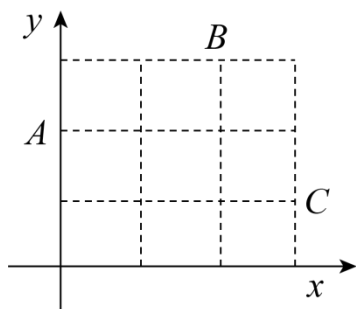
故答案为: 2.

【点睛】 此题考查了圆内接正多边形的性质, 正六边形和正三角形的性质, 全等三角形的性质和判定等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

15. 在“探索一次函数 $y = kx + b$ 的系数 k, b 与图像的关系”活动中, 老师给出了直角坐标系中的三个点:

$A(0, 2), B(2, 3), C(3, 1)$. 同学们画出了经过这三个点中每两个点的一次函数的图像, 并得到对应的函数

表达式 $y_1 = k_1x + b_1, y_2 = k_2x + b_2, y_3 = k_3x + b_3$. 分别计算 $k_1 + b_1, k_2 + b_2, k_3 + b_3$ 的值, 其中最大的值等于_____.



【答案】5

【解析】

【分析】分别求出三个函数解析式，然后求出 $k_1 + b_1$, $k_2 + b_2$, $k_3 + b_3$ 进行比较即可解答.【详解】解：设 $y_1 = k_1x + b_1$ 过 $A(0, 2), B(2, 3)$ ，则有：

$$\begin{cases} 2 = b_1 \\ 3 = 2k_1 + b_1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 2 \end{cases}, \text{ 则 } k_1 + b_1 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2};$$

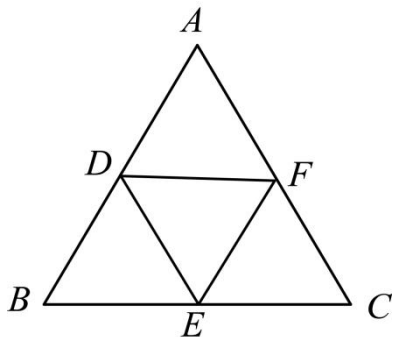
$$\text{同理: } k_2 + b_2 = -2 + 7 = 5, \quad k_3 + b_3 = -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}$$

则分别计算 $k_1 + b_1$, $k_2 + b_2$, $k_3 + b_3$ 的最大值为 $k_2 + b_2 = -2 + 7 = 5$.

故答案为 5.

【点睛】本题主要考查了求一次函数解析式，掌握待定系数法是解答本题的关键.

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$, $\angle A < 90^\circ$ ，点 D, E, F 分别在边 AB, BC, CA 上，连接 DE, EF, FD ，已知点 B 和点 F 关于直线 DE 对称. 设 $\frac{BC}{AB} = k$ ，若 $AD = DF$ ，则 $\frac{CF}{FA} = \underline{\hspace{2cm}}$ (结果用含 k 的代数式表示).

【答案】 $\frac{k^2}{2 - k^2}$

【解析】

【分析】先根据轴对称的性质和已知条件证明 $DE \parallel AC$ ，再证 $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ ，推出 $EC = \frac{1}{2}k \cdot AB$ ，通过证明 $\triangle ABC \sim \triangle ECF$ ，推出 $CF = \frac{1}{2}k^2 \cdot AB$ ，即可求出 $\frac{CF}{FA}$ 的值.

【详解】解：∵ 点 B 和点 F 关于直线 DE 对称，

$$\therefore DB = DF,$$

$$\therefore AD = DF,$$

$$\therefore AD = DB .$$

$$\because AD = DF ,$$

$$\therefore \angle A = \angle DFA ,$$

$\because$ 点 B 和点 F 关于直线 DE 对称,

$$\therefore \angle BDE = \angle FDE ,$$

$$\text{又} \because \angle BDE + \angle FDE = \angle BDF = \angle A + \angle DFA ,$$

$$\therefore \angle FDE = \angle DFA ,$$

$$\therefore DE \parallel AC ,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEB , \quad \angle DEF = \angle EFC ,$$

$\because$ 点 B 和点 F 关于直线 DE 对称,

$$\therefore \angle DEB = \angle DEF ,$$

$$\therefore \angle C = \angle EFC ,$$

$$\because AB = AC ,$$

$$\therefore \angle C = \angle B ,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ECF$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle ACB = \angle EFC \end{cases} ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECF .$$

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel AC$,

$$\therefore \angle BDE = \angle A , \quad \angle BED = \angle C ,$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BAC ,$$

$$\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA} = \frac{1}{2} ,$$

$$\therefore EC = \frac{1}{2} BC ,$$

$$\because \frac{BC}{AB} = k ,$$

$$\therefore BC = k \cdot AB , \quad EC = \frac{1}{2} k \cdot AB ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ECF .$$

$$\therefore \frac{AB}{EC} = \frac{BC}{CF} ,$$

$$\therefore \frac{AB}{\frac{1}{2} k \cdot AB} = \frac{k \cdot AB}{CF} ,$$

$$\text{解得 } CF = \frac{1}{2}k^2 \cdot AB,$$

$$\therefore \frac{CF}{FA} = \frac{CF}{AC - CF} = \frac{CF}{AB - CF} = \frac{\frac{1}{2}k^2 \cdot AB}{AB - \frac{1}{2}k^2 \cdot AB} = \frac{k^2}{2 - k^2}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{k^2}{2 - k^2}.$$

【点睛】 本题考查相似三角形的判定与性质，轴对称的性质，平行线的判定与性质，等腰三角形的性质，三角形外角的定义和性质等，有一定难度，解题的关键是证明 $\triangle ABC \sim \triangle ECF$.

三、解答题：(本大题有 7 个小题，共 66 分)

17. 设一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$. 在下面的四组条件中选择其中一组 b, c 的值，使这个方程有两个不相等的实数根，并解这个方程.

① $b = 2, c = 1$; ② $b = 3, c = 1$; ③ $b = 3, c = -1$; ④ $b = 2, c = 2$.

注：如果选择多组条件分别作答，按第一个解答计分.

$$\text{【答案】选②, } x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \text{选③, } x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, x_2 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2}$$

【解析】

【分析】 先根据判别式判断一元二次方程根的情况，再利用公式法解一元二次方程即可.

【详解】 解： $x^2 + bx + c = 0$ 中 $a = 1$,

① $b = 2, c = 1$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$, 方程有两个相等的实数根;

② $b = 3, c = 1$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0$, 方程有两个不相等的实数根;

③ $b = 3, c = -1$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0$, 方程有两个不相等的实数根;

④ $b = 2, c = 2$ 时, $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$, 方程没有实数根;

因此可选择②或③.

选择② $b = 3, c = 1$ 时,

$$x^2 + 3x + 1 = 0,$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 1 = 5 > 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2};$$

选择③ $b=3, c=-1$ 时,

$$x^2 + 3x - 1 = 0,$$

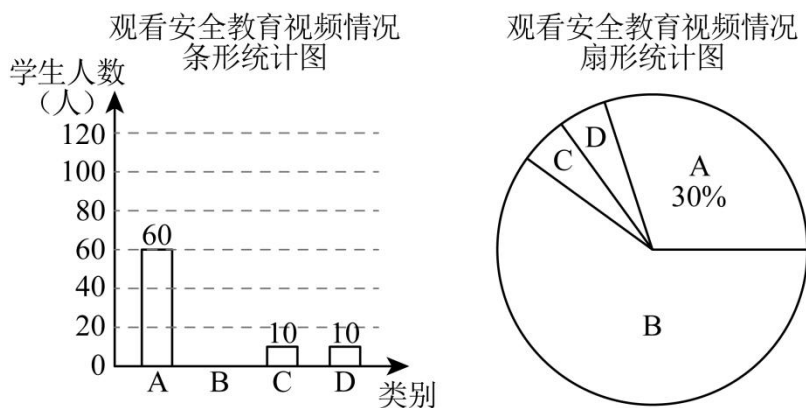
$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 13 > 0,$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2},$$

$$x_1 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2}.$$

【点睛】 本题考查根据判别式判断一元二次方程根的情况，解一元二次方程，解题的关键是掌握：对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ，当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根。

18. 某校为了了解家长和学生观看安全教育视频的情况，随机抽取本校部分学生作调查，把收集的数据按照 A, B, C, D 四类 (A 表示仅学生参与； B 表示家长和学生一起参与； C 表示仅家长参与； D 表示其他) 进行统计，得到每一类的学生人数，并把统计结果绘制成如图所示的未完成的条形统计图和扇形统计图。



- (1) 在这次抽样调查中，共调查了多少名学生？
- (2) 补全条形统计图。
- (3) 已知该校共有 1000 名学生，估计 B 类的学生人数。

【答案】 (1) 200 名

(2) 见解析 (3) 600 名

【解析】

【分析】 (1) 由 A 类别人数及其所占百分比可得总人数；

(2) 先求出 B 类学生人数为： $200 - 60 - 10 - 10 = 120$ (名)，再补画长形图即可；

(3) 用该校学生总数 1000 乘以 B 类的学生所占百分比即可求解.

【小问 1 详解】

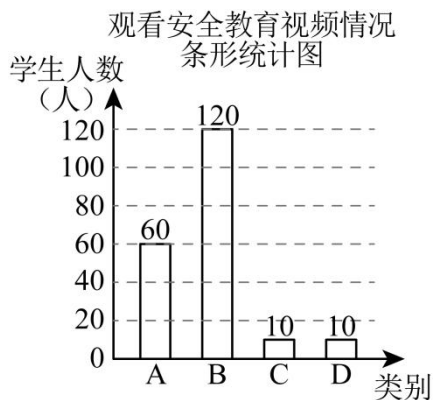
解: $60 \div 30\% = 200$ (名),

答: 这次抽样调查中, 共调查了 200 名学生;

【小问 2 详解】

解: B 类学生人数为: $200 - 60 - 10 - 10 = 120$ (名),

补全条形统计图如图所示:



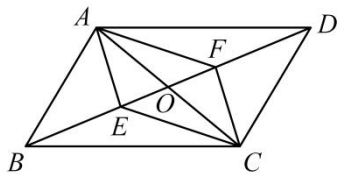
【小问 3 详解】

解: $1000 \times \frac{120}{200} \times 100\% = 600$ (名),

答: 估计 B 类的学生人数 600 名.

【点睛】 本题考查样本容量, 条形统计图, 扇形统计图, 用样本估计总体, 从条形统计图与扇形统计图获取到有用信息是解题的关键.

19. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O , 点 E, F 在对角线 BD 上, 且 $BE = EF = FD$, 连接 AE, EC, CF, FA .



(1) 求证: 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

(2) 若 $\triangle ABE$ 的面积等于 2, 求 $\triangle CFO$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) 1

【解析】

【分析】 (1) 根据平行四边形对角线互相平分可得 $OA = OC$, $OB = OD$, 结合 $BE = FD$ 可得 $OE = OF$, 即可证明四边形 $AECF$ 是平行四边形;

(2) 根据等底等高的三角形面积相等可得 $S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABE} = 2$ ，再根据平行四边形的性质可得

$$S_{\triangle CFO} = \frac{1}{2} S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

【小问 1 详解】

证明：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore OA = OC, OB = OD,$$

$$\therefore BE = FD,$$

$$\therefore OB - BE = OD - FD,$$

$$\therefore OE = OF,$$

$$\text{又} \because OA = OC,$$

∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

【小问 2 详解】

$$\text{解：} \because S_{\triangle ABE} = 2, BE = EF,$$

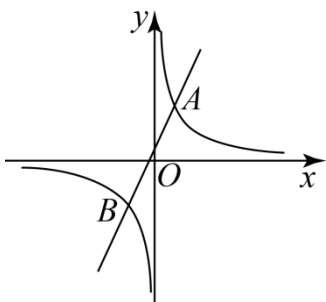
$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\triangle ABE} = 2,$$

∵ 四边形 $AECF$ 是平行四边形，

$$\therefore S_{\triangle CFO} = \frac{1}{2} S_{\triangle CEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} \times 2 = 1.$$

【点睛】 本题考查平行四边形的判定与性质，解题的关键是掌握平行四边形的对角线互相平分.

20. 在直角坐标系中，已知 $k_1 k_2 \neq 0$ ，设函数 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 与函数 $y_2 = k_2(x-2) + 5$ 的图象交于点 A 和点 B 。已知点 A 的横坐标是 2，点 B 的纵坐标是 -4。



(1) 求 k_1, k_2 的值.

(2) 过点 A 作 y 轴的垂线，过点 B 作 x 轴的垂线，在第二象限交于点 C ；过点 A 作 x 轴的垂线，过点 B 作 y 轴的垂线，在第四象限交于点 D 。求证：直线 CD 经过原点.

【答案】 (1) $k_1 = 10, k_2 = 2$

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 首先将点 A 的横坐标代入 $y_2 = k_2(x-2) + 5$ 求出点 A 的坐标，然后代入 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 求出 $k_1 = 10$ ，然后将点 B 的纵坐标代入 $y_1 = \frac{10}{x}$ 求出 $B\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ ，然后代入 $y_2 = k_2(x-2) + 5$ 即可求出 $k_2 = 2$ ；

(2) 首先根据题意画出图形，然后求出点 C 和点 D 的坐标，然后利用待定系数法求出 CD 所在直线的表达式，进而求解即可。

【小问 1 详解】

$\because$ 点 A 的横坐标是 2，

$\therefore$ 将 $x = 2$ 代入 $y_2 = k_2(x-2) + 5 = 5$

$\therefore A(2, 5)$ ，

$\therefore$ 将 $A(2, 5)$ 代入 $y_1 = \frac{k_1}{x}$ 得， $k_1 = 10$ ，

$\therefore y_1 = \frac{10}{x}$ ，

$\because$ 点 B 的纵坐标是 -4 ，

$\therefore$ 将 $y = -4$ 代入 $y_1 = \frac{10}{x}$ 得， $x = -\frac{5}{2}$ ，

$\therefore B\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ ，

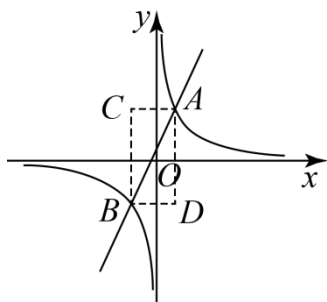
$\therefore$ 将 $B\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$ 代入 $y_2 = k_2(x-2) + 5$ 得， $-4 = k_2\left(-\frac{5}{2} - 2\right) + 5$ ，

$\therefore$ 解得 $k_2 = 2$ ，

$\therefore y_2 = 2(x-2) + 5 = 2x + 1$ ；

【小问 2 详解】

如图所示，



由题意可得, $C\left(-\frac{5}{2}, 5\right)$, $D(2, -4)$,

$\therefore$ 设 CD 所在直线的表达式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{5}{2}k + b = 5 \\ 2k + b = -4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = 0 \end{cases},$$

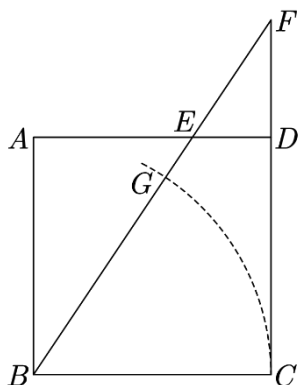
$$\therefore y = -2x,$$

$\therefore$ 当 $x = 0$ 时, $y = 0$,

$\therefore$ 直线 CD 经过原点.

【点睛】此题考查了反比例函数和一次函数综合, 待定系数法求函数表达式等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

21. 在边长为1的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 在边 AD 上 (不与点 A , D 重合), 射线 BE 与射线 CD 交于点 F .



(1) 若 $ED = \frac{1}{3}$, 求 DF 的长.

(2) 求证: $AE \cdot CF = 1$.

(3) 以点 B 为圆心, BC 长为半径画弧, 交线段 BE 于点 G . 若 $EG = ED$, 求 ED 的长.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) 见解析 (3) $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】(1) 证明 $\triangle AEB \sim \triangle DEF$, 利用相似三角形的对应边成比例求解;

(2) 证明 $\triangle AEB \sim \triangle CBF$, 利用相似三角形的对应边成比例证明;

(3) 设 $EG = ED = x$, 则 $AE = 1 - x$, $BE = 1 + x$, 在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, 利用勾股定理求解.

【小问1详解】

解: 由题知, $AB = BC = CD = DA = 1$,

若 $ED = \frac{1}{3}$, 则 $AE = AD - ED = \frac{2}{3}$.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle FDE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AEB = \angle FED,$$

$$\therefore \triangle AEB \sim \triangle DEF,$$

$$\therefore \frac{AB}{DF} = \frac{AE}{ED},$$

$$\text{即} \frac{1}{DF} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}},$$

$$\therefore DF = \frac{1}{2}.$$

【小问 2 详解】

证明: ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle A = \angle C = 90^\circ, \quad AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle F,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CFB,$$

$$\therefore \frac{AB}{CF} = \frac{AE}{BC},$$

$$\therefore AE \cdot CF = AB \cdot BC = 1 \times 1 = 1.$$

【小问 3 详解】

解: 设 $EG = ED = x$,

$$\text{则} AE = AD - ED = 1 - x, \quad BE = BG + GE = BC + GE = 1 + x.$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $AB^2 + AE^2 = BE^2$,

$$\text{即} 1^2 + (1-x)^2 = (1+x)^2,$$

$$\text{解得} x = \frac{1}{4}.$$

$$\therefore ED = \frac{1}{4}.$$

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 勾股定理的应用, 正方形的性质等, 熟练掌握相关性性质定理是解题的关键.

22. 设二次函数 $y = ax^2 + bx + 1$, ($a \neq 0$, b 是实数). 已知函数值 y 和自变量 x 的部分对应取值如下表所示:

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	m	1	n	1	p	...

- (1) 若 $m=4$ ，求二次函数的表达式；
- (2) 写出一个符合条件的 x 的取值范围，使得 y 随 x 的增大而减小.
- (3) 若在 m 、 n 、 p 这三个实数中，只有一个是正数，求 a 的取值范围.

【答案】 (1) $y=x^2-2x+1$

(2) 当 $a>0$ 时，则 $x<1$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $a<0$ 时，则 $x>1$ 时， y 随 x 的增大而减小

(3) $a \leq -\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 用待定系数法求解即可.

(2) 利用抛物线的对称性质求得抛物线的对称轴为直线 $x=1$ ；再根据抛物线的增减性求解即可.

(3) 先把 $(2,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+1$ ，得 $b=-2a$ ，从而得 $y=ax^2-2ax+1$ ，再求出 $m=3a+1$ ， $n=-a+1$ ，

$p=3a+1$ ，从而得 $m=p$ ，然后 m 、 n 、 p 这三个实数中，只有一个是正数，得 $\begin{cases} -a+1>0 \\ 3a+1\leq 0 \end{cases}$ ，求解即可.

【小问 1 详解】

解：把 $(-1,4)$ ， $(2,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+1$ ，得

$$\begin{cases} a-b+1=4 \\ 4a+2b+1=1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases},$$

$$\therefore y=x^2-2x+1.$$

【小问 2 详解】

解： $\because (0,1)$ ， $(2,1)$ 在 $y=ax^2+bx+1$ 图象上，

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x=\frac{0+2}{2}=1,$$

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，则 $x<1$ 时， y 随 x 的增大而减小，

当 $a<0$ 时，则 $x>1$ 时， y 随 x 的增大而减小.

【小问 3 详解】

解：把 $(2,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+1$ ，得

$$1 = 4a + 2b + 1,$$

$$\therefore b = -2a$$

$$\therefore y = ax^2 + bx + 1 = ax^2 - 2ax + 1$$

把 $(-1, m)$ 代入 $y = ax^2 - 2ax + 1$ 得, $m = a + 2a + 1 = 3a + 1$,

把 $(1, n)$ 代入 $y = ax^2 - 2ax + 1$ 得, $n = a - 2a + 1 = -a + 1$,

把 $(3, p)$ 代入 $y = ax^2 - 2ax + 1$ 得, $p = 9a - 6a + 1 = 3a + 1$,

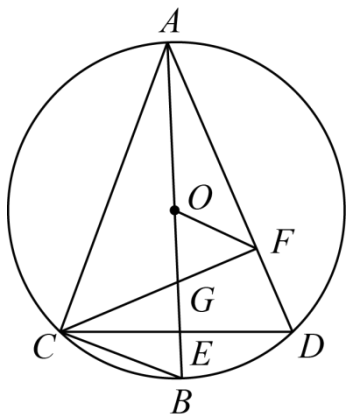
$$\therefore m = p,$$

$\therefore m, n, p$ 这三个实数中, 只有一个是正数,

$$\therefore \begin{cases} -a + 1 > 0 \\ 3a + 1 \leq 0 \end{cases}, \text{ 解得: } a \leq -\frac{1}{3}.$$

【点睛】 本题考查用待定系数法求抛物线解析式, 抛物线的图象性质, 解不等式组, 熟练掌握用待定系数法求抛物线解析式和抛物线的图象性质是解析的关键.

23. 如图, 在 $\odot O$ 中, 直径 AB 垂直弦 CD 于点 E , 连接 AC, AD, BC , 作 $CF \perp AD$ 于点 F , 交线段 OB 于点 G (不与点 O, B 重合), 连接 OF .



- (1) 若 $BE = 1$, 求 GE 的长.
- (2) 求证: $BC^2 = BG \cdot BO$.
- (3) 若 $FO = FG$, 猜想 $\angle CAD$ 的度数, 并证明你的结论.

【答案】 (1) 1 (2) 见解析

(3) $\angle CAD = 45^\circ$, 证明见解析

【解析】

【分析】 (1) 由垂径定理可得 $\angle AED = 90^\circ$, 结合 $CF \perp AD$ 可得 $\angle DAE = \angle FCD$, 根据圆周角定理可得

$\angle DAE = \angle BCD$ ，进而可得 $\angle BCD = \angle FCD$ ，通过证明 $\triangle BCE \cong \triangle GCE$ 可得 $GE = BE = 1$ ；

(2) 证明 $\triangle ACB \sim \triangle CEB$ ，根据对应边成比例可得 $BC^2 = BA \cdot BE$ ，再根据 $AB = 2BO$ ， $BE = \frac{1}{2}BG$ ，
 可证 $BC^2 = BG \cdot BO$ ；

(3) 设 $\angle DAE = \angle CAE = \alpha$ ， $\angle FOG = \angle FGO = \beta$ ，可证 $\alpha = 90^\circ - \beta$ ， $\angle OCF = 90^\circ - 3\alpha$ ，通过 SAS 证明 $\triangle COF \cong \triangle AOF$ ，进而可得 $\angle OCF = \angle OAF$ ，即 $90^\circ - 3\alpha = \alpha$ ，则 $\angle CAD = 2\alpha = 45^\circ$ 。

【小问 1 详解】

解：∵ 直径 AB 垂直弦 CD ，

$$\therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle D = 90^\circ,$$

∵ $CF \perp AD$ ，

$$\therefore \angle FCD + \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FCD,$$

由圆周角定理得 $\angle DAE = \angle BCD$ ，

$$\therefore \angle BCD = \angle FCD,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle GCE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BCE = \angle GCE \\ CE = CE \\ \angle BEC = \angle GEC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle GCE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore GE = BE = 1;$$

【小问 2 详解】

证明：∵ AB 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle CEB$ 中，

$$\begin{cases} \angle ACB = \angle CEB = 90^\circ \\ \angle ABC = \angle CBE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{BC}{BE} = \frac{BA}{BC},$$

$$\therefore BC^2 = BA \cdot BE,$$

由 (1) 知 $GE = BE$,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BG,$$

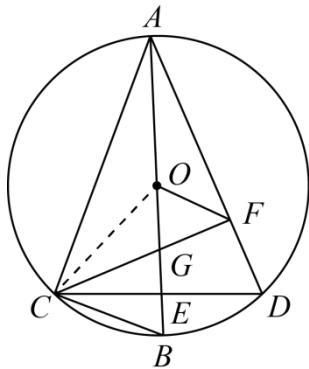
又 $\because AB = 2BO$,

$$\therefore BC^2 = BA \cdot BE = 2BO \cdot \frac{1}{2}BG = BG \cdot BO;$$

【小问 3 详解】

解: $\angle CAD = 45^\circ$, 证明如下:

如图, 连接 OC ,



$\because FO = FG$,

$\therefore \angle FOG = \angle FGO$,

$\because$ 直径 AB 垂直弦 CD ,

$\therefore CE = DE$, $\angle AED = \angle AEC = 90^\circ$,

又 $\because AE = AE$,

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle ADE$ (SAS),

$\therefore \angle DAE = \angle CAE$,

设 $\angle DAE = \angle CAE = \alpha$, $\angle FOG = \angle FGO = \beta$,

则 $\angle FCD = \angle BCD = \angle DAE = \alpha$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle OCA = \angle OAC = \alpha$,

又 $\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle OCF = \angle ACB - \angle OCA - \angle FCD - \angle BCD = 90^\circ - 3\alpha$,

$\because \angle CGE = \angle OGF = \beta$, $\angle GCE = \alpha$, $\angle CGE + \angle GCE = 90^\circ$

$\therefore \beta + \alpha = 90^\circ$,

$\therefore \alpha = 90^\circ - \beta$,

$$\therefore \angle COG = \angle OAC + \angle OCA = \alpha + \alpha = 2\alpha,$$

$$\therefore \angle COF = \angle COG + \angle GOF = 2\alpha + \beta = 2(90^\circ - \beta) + \beta = 180^\circ - \beta,$$

$$\therefore \angle COF = \angle AOF,$$

在 $\triangle COF$ 和 $\triangle AOF$ 中,

$$\begin{cases} CO = AO \\ \angle COF = \angle AOF \\ OF = OF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle COF \cong \triangle AOF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle OCF = \angle OAF,$$

$$\text{即 } 90^\circ - 3\alpha = \alpha,$$

$$\therefore \alpha = 22.5^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = 2\alpha = 45^\circ.$$

【点睛】 本题考查垂径定理，圆周角定理，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等腰三角形的性质等，难度较大，解题的关键是综合应用上述知识点，特别是第 3 问，需要大胆猜想，再逐步论证.

