

宁波市 2023 年初中学业水平考试

数学试题

考生须知：

1. 全卷分试题卷 I、试题卷 II 和答题卷。试题卷共 6 页，有三个大题，24 个小题，满分为 150 分，考试时长为 120 分钟。
2. 请将姓名、准考证号分别填写在试题卷和答题卷的规定位置上。
3. 答题时，把试题卷 I 的答案在答题卷 I 上对应的选项位置用 2B 铅笔涂黑、涂满。将试题卷 II 的答案用黑色字迹的钢笔或签字笔书写，答案必须按照题号顺序在答题卷 II 各题目规定区域内作答，做在试题卷上或超出答题卷区域书写的答案无效。
4. 不允许使用计算器，没有近似计算要求的试题，结果都不能用近似数表示。

试题卷 I

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. 在 $-2, -1, 0, \pi$ 这四个数中，最小的数是()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. π

【答案】A

【解析】

【分析】根据负数小于 0 小于正数，负数的绝对值大的反而小，进行判断即可。

【详解】解：∵ $|-2| > |-1|$,

∴ $-2 < -1 < 0 < \pi$,

∴ 最小的数是 -2 ;

故选 A.

【点睛】本题考查比较实数的大小，熟练掌握负数小于 0 小于正数，负数的绝对值大的反而小，是解题的关键。

2. 下列计算正确的是()

- A. $x^2 + x = x^3$ B. $x^6 \div x^3 = x^2$ C. $(x^3)^4 = x^7$ D. $x^3 \cdot x^4 = x^7$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法、除法，幂的乘方，合并同类项进行运算，然后判断即可。

【详解】解：A、 $x^2 + x \neq x^3$ ，错误，故不符合要求；

B、 $x^6 \div x^3 = x^3 \neq x^2$ ，错误，故不符合要求；

C、 $(x^3)^4 = x^{12} \neq x^7$ ，错误，故不符合要求；

D、 $x^3 \cdot x^4 = x^7$ ，正确，故符合要求；

故选：D.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法、除法，幂的乘方，合并同类项. 解题的关键在于正确的运算.

3. 据中国宁波网消息：2023 年一季度宁波全市实现地区生产总值 380180000000 元，同比增长 4.5%. 数 380180000000 用科学记数法表示为()

A. 0.38018×10^{12}

B. 3.8018×10^{11}

C. 3.8018×10^{10}

D. 38.018×10^{10}

【答案】B

【解析】

【分析】用科学记数法表示绝对值较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，且 n 比原来的整数位数少 1，据此判断即可.

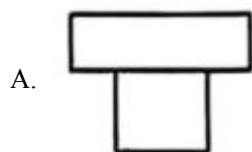
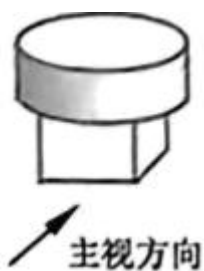
【详解】解：∵ 380180000000，共有 12 位数字，

∴ $380180000000 = 3.8018 \times 10^{11}$ ，

故选：B.

【点睛】此题主要考查用科学记数法表示绝对值较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

4. 如图所示的几何体是由一个圆柱和一个长方体组成的，它的主视图是()

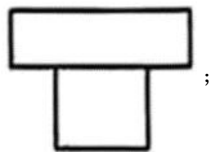


【答案】A

【解析】

【分析】根据几何体的主视图的含义可直接进行判断.

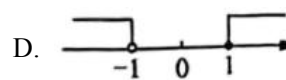
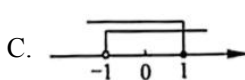
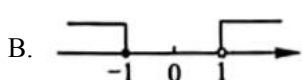
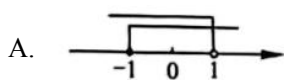
【详解】解：由题意可得：该几何体的主视图为



故选 A.

【点睛】本题主要考查几何体的三视图，熟练掌握几何体的三视图是解题的关键.

5. 不等式组 $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x-1 \leq 0 \end{cases}$ 的解在数轴上表示正确的是()



【答案】C

【解析】

【分析】根据一元一次不等式组的解法先求出不等式组的解集，再在数轴上表示即可得到答案.

【详解】解： $\begin{cases} x+1 > 0 \text{ ①} \\ x-1 \leq 0 \text{ ②} \end{cases}$,

由①得 $x > -1$;

由②得 $x \leq 1$;

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $-1 < x \leq 1$,

在数轴上表示该不等式组的解集为:

故选: C.

【点睛】本题考查一元一次不等式组解集的求法及在数轴上的表示，熟练掌握不等式组解集的求解原则“同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小无解了”是解决问题的关键.

6. 甲、乙、丙、丁四名射击运动员进行射击测试，每人 10 次射击成绩的平均数 $\bar{x}$ (单位: 环) 及方差 S^2 (单位: 环²) 如下表所示:

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	9	8	9	9

S^2	1.2	0.4	1.8	0.4
-------	-----	-----	-----	-----

根据表中数据，要从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛，应选择()

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】D

【解析】

【分析】根据 10 次射击成绩的平均数 $\bar{x}$ 可知淘汰乙；再由 10 次射击成绩的方差 S^2 可知 $1.8 > 1.2 > 0.4$ ，也就是丁的射击成绩比较稳定，从而得到答案.

【详解】解：∵ $9 > 8$,

∴ 由四人的 10 次射击成绩的平均数 $\bar{x}$ 可知淘汰乙；

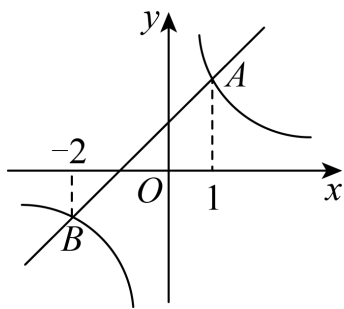
∵ $1.8 > 1.2 > 0.4$,

∴ 由四人的 10 次射击成绩的方差 S^2 可知丁的射击成绩比较稳定；

故选：D.

【点睛】本题考查通过统计数据做决策，熟记平均数与方差的定义与作用是解决问题的关键.

7. 如图，一次函数 $y_1 = k_1x + b$ ($k_1 > 0$) 的图像与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 > 0$) 的图像相交于 A , B 两点，点 A 的横坐标为 1，点 B 的横坐标为 -2，当 $y_1 < y_2$ 时， x 的取值范围是()



- A. $x < -2$ 或 $x > 1$ B. $x < -2$ 或 $0 < x < 1$
C. $-2 < x < 0$ 或 $x > 1$ D. $-2 < x < 0$ 或 $0 < x < 1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据不等式与函数图像的关系，当 $y_1 < y_2$ 时， x 的取值范围是指反比例函数在一次函数上方图像对应的 x 的取值范围，数形结合即可得到答案.

【详解】解：由图可知，一次函数 $y_1 = k_1x + b$ ($k_1 > 0$) 的图像与反比例函数 $y_2 = \frac{k_2}{x}$ ($k_2 > 0$) 的图像相交于 A , B 两点，点 A 的横坐标为 1，点 B 的横坐标为 -2，

∴ 当 $x < -2$ 或 $0 < x < 1$ 时，有反比例函数图像在一次函数图像上方，

即当 $y_1 < y_2$ 时， x 的取值范围是 $x < -2$ 或 $0 < x < 1$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查由函数图像解不等式，熟练掌握不等式与函数图像的关系是解决问题的关键.

8. 茶叶作为浙江省农业十大主导产业之一，是助力乡村振兴的民生产业. 某村有土地 60 公顷，计划将其中 10% 的土地种植蔬菜，其余的土地开辟为茶园和种植粮食，已知茶园的面积比种粮食面积的 2 倍少 3 公顷，问茶园和种粮食的面积各多少公顷？设茶园的面积为 x 公顷，种粮食的面积为 y 公顷，可列方程组为()

A. $\begin{cases} x + y = 60 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + y = 54 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + y = 54 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据某村有土地 60 公顷，计划将其中 10% 的土地种植蔬菜，得到种植茶园和种植粮食的面积为 90%，结合茶园的面积比种粮食面积的 2 倍少 3 公顷，列出方程组即可.

【详解】解：设茶园的面积为 x 公顷，种粮食的面积为 y 公顷，由题意，得： $\begin{cases} x + y = 60(1 - 10\%) \\ x = 2y - 3 \end{cases}$ ，即：

$$\begin{cases} x + y = 54 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$$

故选 B.

【点睛】本题考查根据实际问题列方程组. 找准等量关系，正确的列出方程组，是解题的关键.

9. 已知二次函数 $y = ax^2 - (3a + 1)x + 3(a \neq 0)$ ，下列说法正确的是()

A. 点 (1, 2) 在该函数的图象上

B. 当 $a = 1$ 且 $-1 \leq x \leq 3$ 时， $0 \leq y \leq 8$

C. 该函数的图象与 x 轴一定有交点

D. 当 $a > 0$ 时，该函数图象的对称轴一定在直线 $x = \frac{3}{2}$ 的左侧

【答案】C

【解析】

【分析】根据二次函数的图象和性质，逐一进行判断即可.

【详解】解：∵ $y = ax^2 - (3a + 1)x + 3(a \neq 0)$ ，

当 $x=1$ 时: $y=a-(3a+1)+3=2-2a$,

$\therefore a \neq 0$,

$\therefore 2-2a \neq 2$,

即: 点 $(1,2)$ 不在该函数的图象上, 故 A 选项错误;

当 $a=1$ 时, $y=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$,

$\therefore$ 抛物线的开口向上, 对称轴为 $x=2$,

$\therefore$ 抛物线上的点离对称轴越远, 函数值越大,

$\therefore -1 \leq x \leq 3$, $|-1-2| > |3-2| > |2-2|$,

$\therefore$ 当 $x=-1$ 时, y 有最大值为 $(-1-2)^2-1=8$,

当 $x=2$ 时, y 有最小值为 -1 ,

$\therefore -1 \leq y \leq 8$, 故 B 选项错误;

$\therefore \Delta = [-(3a+1)]^2 - 4 \times 3a = 9a^2 - 6a + 1 = (3a-1)^2 \geq 0$,

$\therefore$ 该函数的图象与 x 轴一定有交点, 故选项 C 正确;

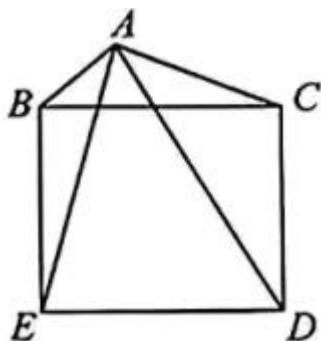
当 $a > 0$ 时, 抛物线的对称轴为: $x = \frac{3a+1}{2a} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2a} > \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 该函数图象的对称轴一定在直线 $x = \frac{3}{2}$ 的右侧, 故选项 D 错误;

故选 C.

【点睛】本题考查二次函数的图象和性质. 熟练掌握二次函数的性质, 是解题的关键.

10. 如图, 以钝角三角形 ABC 的最长边 BC 为边向外作矩形 $BCDE$, 连结 AE, AD , 设 $\triangle AED$, $\triangle ABE$, $\triangle ACD$ 的面积分别为 S, S_1, S_2 , 若要求出 $S - S_1 - S_2$ 的值, 只需知道()



A. $\triangle ABE$ 的面积

B. $\triangle ACD$ 的面积

C. $\triangle ABC$ 的面积

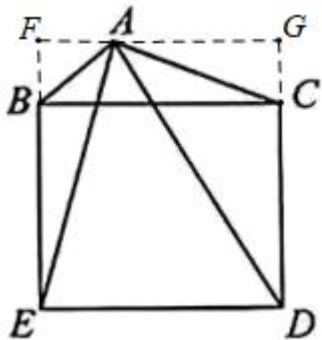
D. 矩形 $BCDE$ 的面积

【答案】C

【解析】

【分析】过点 A 作 $FG \parallel BC$ ，交 EB 的延长线于点 F ， DC 的延长线于点 G ，易得：
 $FG = BC, AF \perp BE, AG \perp CD$ ，利用矩形的性质和三角形的面积公式，可得 $S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE}$ ，再根据 $S = S_{\triangle ABC} + S_{\text{矩形}BCDE} - S_1 - S_2 = S_{\triangle ABC} + \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE}$ ，得到 $S - S_1 - S_2 = S_{\triangle ABC}$ ，即可得出结论。

【详解】解：过点 A 作 $FG \parallel BC$ ，交 EB 的延长线于点 F ， DC 的延长线于点 G ，



$\because$ 矩形 $BCDE$ ，

$\therefore BC \perp BE, BC \perp CD, BE = CD$ ，

$\therefore FG \perp BE, FG \perp CD$ ，

$\therefore$ 四边形 $BFGC$ 为矩形，

$\therefore FG = BC, AF \perp BE, AG \perp CD$ ，

$\therefore S_1 = \frac{1}{2} BE \cdot AF, S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot AG$ ，

$\therefore S_1 + S_2 = \frac{1}{2} BE (AF + AG) = \frac{1}{2} BE \cdot BC = \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE}$ ，

又 $S = S_{\triangle ABC} + S_{\text{矩形}BCDE} - S_1 - S_2 = S_{\triangle ABC} + \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE}$ ，

$\therefore S - S_1 - S_2 = S_{\triangle ABC} + \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE} - \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE} = S_{\triangle ABC}$ ，

$\therefore$ 只需要知道 $\triangle ABC$ 的面积即可求出 $S - S_1 - S_2$ 的值；

故选 C.

【点睛】本题考查矩形的性质，求三角形的面积. 解题的关键是得到 $S_1 + S_2 = \frac{1}{2} S_{\text{矩形}BCDE}$

试题卷 II

二、填空题 (每小题 5 分，共 30 分)

11. 分解因式: $x^2 - y^2 =$ _____

【答案】 $(x+y)(x-y)$

【解析】

【详解】解： $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$,

故答案为： $(x+y)(x-y)$

12. 要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义， x 的取值应满足_____.

【答案】 $x \neq 2$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件：分母不为零，从而得到 $x-2 \neq 0$ ，求解即可得到答案.

【详解】解：要使分式 $\frac{3}{x-2}$ 有意义， x 的取值应满足 $x-2 \neq 0$ ，解得 $x \neq 2$ ，

故答案为： $x \neq 2$.

【点睛】本题考查分式有意义的条件，熟记分式有意义的条件：分母不为零是解决问题的关键.

13. 一个不透明的袋子里装有 3 个绿球、3 个黑球和 6 个红球，它们除颜色外其余相同. 从袋中任意摸出一个球为绿球的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 0.25

【解析】

【分析】从袋子里任意摸一个球有 12 种等可能的结果，其中是绿球的有 3 种，根据简单概率公式代值求解即可得到答案.

【详解】解：由题意可知，从袋子里任意摸一个球有 12 种等可能的结果，其中是绿球的有 3 种，

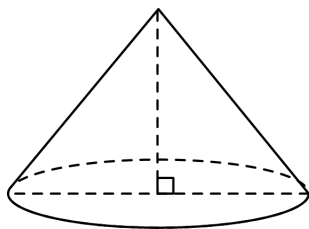
$\therefore P(\text{任意摸出一个球为绿球}) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$,

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查概率问题，弄清总的结果数及符合要求的结果数，熟记简单概率公式求解是解决问题的关键.

14. 如图，圆锥形烟囱帽的底面半径为 30cm，母线长为 50cm，则烟囱帽的侧面积为

_____ cm^2 . (结果保留 π)



【答案】 1500π

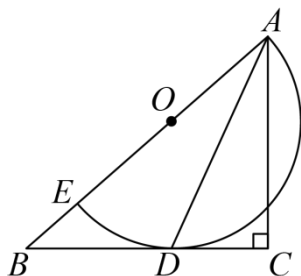
【解析】

【分析】 根据圆锥侧面展开图是一个扇形，由扇形面积公式 $S = \frac{1}{2}lr$ 代值求解即可得到答案.【详解】 解：∵圆锥形烟囱帽的底面半径为 30cm ，母线长为 50cm ，

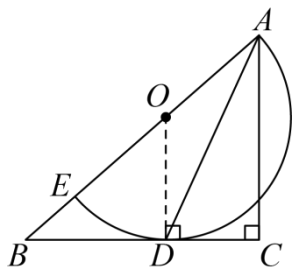
$$\therefore \text{烟囱帽的侧面积 } S = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 2\pi \times 30 \times 50 = 1500\pi \text{ (cm}^2\text{)},$$

故答案为： 1500π .【点睛】 本题考查圆锥侧面展开图及扇形面积公式 $S = \frac{1}{2}lr$ ，熟记扇形面积公式是解决问题的关键.

15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， E 为 AB 边上一点，以 AE 为直径的半圆 O 与 BC 相切于点 D ，连接 AD ， $BE = 3$ ， $BD = 3\sqrt{5}$. P 是 AB 边上的动点，当 $\triangle ADP$ 为等腰三角形时， AP 的长为_____.

【答案】 $2\sqrt{30}$ 或 6

【解析】

【分析】 连接 OD ，勾股定理求出半径，平行线分线段成比例，求出 CD 的长，勾股定理求出 AC 和 AD 的长，分 $AP = AD$ 和 $AP = PD$ 两种情况进行求解即可.【详解】 解：连接 OD ，∵以 AE 为直径的半圆 O 与 BC 相切于点 D ，∴ $OD \perp BC$ ， $OA = OE = OD$ ，∴ $\angle ODB = 90^\circ$ 设 $OA = OE = OD = r$ ，则 $OB = OE + BE = 3 + r$ ，在 $\text{Rt}\triangle ODB$ 中： $OD^2 + BD^2 = OB^2$ ，即： $r^2 + (3\sqrt{5})^2 = (3+r)^2$ ，

解得: $r = 6$,

$$\therefore OA = OE = OD = 6,$$

$$\therefore OB = 9, \quad AB = 15, \quad AE = 12,$$

$$\therefore \angle C = \angle ODB = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \frac{DB}{DC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore DB = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore BC = DB + CD = 5\sqrt{5},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 10,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 2\sqrt{30};$$

$\therefore \triangle ADP$ 为等腰三角形,

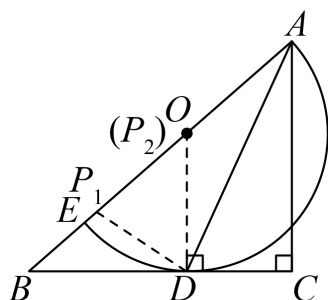
当 $AD = AP$ 时, $AP = 2\sqrt{30}$,

当 $PA = PD$ 时,

$$\therefore OA = OD.$$

$\therefore$ 点 P 与点 O 重合,

$$\therefore AP = OA = 6.$$



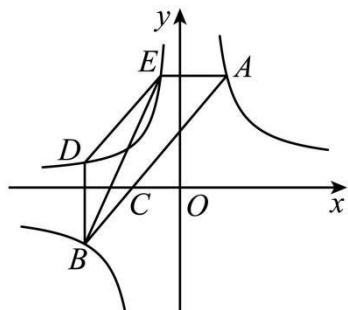
不存在 $PD = AD$ 的情况;

综上: AP 的长为 $2\sqrt{30}$ 或 6 .

故答案为: $2\sqrt{30}$ 或 6.

【点睛】本题考查切线的性质，平行线分线段成比例，勾股定理，等腰三角形的定义，熟练掌握切线的性质，等腰三角形的定义，确定点 P 的位置，是解题的关键.

16. 如图, 点 A, B 分别在函数 $y = \frac{a}{x} (a > 0)$ 图象的两支上 (A 在第一象限), 连接 AB 交 x 轴于点 C . 点 D, E 在函数 $y = \frac{b}{x} (b < 0, x < 0)$ 图象上, $AE \parallel x$ 轴, $BD \parallel y$ 轴, 连接 DE, BE . 若 $AC = 2BC$, $\triangle ABE$ 的面积为 9, 四边形 $ABDE$ 的面积为 14, 则 $a - b$ 的值为_____, a 的值为_____.



【答案】 ①. 12 ②. 9

【解析】

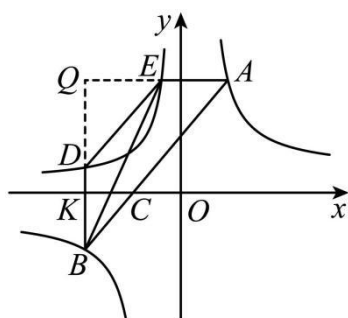
【分析】如图, 延长 BD , AE 交于点 Q , BD 与 x 轴交于点 K , 而 $AE \parallel x$ 轴, $BD \parallel y$ 轴, 可得 $\angle Q = 90^\circ$, $\triangle BDE$ 的面积是 5, 设 $A\left(m, \frac{a}{m}\right)$, $B\left(n, \frac{a}{n}\right)$, 则 $Q\left(n, \frac{a}{m}\right)$, $D\left(n, \frac{b}{n}\right)$, $E\left(\frac{bm}{a}, \frac{a}{m}\right)$, 利用面积可得 $(b-a)(bm-an) = 10na$ ①, $(n-m)(a-b) = 18n$ ②, 由 $OK \parallel AQ$, $AC = 2BC$, 可得 $QK = 2BK$, 可得 $n = -2m$ ③, 再利用方程思想解题即可.

【详解】解: 如图, 延长 BD , AE 交于点 Q , BD 与 x 轴交于点 K , 而 $AE \parallel x$ 轴, $BD \parallel y$ 轴,

$\therefore \angle Q = 90^\circ$,

$\because \triangle ABE$ 的面积为 9, 四边形 $ABDE$ 的面积为 14,

$\therefore \triangle BDE$ 的面积是 5,



设 $A\left(m, \frac{a}{m}\right)$, $B\left(n, \frac{a}{n}\right)$,

$$\begin{aligned} \therefore Q\left(n, \frac{a}{m}\right), D\left(n, \frac{b}{n}\right), E\left(\frac{bm}{a}, \frac{a}{m}\right) \\ \therefore BD = \frac{b}{n} - \frac{a}{n}, EQ = \frac{bm}{a} - n, AE = m - \frac{bm}{a}, BQ = \frac{a}{m} - \frac{a}{n}, \\ \therefore \frac{1}{2}\left(\frac{b}{n} - \frac{a}{n}\right)\left(\frac{bm}{a} - n\right) = 5, \frac{1}{2}\left(m - \frac{bm}{a}\right)\left(\frac{a}{m} - \frac{a}{n}\right) = 9, \end{aligned}$$

$$\text{整理得: } (b-a)(bm-an) = 10na \text{ ①}, (n-m)(a-b) = 18n \text{ ②},$$

$$\therefore OK \parallel AQ, AC = 2BC,$$

$$\therefore \frac{BK}{QK} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore QK = 2BK,$$

$$\therefore \frac{a}{m} = 2 \times \left(-\frac{a}{n}\right), \text{ 则 } n = -2m \text{ ③},$$

$$\text{把③代入②得: } -3m(a-b) = 18 \times (-2m),$$

$$\therefore a-b=12, \text{ 即 } b=a-12 \text{ ④},$$

$$\text{把③代入①得: } (b-a)(b+2a) = -20a \text{ ⑤},$$

$$\text{把④代入⑤得: } a=9;$$

故答案为: 12; 9

【点睛】本题考查的是反比例函数的几何应用，平行线分线段成比例的应用，坐标与图形面积，熟练的利用方程思想解题是关键.

三、解答题 (本大题有 8 小题, 共 80 分)

17. 计算:

$$(1) (1 + \sqrt[3]{8})^0 + |-2| - \sqrt{9}.$$

$$(2) (a+3)(a-3) + a(1-a).$$

【答案】(1) 0

(2) $a-9$

【解析】

【分析】(1) 根据零指数幂运算、去绝对值运算和算术平方根运算分别求解，再利用有理数加减运算求解即可得到答案;

(2) 根据平方差公式、单项式乘以多项式将原式展开，合并同类项即可得到答案.

【小问 1 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & (1+\sqrt[3]{8})^0 + |-2| - \sqrt{9} \\ & = 1 + 2 - 3 \\ & = 0; \end{aligned}$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned} \text{解: } & (a+3)(a-3) + a(1-a) \\ & = a^2 - 9 + a - a^2 \\ & = a - 9. \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查实数混合运算及整式混合运算，熟记相关运算法则是解决问题的关键.

18. 在 4×4 的方格纸中，请按下列要求画出格点三角形（顶点均在格点上）.

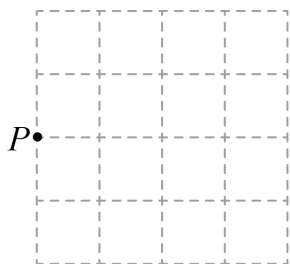


图1

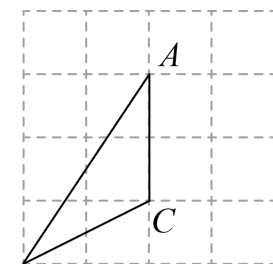


图2

(1) 在图 1 中先画出一个以格点 P 为顶点的等腰三角形 PAB ，再画出该三角形向右平移 2 个单位后的 $\triangle P'A'B'$.

(2) 将图 2 中的格点 $\triangle ABC$ 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° ，画出经旋转后的 $\triangle A'B'C$.

【答案】 (1) 画图见解析

(2) 画图见解析

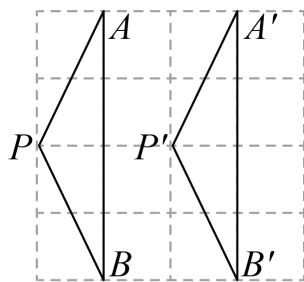
【解析】

【分析】 (1) 先画等腰三角形 PAB ， $PA = PB$ ，再确定平移后的对应点，再顺次连接即可；

(2) 确定 A ， B 旋转后的对应点，而 C 的对应点是其本身，再顺次连接即可.

【小问 1 详解】

解：如图， $\triangle PAB$ ， $\triangle P'A'B'$ 即为所求作的三角形；



【小问 2 详解】

图1

如图， $\triangle A'B'C$ 即为所求作的三角形，

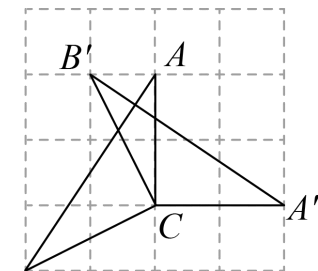
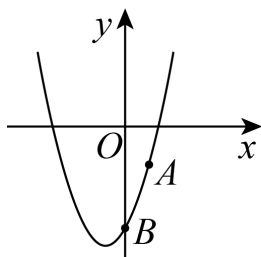


图2

【点睛】本题考查的是平移，旋转的作图，作等腰三角形，熟练的利用网格特

点以及平移旋转的性质进行作图是解本题的关键.

19. 如图，已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 图象经过点 $A(1, -2)$ 和 $B(0, -5)$.



- (1) 求该二次函数的表达式及图象的顶点坐标.
- (2) 当 $y \leq -2$ 时，请根据图象直接写出 x 的取值范围.

【答案】(1) $y = x^2 + 2x - 5$ ，顶点坐标为 $(-1, -6)$ ；

(2) $-3 \leq x \leq 1$

【解析】

【分析】(1) 把 $A(1, -2)$ 和 $B(0, -5)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$ ，建立方程组求解解析式即可，再把解析式化为顶点式，可得顶点坐标；

(2) 把 $y = -2$ 代入函数解析式求解 x 的值，再利用函数图象可得 $y \leq -2$ 时 x 的取值范围.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 图象经过点 $A(1, -2)$ 和 $B(0, -5)$.

$$\therefore \begin{cases} c = -5 \\ 1 + b + c = -2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 2 \\ c = -5 \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6,$$

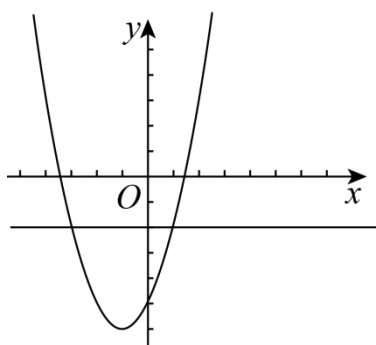
$$\therefore \text{顶点坐标为: } (-1, -6);$$

【小问 2 详解】

$$\text{当 } y = -2 \text{ 时, } (x+1)^2 - 6 = -2,$$

$$\therefore (x+1)^2 = 4$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, \quad x_2 = -3,$$



如图, 当 $y \leq -2$ 时,

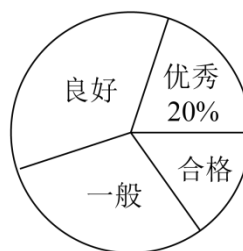
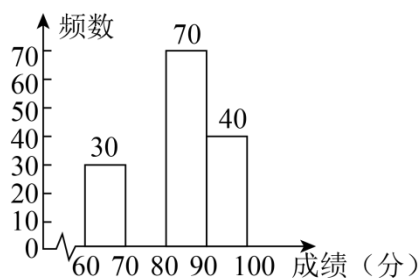
$$\therefore -3 \leq x \leq 1.$$

【点睛】本题考查的是利用待定系数法求解二次函数的解析式, 二次函数的顶点坐标, 利用图象法解不等式, 熟练的运用数形结合的方法解题是关键.

20. 宁波象山作为杭州亚运会分赛区, 积极推进各项准备工作. 某校开展了亚运知识的宣传教育活动, 为了解这次活动的效果, 从全校 1200 名学生中随机抽取部分学生进行知识测试 (测试满分为 100 分, 得分 x 均为不小于 60 的整数), 并将测试成绩分为四个等第: 合格 ($60 \leq x < 70$), 一般 ($70 \leq x < 80$), 良好 ($80 \leq x < 90$), 优秀 ($90 \leq x \leq 100$), 制作了如下统计图 (部分信息未给出)

所抽取的学生知识测试成绩的频数直方图

所抽取的学生知识测试成绩的扇形统计图



由图中给出的信息解答下列问题:

- (1) 求测试成绩为一般的学生人数，并补全频数直方图.
- (2) 求扇形统计图中“良好”所对应的扇形圆心角的度数.
- (3) 这次测试成绩的中位数是什么等第?
- (4) 如果全校学生都参加测试，请你根据抽样测试的结果，估计该校测试成绩为良好和优秀的学生共有多少人?

【答案】(1) 测试成绩为一般的学生人数为 60 人，图见解析

(2) 126°

(3) 良好 (4) 估计该校测试成绩为良好和优秀的学生共有 660 人

【解析】

【分析】(1) 利用优秀的人数除以所占的百分比求出总数，利用总数减去其他等级的人数求出测试成绩为一般的学生人数，进而补全直方图即可；

(2) $360^\circ \times$ 良好等级的人数所占的比例进行计算即可；

(3) 利用中位数的定义进行作答即可；

(4) 利用总体乘以样本中测试成绩为良好和优秀的学生所占的比例，即可得解.

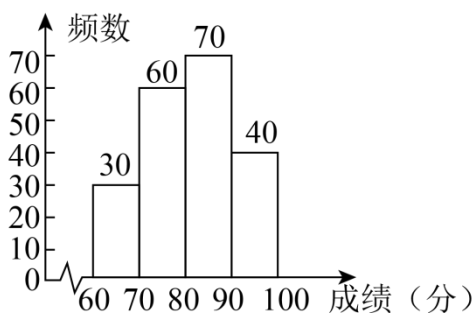
【小问 1 详解】

解： $40 \div 20\% = 200$ 人，

$\therefore$ 测试成绩为一般的学生人数为： $200 - 30 - 70 - 40 = 60$ 人；

补全直方图如图：

所抽取的学生知识测试成绩的频数直方图



【小问 2 详解】

$$360^\circ \times \frac{70}{200} = 126^\circ;$$

【小问 3 详解】

共 200 人，将成绩按照从小到大排序后，第 100 个数据和第 101 个数据均在 $80 \leq x < 90$ 的范围内，即中位数落在良好等第中；

【小问 4 详解】

$$1200 \times \frac{70 + 40}{200} = 660 \text{ (人)};$$

答：估计该校测试成绩为良好和优秀的学生共有 660 人.

【点睛】本题考查统计图，中位数，利用样本估计总体. 从统计图中有效的获取信息，熟练掌握中位数的计算方法，是解题的关键.

21. 某综合实践研究小组为了测量观察目标时的仰角和俯角，利用量角器和铅锤自制了一个简易测角仪，如图 1 所示.

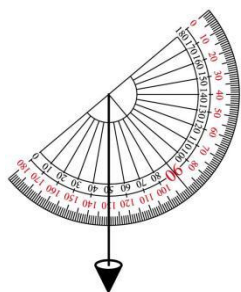


图1

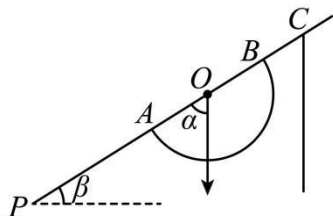


图2

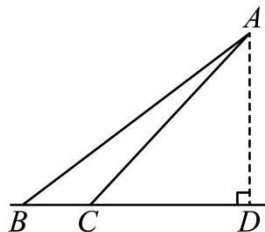


图3

(1) 如图 2，在 P 点观察所测物体最高点 C ，当量角器零刻度线上 A, B 两点均在视线 PC 上时，测得视线与铅垂线所夹的锐角为 α ，设仰角为 β ，请直接用含 α 的代数式示 β 。

(2) 如图 3，为了测量广场上空气球 A 离地面的高度，该小组利用自制简易测角仪在点 B, C 分别测得气球 A 的仰角 $\angle ABD$ 为 37° ， $\angle ACD$ 为 45° ，地面上点 B, C, D 在同一水平直线上， $BC = 20\text{m}$ ，求气球 A 离地面的高度 AD 。（参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60, \cos 37^\circ \approx 0.80, \tan 37^\circ \approx 0.75$ ）

【答案】(1) $\beta = 90^\circ - \alpha$

(2) $AD = 60\text{m}$

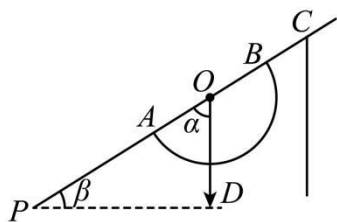
【解析】

【分析】(1) 如图所示，铅垂线与水平线相互垂直，从而利用直角三角形中两锐角互余即可得到答案；

(2) 根据题意， $AD \perp BD$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\angle ACD = 45^\circ$ ，由等腰直角三角形性质得到 $CD = AD$ ；在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中， $\angle ABD = 37^\circ$ ，由 $\tan \angle ABD = \tan 37^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{CD + 20} = \frac{AD}{AD + 20}$ ，解方程即可得到答案.

【小问 1 详解】

解：如图所示：



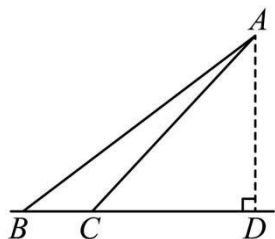
由题意知 $OD \perp PD$,

在 $\text{Rt}\triangle POD$ 中, $\angle D = 90^\circ$, 则 $\angle P + \angle POD = 90^\circ$, 即 $\alpha + \beta = 90^\circ$,

$\therefore \beta = 90^\circ - \alpha$;

【小问 2 详解】

解: 如图所示:



$\therefore AD \perp BD$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = 45^\circ$, 由等腰直角三角形性质得到 $CD = AD$,

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 37^\circ$,

$$\text{由 } \tan \angle ABD = \tan 37^\circ = \frac{AD}{BD} = \frac{AD}{CD + 20} = \frac{AD}{AD + 20},$$

$$\text{即 } 0.75 = \frac{AD}{AD + 20},$$

解得 $AD = 60\text{m}$,

$\therefore$ 气球 A 离地面的高度 $AD = 60\text{m}$.

【点睛】本题考查解直角三角形的实际应用, 涉及直角三角形性质、等腰直角三角形性质和正切函数测高等, 熟练掌握解直角三角形的方法及相关知识点是解决问题的关键.

22. 某校与部队联合开展红色之旅研学活动, 上午 7: 00, 部队官兵乘坐军车从营地出发, 同时学校师生乘坐大巴从学校出发, 沿公路 (如图 1) 到爱国主义教育基地进行研学, 上午 8: 00, 军车在离营地 60km 的地方追上大巴并继续前行, 到达仓库后, 部队官兵下车领取研学物资, 然后乘坐军车按原速前行, 最后和师生同时到达基地, 军车和大巴离营地的路程 s (km) 与所用时间 t (h) 的函数关系如图 2 所示.

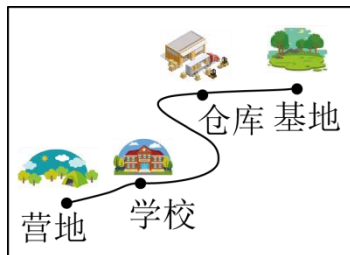


图1

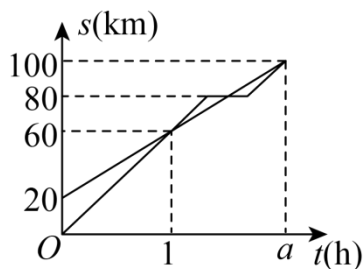


图2

(1) 求大巴离营地的路程 s 与所用时间 t 的函数表达式及 a 的值,

(2) 求部队官兵在仓库领取物资所用的时间.

【答案】(1) $s = 40t + 20$, $a = 2$

(2) $\frac{1}{3}h$

【解析】

【分析】(1) 设出函数解析式, 利用待定系数法求出函数解析式, 将 $s = 100$, 代入解析式求出 a 的值即可;

(2) 先求出军车的速度, 然后分别求出军车到达仓库, 和从仓库出发到达基地的时间, 用总时间减去两段时间即可得解.

【小问 1 详解】

解: 设大巴离营地的路程 s 与所用时间 t 的函数表达式为 $s = kt + b$, 由图象可知, 直线过点 $(0, 20)(1, 60)$,

$$\therefore \begin{cases} b = 20 \\ k + b = 60 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 20 \\ k = 40 \end{cases},$$

$$\therefore s = 40t + 20;$$

$$\text{当 } s = 100 \text{ 时: } 100 = 40t + 20, \text{ 解得: } t = 2,$$

$$\therefore a = 2;$$

【小问 2 详解】

由图象可知, 军车的速度为: $60 \div 1 = 60 \text{ km/h}$,

$$\therefore \text{军车到达仓库所用时间为: } 80 \div 60 = \frac{4}{3}h,$$

$$\text{从仓库到达基地所用时间为: } (100 - 80) \div 60 = \frac{1}{3}h,$$

$$\therefore \text{部队官兵在仓库领取物资所用的时间为 } 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}h.$$

【点睛】本题考查一次函数的实际应用. 从函数图象上有效的获取信息, 正确的求出函数解析式, 是解题的关键.

23. 定义: 有两个相邻的内角是直角, 并且有两条邻边相等的四边形称为邻等四边形, 相等两邻边的夹角称为邻等角.

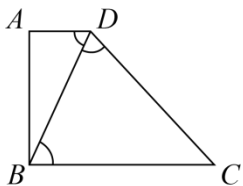


图1

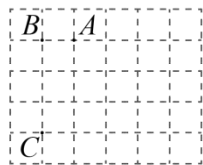


图2

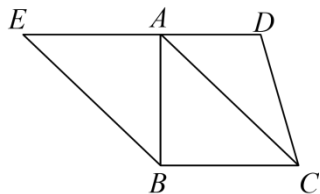


图3

(1) 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, 对角线 BD 平分 $\angle ADC$. 求证: 四边形 $ABCD$ 为邻等四边形.

(2) 如图 2, 在 6×5 的方格纸中, A, B, C 三点均在格点上, 若四边形 $ABCD$ 是邻等四边形, 请画出所有符合条件的格点 D .

(3) 如图 3, 四边形 $ABCD$ 是邻等四边形, $\angle DAB = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle BCD$ 为邻等角, 连接 AC , 过 B 作 $BE \parallel AC$ 交 DA 的延长线于点 E . 若 $AC = 8, DE = 10$, 求四边形 $EBCD$ 的周长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 画图见解析 (3) $38 - 6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\angle ABC = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$, $\angle ADB = \angle CBD$, 再证明 $CD = CB$, 即可得到结论;

(2) 根据新定义即可 $\angle B = \angle C = 90^\circ$, 再确定 $CB = CD$, $AD = CD$ 的格点 D 即可;

(3) 如图, 过 C 作 $CQ \perp AD$ 于 Q , 可得四边形 $ABCQ$ 是矩形, $AQ = BC$, $AD \parallel BC$, 证明四边形 $ACBE$ 为平行四边形, 可得 $BE = AC = 8$, $AE = BC$, 设 $BC = AE = x$, 而 $DE = 10$, $AD = 10 - x$, $DQ = x - (10 - x) = 2x - 10$, 由新定义可得 $CD = CB = x$, 由勾股定理可得: $x^2 - (2x - 10)^2 = 8^2 - x^2$, 再解方程可得答案.

【小问 1 详解】

解: $\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle A = 90^\circ$, $\angle ADB = \angle CBD$,

$\therefore$ 对角线 BD 平分 $\angle ADC$,

$\therefore \angle ADB = \angle CDB$,

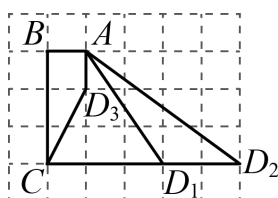
$\therefore \angle CBD = \angle CDB$,

$\therefore CD = CB$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为邻等四边形.

【小问 2 详解】

解: D_1, D_2, D_3 即为所求;



【小问 3 详解】

图2

如图, 过 C 作 $CQ \perp AD$ 于 Q ,

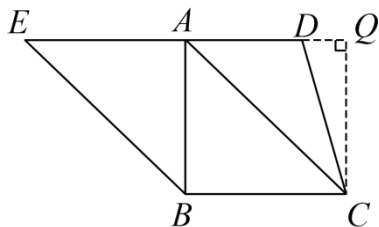


图3

$$\because \angle DAB = \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCQ$ 是矩形,

$$\therefore AQ = BC, AB = CQ, AD \parallel BC,$$

$$\because BE \parallel AC,$$

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 为平行四边形,

$$\therefore BE = AC = 8, AE = BC,$$

设 $BC = AE = x$, 而 $DE = 10$,

$$\therefore AD = 10 - x, DQ = x - (10 - x) = 2x - 10,$$

由新定义可得 $CD = CB = x$,

$$\text{由勾股定理可得: } x^2 - (2x - 10)^2 = 8^2 - x^2,$$

$$\text{整理得: } x^2 - 20x + 82 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 10 - 3\sqrt{2}, x_2 = 10 + 3\sqrt{2} > 8 \text{ (不符合题意舍去),}$$

$$\therefore CB = CD = 10 - 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } EBCD \text{ 的周长为 } 10 + 8 + 2(10 - 3\sqrt{2}) = 38 - 6\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题考查的是新定义的含义，平行线的性质，等腰三角形的判定，平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质，勾股定理的应用，一元二次方程的解法，理解题意，作出合适的辅助线是解本题的关键.

24. 如图 1, 锐角 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, D 为 BC 的中点, 连接 AD 并延长交 $\odot O$ 于点 E , 连接 BE, CE , 过 C 作 AC 的垂线交 AE 于点 F , 点 G 在 AD 上, 连接 BG, CG , 若 BC 平分 $\angle EBG$ 且 $\angle BCG = \angle AFC$.

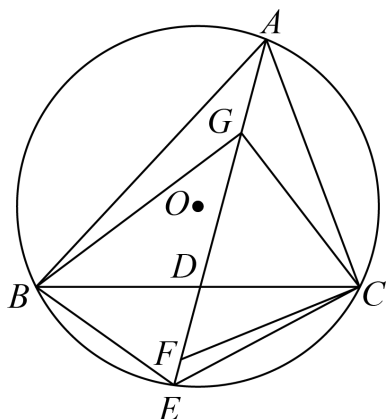


图1

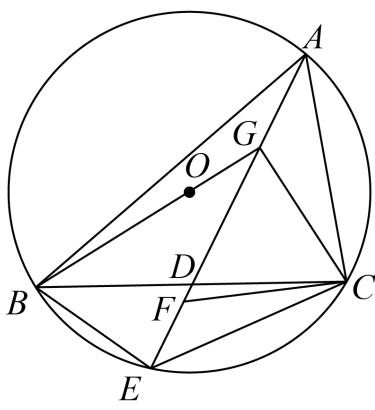


图2

- (1) 求 $\angle BGC$ 的度数.
- (2) ①求证: $AF = BC$.
- ②若 $AG = DF$, 求 $\tan \angle GBC$ 的值,
- (3) 如图 2, 当点 O 恰好在 BG 上且 $OG = 1$ 时, 求 AC 的长.

【答案】(1) 90°

(2) ①证明见解析; ② $\tan \angle GBC = \frac{\sqrt{15}}{5}$;

(3) $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 先证明 $\angle GBC = \angle EAC$, 结合 $\angle EAC + \angle AFC = 90^\circ$, $\angle BCG = \angle AFC$, 可得 $\angle GBC + \angle GCB = 90^\circ$, 从而可得答案;

(2) ①证明 $DG = DB = DC$, 再证明 $\triangle GBC \cong \triangle CAF$, 可得 $BC = AF$; ②设 $GC = CF = x$, $CD = BD = GD = a$, 证明 $\triangle GCD \sim \triangle GFC$, 可得 $GC^2 = GF \cdot GD$, 即 $CG^2 = \frac{3}{2}a^2$, 则 $BG^2 = BC^2 - CG^2 = 4a^2 - \frac{3}{2}a^2 = \frac{5}{2}a^2$, 可得 $\tan^2 \angle GBC = \frac{GC^2}{GB^2} = \frac{3}{5}$, 从而可得答案;

(3) 如图, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 连接 OC 交 AE 于 N , 过 O 作 $OM \perp BE$ 于 M , 证明 $OC \parallel BE$, $\triangle EBD \cong \triangle NCD$, 可得 $BE = CN$, 证明 $\triangle COG \cong \triangle OBM$, 可得 $BM = OG = 1$, $CN = BE = 2BM = 2$, 证明 $\triangle GON \sim \triangle GBE$, $\frac{GO}{GB} = \frac{ON}{BE}$, 即 $\frac{1}{r+1} = \frac{r-2}{2}$, 再解方程可得答案.

【小问 1 详解】

证明: $\because BC$ 平分 $\angle EBG$,

$\therefore \angle GBC = \angle EBC$,

$\because \angle EBC = \angle EAC$,

$$\therefore \angle GBC = \angle EAC,$$

$$\because \angle ACF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BCG = \angle AFC,$$

$$\therefore \angle GBC + \angle GCB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGC = 90^\circ;$$

【小问 2 详解】

$$\textcircled{1} \because D \text{ 为 } BC \text{ 中点, } \angle BGC = 90^\circ,$$

$$\therefore DG = DB = DC,$$

$$\therefore \angle DGC = \angle BCG,$$

$$\because \angle BCG = \angle AFC,$$

$$\therefore \angle AFC = \angle DGC,$$

$$\therefore CF = CG,$$

$$\because \angle BGC = \angle ACF = 90^\circ, \quad \angle CBG = \angle FAC,$$

$$\therefore \triangle GBC \cong \triangle CAF,$$

$$\therefore BC = AF;$$

$$\textcircled{2} \text{ 设 } GC = CF = x, \quad CD = BD = GD = a,$$

$$\therefore BC = AF = 2a, \quad AG = DF = \frac{1}{2}a,$$

$$\because \angle AFC = \angle BCG, \quad \angle CGD = \angle CGF,$$

$$\therefore \triangle GCD \sim \triangle GFC,$$

$$\therefore \frac{GC}{GF} = \frac{GD}{GC}, \quad \text{即 } GC^2 = GF \cdot GD,$$

$$\therefore x^2 = \left(a + \frac{1}{2}a\right) \cdot a = \frac{3}{2}a^2, \quad \text{即 } CG^2 = \frac{3}{2}a^2,$$

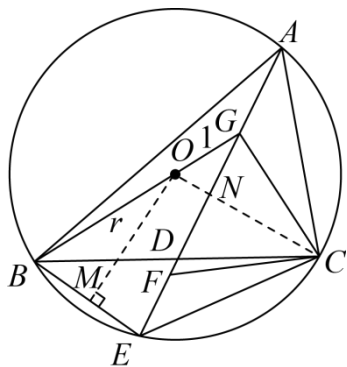
$$\therefore BG^2 = BC^2 - CG^2 = 4a^2 - \frac{3}{2}a^2 = \frac{5}{2}a^2,$$

$$\therefore \tan^2 \angle GBC = \frac{GC^2}{GB^2} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore \tan \angle GBC = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad (\text{负根舍去});$$

【小问 3 详解】

如图, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 连接 OC 交 AE 于 N , 过 O 作 $OM \perp BE$ 于 M ,



$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\therefore OC \parallel BE,$$

$$\because BD = CD, \quad \angle BDE = \angle CDN,$$

$$\therefore \triangle EBD \cong \triangle NCD,$$

$$\therefore BE = CN,$$

$$\therefore OC \parallel BE,$$

$\therefore \angle GOC = \angle OBM$, 而 $\angle OGC = \angle OMB = 90^\circ$, $OC = OB$,

$$\therefore \Delta COG \cong_{\Delta} OBM,$$

$$\therefore BM = OG = 1,$$

$$\therefore OM \perp BE,$$

$$\therefore CN = BE = 2BM = 2,$$

$$\therefore OC \parallel BE,$$

$$\therefore \triangle GON \sim \triangle GBE,$$

$$\therefore \frac{GO}{GB} = \frac{ON}{BE}, \text{ 即 } \frac{1}{r+1} = \frac{r-2}{2},$$

解得: $r_1 = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, (负根舍去),

$$\therefore AC = BG = r + 1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}.$$

【点睛】本题考查的是全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，圆的基本性质，圆周角定理的应用，垂径定理的应用，求解锐角的正切，本题的难度大，作出合适的辅助线是解本题的关键.

