

数学

卷 I (选择题)

一、选择题 (本题有 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分, 请选出各题中唯一的正确选项, 不选、多选, 错选, 均不得分)

1. -8 的立方根是 ()

- A. ± 2 B. 2 C. -2 D. 不存在

【答案】C

【解析】

【分析】根据立方根的定义进行解答.

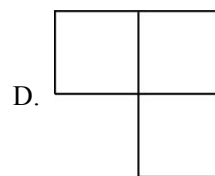
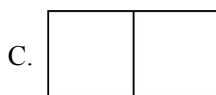
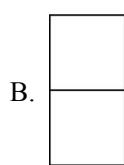
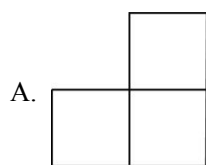
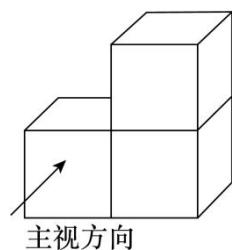
【详解】 $\because (-2)^3 = -8$,

$\therefore -8$ 的立方根是 -2 ,

故选 C.

【点睛】本题主要考查了立方根, 解决本题的关键是数积立方根的定义.

2. 如图的几何体由 3 个同样大小的正方体搭成, 它的俯视图是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】找到从上面所看到的图形即可.

【详解】解: 从上面看从下往上数, 左边有 1 个正方形, 右边有 1 个正方形,

$\therefore$ 俯视图是:



故选: C.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图, 解题的关键是掌握三视图.

3. 在下面的调查中, 最适合用全面调查的是 ()

- A. 了解一批节能灯管的使用寿命
B. 了解某校 803 班学生的视力情况
C. 了解某省初中生每周上网时长情况
D. 了解京杭大运河中鱼的种类

【答案】B

【解析】

【分析】根据全面调查与抽样调查的特点对四个选项进行判断.

【详解】A、了解一批节能灯管的使用寿命，具有破坏性，适合采用抽样调查，不符合题意；

B、了解某校 803 班学生的视力情况，适合采用普查，符合题意；

C、了解某省初中生每周上网时长情况，适合采用抽样调查，不合题意；

D、了解京杭大运河中鱼的种类，适合采用抽样调查，不合题意.

故选：B.

【点睛】本题考查了全面调查与抽样调查：如何选择调查方法要根据具体情况而定. 一般来讲：通过普查可以直接得到较为全面、可靠的信息，但花费的时间较长，耗费大，且一些调查项目并不适合普查. 其二，调查过程带有破坏性. 如：调查一批灯泡的使用寿命就只能采取抽样调查，而不能将整批灯泡全部用于实验. 其三，有些被调查的对象无法进行普查.

4. 美术老师写的下列四个字中，为轴对称图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形的定义进行判断即可.

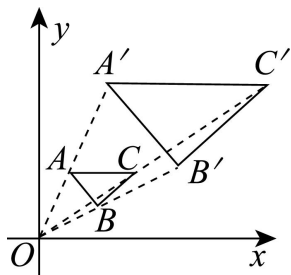
【详解】A、B、C 选项中的图形都不能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，所以不是轴对称图形；

D 选项的图形能找到这样的一条直线，使图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，所以是轴对称图形；

故选：D.

【点睛】本题考查轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

5. 如图，在直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(1,2)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$ ，现以原点 O 为位似中心，在第一象限内作与 $\triangle ABC$ 的位似比为 2 的位似图形 $\triangle A'B'C'$ ，则顶点 C' 的坐标是（ ）



- A. (2,4) B. (4,2) C. (6,4) D. (5,4)

【答案】C

【解析】

【分析】直接根据位似图形的性质即可得.

【详解】解: $\because \triangle ABC$ 的位似比为 2 的位似图形是 $\triangle A'B'C'$, 且 $C(3,2)$,

$\therefore C'(2 \times 3, 2 \times 2)$, 即 $C'(6,4)$,

故选: C.

【点睛】本题考查了坐标与位似图形, 熟练掌握位似图形的性质是解题关键.

6. 下面四个数中, 比 1 小的正无理数是 ()

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\pi}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据正数 $> 0 >$ 负数, 即可进行解答.

【详解】解: $\because 4 < 6 < 9$

$\therefore 2 < \sqrt{6} < 3$

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{6}}{3} < 1 < \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ 比 1 小的正无理数是 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

故选: A.

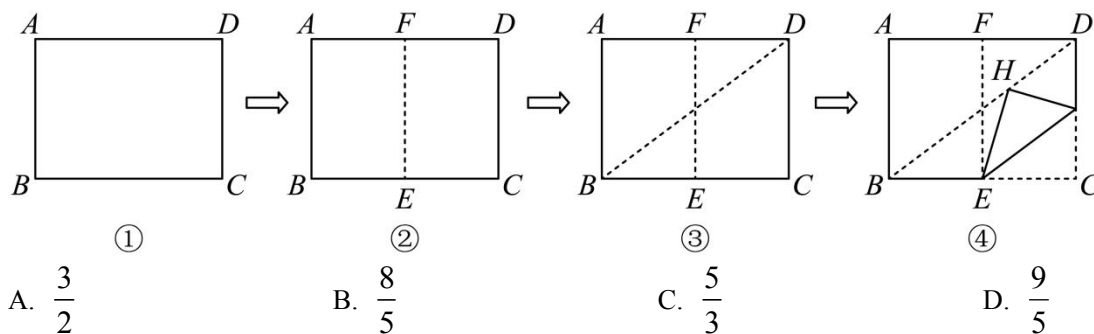
【点睛】本题主要考查了比较实数大小, 无理数的估算, 解题的关键是掌握正数 $> 0 >$ 负数.

7. 如图, 已知矩形纸片 $ABCD$, 其中 $AB = 3$, $BC = 4$, 现将纸片进行如下操作:

第一步, 如图①将纸片对折, 使 AB 与 DC 重合, 折痕为 EF , 展开后如图②;

第二步, 再将图②中的纸片沿对角线 BD 折叠, 展开后如图③;

第三步，将图③中的纸片沿过点 E 的直线折叠，使点 C 落在对角线 BD 上的点 H 处，如图④。则 DH 的长为（ ）

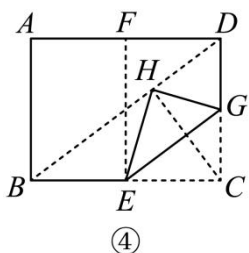


【答案】D

【解析】

【分析】根据折叠的性质得出 $EB = EH = EC$ ， $CH \perp BD$ ，等面积法求得 CH ，根据 $\tan \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{CH}{HD}$ ，即可求解。

【详解】解：如图所示，连接 CH ，



$\because$ 折叠，

$$\therefore EB = EH = EC$$

$\therefore B, C, H$ 在以 E 为圆心， BC 为直径的圆上，

$$\therefore \angle BHC = 90^\circ,$$

$$\therefore CH \perp BD$$

$\because$ 矩形 $ABCD$ ，其中 $AB = 3$ ， $BC = 4$ ，

$$\therefore BC = 4, CD = 3$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = 5,$$

$$\therefore CH = \frac{BC \times CD}{BD} = \frac{12}{5},$$

$$\therefore \tan \angle BDC = \frac{BC}{CD} = \frac{CH}{HD}$$

$$\therefore HD = \frac{9}{5},$$

故选：D。

【点睛】本题考查了矩形与折叠问题，直径所对的圆周角是直角，勾股定理，正切的定义，熟练掌握以上

知识是解题的关键.

8. 已知点 $A(-2, y_1)$, $B(-1, y_2)$, $C(1, y_3)$ 均在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_2 < y_1 < y_3$ C. $y_3 < y_1 < y_2$ D. $y_3 < y_2 < y_1$

【答案】B

【解析】

【分析】根据反比例函数的图象与性质解答即可.

【详解】解: $\because k = 3 > 0$,

$\therefore$ 图象在一三象限, 且在每个象限内 y 随 x 的增大而减小,

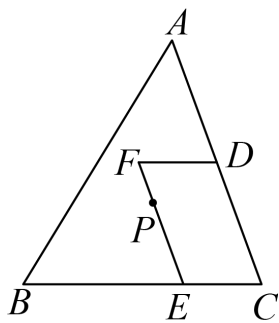
$\because -2 < -1 < 0 < 1$,

$\therefore y_2 < y_1 < 0 < y_3$.

故选: B.

【点睛】本题考查了反比例函数的图象与性质, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 是常数, $k \neq 0$) 的图象是双曲线, 当 $k > 0$, 反比例函数图象的两个分支在第一、三象限, 在每一象限内, y 随 x 的增大而减小; 当 $k < 0$, 反比例函数图象的两个分支在第二、四象限, 在每一象限内, y 随 x 的增大而增大.

9. 如图, 点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D 是边 AC 的中点, $PE \parallel AC$ 交 BC 于点 E , $DF \parallel BC$ 交 EP 于点 F , 若四边形 $CDFE$ 的面积为 6, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 ()



- A. 12 B. 14 C. 18 D. 24

【答案】C

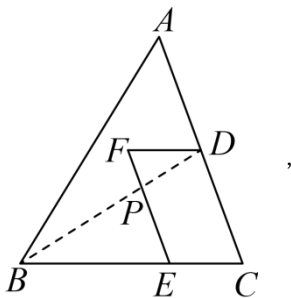
【解析】

【分析】连接 BD , 由点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心, 点 D 是边 AC 的中点, 可得点 B, P, D 在一条直线上, 且

$BP:PD = 2:1$, $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 通过 $\triangle BEP \sim \triangle BCD$ 可得 $S_{\triangle BEP} = \frac{4}{9}S_{\triangle BCD}$, 从而得到

$S_{\text{四边形}CEPD} = \frac{5}{9}S_{\triangle BCD}$ ，通过 $\triangle BEP \sim \triangle DFP$ ，可得 $S_{\triangle DFP} = \frac{1}{4}S_{\triangle BEP} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{9}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{9}S_{\triangle BCD}$ ，再根据四边形 $CDFE$ 的面积为 6，可得出 $S_{\triangle BCD}$ ，进而可得出 $\triangle ABC$ 的面积。

【详解】解：如图所示，连接 BD ，



$\because$ 点 P 是 $\triangle ABC$ 的重心，点 D 是边 AC 的中点，

$\therefore$ 点 B 、 P 、 D 在一条直线上，且 $BP:PD = 2:1$ ， $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$ ，

$\because PE \parallel AC$ ，

$\therefore \triangle BEP \sim \triangle BCD$ ，

$\because BP:PD = 2:1$ ，

$\therefore BP:BD = 2:3$ ，

$\therefore S_{\triangle BEP}:S_{\triangle BCD} = 4:9$ ，

$\therefore S_{\triangle BEP} = \frac{4}{9}S_{\triangle BCD}$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}CEPD} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BEP} = \frac{5}{9}S_{\triangle BCD}$ ，

$\because DF \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle BEP \sim \triangle DFP$ ，

$\because BP:PD = 2:1$ ，

$\therefore S_{\triangle BEP}:S_{\triangle DFP} = 4$ ，

$\therefore S_{\triangle DFP} = \frac{1}{4}S_{\triangle BEP} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{9}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{9}S_{\triangle BCD}$ ，

$\therefore S_{\text{四边形}CDFE} = S_{\text{四边形}CEPD} + S_{\triangle DFP} = \frac{5}{9}S_{\triangle BCD} + \frac{1}{9}S_{\triangle BCD} = \frac{6}{9}S_{\triangle BCD} = 6$ ，

$\therefore S_{\triangle BCD} = 9$ ，

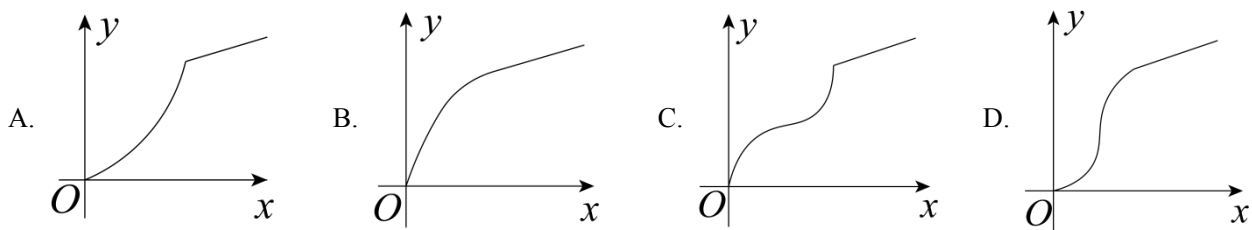
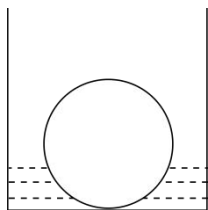
$\therefore S_{\triangle ABC} = 18$ ，

故选：C。

【点睛】本题主要考查了三角形的重心的性质，相似三角形的判定与性质，根据三角形的中线求面积，熟

练掌握三角形的重心的性质，相似三角形的判定与性质，添加适当的辅助线，是解题的关键.

10. 下图是底部放有一个实心铁球的长方体水槽轴截面示意图，现向水槽匀速注水，下列图象中能大致反映水槽中水的深度 (y) 与注水时间 (x) 关系的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据蓄水池的横断面示意图，可知水的深度增长的速度由慢到快，然后再由快到慢，最后不变，进而求解即可.

【详解】解：由蓄水池的横断面示意图可得，

水的深度增长的速度由慢到快，然后再由快到慢，最后不变，

故选：D.

【点睛】主要考查了函数图象的读图能力和函数与实际问题结合的应用. 要能根据函数图象的性质和图象上的数据分析得出函数的类型和所需要的条件，结合实际意义得到正确的结论.

卷 II (非选择题)

二、填空题 (本题有 6 小题，每小题 4 分，共 24 分)

11. $|-2023| =$ _____.

【答案】2023

【解析】

【分析】负数的绝对值是它的相反数，由此可解.

【详解】解： -2023 的相反数是 2023 ，故 $|-2023| = 2023$ ，

故答案为：2023.

【点睛】本题考查求一个数的绝对值，解题的关键是掌握负数的绝对值是它的相反数.

12. 一个多项式，把它因式分解后有一个因式为 $(x+1)$ ，请你写出一个符合条件的多项式：_____.

【答案】 $x^2 - 1$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据平方差公式或完全平方公式等知识解答即可.

【详解】 解: $\because x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, 因式分解后有一个因式为 $(x+1)$,

$\therefore$ 这个多项式可以是 $x^2 - 1$ (答案不唯一);

故答案为: $x^2 - 1$ (答案不唯一).

【点睛】 本题考查了多项式的因式分解, 熟练掌握分解因式的方法是解此题的关键.

13. 现有三张正面印有 2023 年杭州亚运会吉祥物琮琚、宸宸和莲莲的不透明卡片, 卡片除正面图案不同外, 其余均相同, 将三张卡片正面向下洗匀, 从中随机抽取一张卡片, 则抽出的卡片图案是琮琚的概率是

_____.



琮琚



宸宸



莲莲

【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】

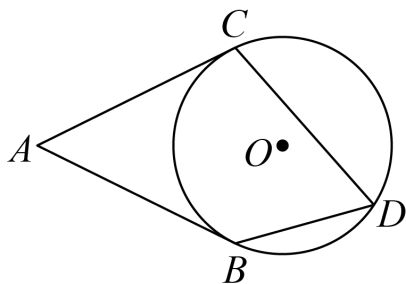
【分析】 根据概率公式即可求解.

【详解】 解: 将三张卡片正面向下洗匀, 从中随机抽取一张卡片, 则抽出的卡片图案是琮琚的概率是 $\frac{1}{3}$

故答案为: $\frac{1}{3}$.

【点睛】 本题考查了概率公式求概率, 熟练掌握概率公式是解题的关键.

14. 如图, 点 A 是 $\odot O$ 外一点, AB , AC 分别与 $\odot O$ 相切于点 B, C, 点 D 在 $\widehat{BDC}$ 上, 已知 $\angle A = 50^\circ$, 则 $\angle D$ 的度数是_____.

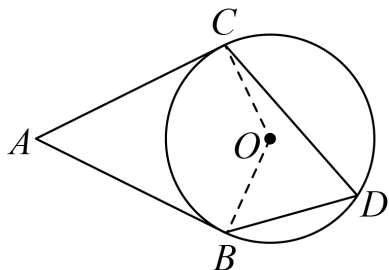


【答案】 65° ## 65 度

【解析】

【分析】连接 CO, BO ，根据切线的性质得出 $\angle ACO = \angle ABO = 90^\circ$ ，根据四边形内角和得出 $\angle COB = 130^\circ$ ，根据圆周角定理即可求解.

【详解】解：如图 CO, BO ,



$\because AB, AC$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 B, C ,

$\therefore \angle ACO = \angle ABO = 90^\circ$,

$\because \angle A = 50^\circ$,

$\therefore \angle COB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ = 130^\circ$,

$\because \widehat{BC} = \widehat{BC}$,

$\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle BOC = 65^\circ$,

故答案为: 65° .

【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，求得 $\angle COB = 130^\circ$ 是解题的关键.

15. 我国古代数学名著《张丘建算经》中有这样一题：一只公鸡值 5 钱，一只母鸡值 3 钱，3 只小鸡值 1 钱，现花 100 钱买了 100 只鸡. 若公鸡有 8 只，设母鸡有 x 只，小鸡有 y 只，可列方程组为_____.

【答案】
$$\begin{cases} 5 \times 8 + 3x + \frac{1}{3}y = 100 \\ x + y + 8 = 100 \end{cases}$$

【解析】

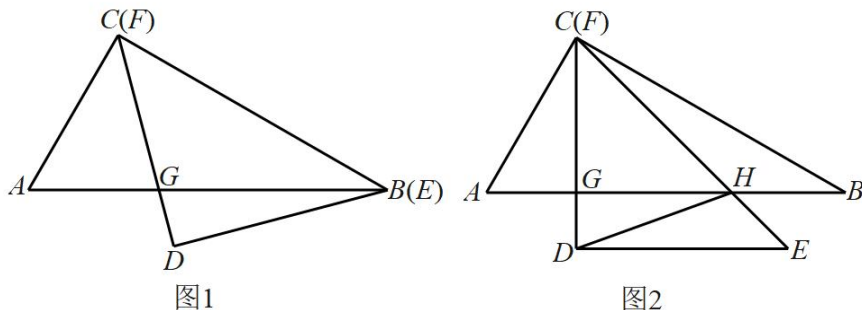
【分析】根据“现花 100 钱买了 100 只鸡”，列出方程组即可.

【详解】解：依题意得：
$$\begin{cases} 5 \times 8 + 3x + \frac{1}{3}y = 100 \\ x + y + 8 = 100 \end{cases},$$

故答案为：
$$\begin{cases} 5 \times 8 + 3x + \frac{1}{3}y = 100 \\ x + y + 8 = 100 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查了二元一次方程组的应用. 明确题意，准确列出方程组是解题的关键.

16. 一副三角板 ABC 和 DEF 中, $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle E = 45^\circ$, $BC = EF = 12$. 将它们叠合在一起, 边 BC 与 EF 重合, CD 与 AB 相交于点 G (如图 1), 此时线段 CG 的长是_____, 现将 $\triangle DEF$ 绕点 $C(F)$ 按顺时针方向旋转 (如图 2), 边 EF 与 AB 相交于点 H , 连结 DH , 在旋转 0° 到 60° 的过程中, 线段 DH 扫过的面积是_____.

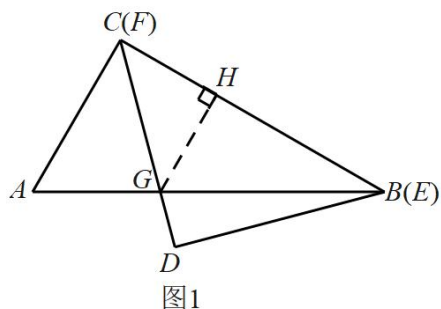


【答案】 ①. $6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$ ②. $12\pi - 18\sqrt{3} + 18$

【解析】

【分析】如图 1, 过点 G 作 $GH \perp BC$ 于 H , 根据含 30° 直角三角形的性质和等腰直角三角形的性质得出 $BH = \sqrt{3}GH$, $GH = CH$, 然后由 $BC = 12$ 可求出 GH 的长, 进而可得线段 CG 的长; 如图 2, 将 $\triangle DEF$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle D_1E_1F$, FE_1 与 AB 交于 G_1 , 连接 D_1D , AD_1 , $\triangle D_2E_2F$ 是 $\triangle DEF$ 旋转 0° 到 60° 的过程中任意位置, 作 $DN \perp CD_1$ 于 N , 过点 B 作 $BM \perp D_1D$ 交 D_1D 的延长线于 M , 首先证明 $\triangle CDD_1$ 是等边三角形, 点 D_1 在直线 AB 上, 然后可得线段 DH 扫过的面积是弓形 D_1D_2D 的面积加上 $\triangle D_1DB$ 的面积, 求出 DN 和 BM , 然后根据线段 DH 扫过的面积 $= S_{\text{弓形}D_1D_2D} + S_{\triangle D_1DB} = S_{\text{扇形}CD_1D} - S_{\triangle CD_1D} + S_{\triangle D_1DB}$ 列式计算即可.

【详解】解: 如图 1, 过点 G 作 $GH \perp BC$ 于 H ,



$$\therefore \angle ABC = 30^\circ, \angle DEF = \angle DFE = 45^\circ, \angle GHB = \angle GHC = 90^\circ,$$

$$\therefore BH = \sqrt{3}GH, GH = CH,$$

$$\therefore BC = BH + CH = \sqrt{3}GH + GH = 12,$$

$$\therefore GH = 6\sqrt{3} - 6,$$

$$\therefore CG = \sqrt{2}GH = \sqrt{2} \times (6\sqrt{3} - 6) = 6\sqrt{6} - 6\sqrt{2};$$

如图 2, 将 $\triangle DEF$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 得到 $\triangle D_1E_1F$, FE_1 与 AB 交于 G_1 , 连接 D_1D ,

由旋转的性质得: $\angle E_1CB = \angle DCD_1 = 60^\circ$, $CD = CD_1$,

$\therefore \triangle CDD_1$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CG_1B = 90^\circ,$$

$$\therefore CG_1 = \frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore CE_1 = BC,$$

$$\therefore CG_1 = \frac{1}{2}CE_1, \text{ 即 } AB \text{ 垂直平分 } CE_1,$$

$\therefore \triangle CD_1E_1$ 是等腰直角三角形,

$\therefore$ 点 D_1 在直线 AB 上,

连接 AD_1 , $\triangle D_2E_2F$ 是 $\triangle DEF$ 旋转 0° 到 60° 的过程中任意位置,

则线段 DH 扫过的面积是弓形 D_1D_2D 的面积加上 $\triangle D_1DB$ 的面积,

$$\therefore \angle BCF = EF = 12^\circ,$$

$$\therefore DC = DB = \frac{\sqrt{2}}{2}BC = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore D_1C = D_1D = 6\sqrt{2},$$

作 $DN \perp CD_1$ 于 N , 则 $ND_1 = NC = 3\sqrt{2}$,

$$\therefore DN = \sqrt{D_1D^2 - ND_1^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{6},$$

过点 B 作 $BM \perp D_1D$ 交 D_1D 的延长线于 M , 则 $\angle M = 90^\circ$,

$$\therefore \angle D_1DC = 60^\circ, \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDM = 180^\circ - \angle D_1DC - \angle CDB = 30^\circ,$$

$$\therefore BM = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{线段 } DH \text{ 扫过的面积} = S_{\text{弓形 } D_1D_2D} + S_{\triangle D_1DB},$$

$$= S_{\text{扇形 } CD_1D} - S_{\triangle CD_1D} + S_{\triangle D_1DB},$$

$$= \frac{60\pi \cdot (6\sqrt{2})^2}{360} - \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} + \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{2},$$

$$= 12\pi - 18\sqrt{3} + 18,$$

故答案为： $6\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$ ， $12\pi - 18\sqrt{3} + 18$ 。

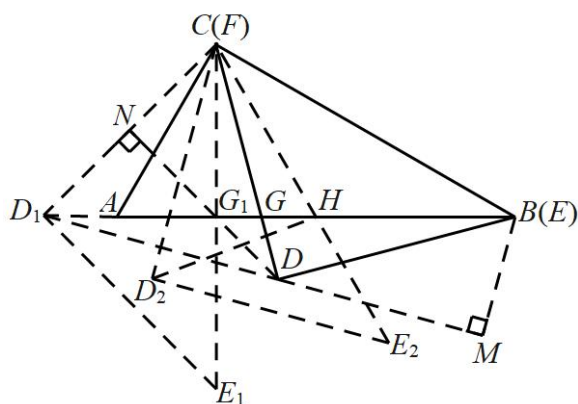


图2

【点睛】本题主要考查了旋转的性质，含 30° 直角三角形

的性质，二次根式的运算，解直角三角形，等边三角形的判定和性质，勾股定理，扇形的面积计算等知识，作出图形，证明点 D_1 在直线 AB 上是本题的突破点，灵活运用各知识点是解题的关键。

三、解答题 (本题有 8 小题，第 17~19 题每题 6 分，第 20、21 题每题 8 分，第 22、23 题每题 10 分，第 24 题 12 分，共 66 分)

17. (1) 解不等式： $2x - 3 > x + 1$ 。

(2) 已知 $a^2 + 3ab = 5$ ，求 $(a+b)(a+2b) - 2b^2$ 的值。

【答案】(1) $x > 4$ ；(2) 5

【解析】

【分析】(1) 不等式移项合并，把 x 系数化为 1 求解即可；

(2) 先将 $(a+b)(a+2b) - 2b^2$ 展开化简，然后将 $a^2 + 3ab = 5$ 整体代入求解即可。

【详解】(1) 解：移项，得 $2x - x > 1 + 3$ ，

解得， $x > 4$ ；

(2) 解： $\because a^2 + 3ab = 5$,

$$\text{原式} = a^2 + 2ab + ab + 2b^2 - 2b^2,$$

$$= a^2 + 3ab,$$

$$= 5.$$

【点睛】此题考查了解一元一次不等式，整式的混合运算以及代数求值，解题的关键是熟练掌握以上运算法则.

18. 小丁和小迪分别解方程 $\frac{x}{x-2} - \frac{x-3}{2-x} = 1$ 过程如下：

小丁：	小迪：
解：去分母，得 $x - (x-3) = x-2$	解：去分母，得 $x + (x-3) = 1$
去括号，得 $x - x + 3 = x-2$	去括号得 $x + x - 3 = 1$
合并同类项，得 $3 = x-2$	合并同类项得 $2x - 3 = 1$
解得 $x = 5$	解得 $x = 2$
$\therefore$ 原方程的解是 $x = 5$	经检验， $x = 2$ 是方程的增根，原方程无解

你认为小丁和小迪的解法是否正确？若正确，请在框内打“√”；若错误，请在框内打“×”，并写出你的解答过程.

【答案】见解析

【解析】

【分析】根据解分式方程的步骤判断小丁和小迪的解法是否正确，再正确解方程即可.

【详解】小丁和小迪的解法错误；

$$\text{解：去分母，得 } x + (x-3) = x-2,$$

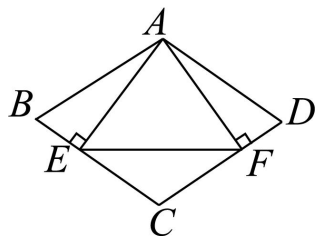
$$\text{去括号，得 } 2x-3 = x-2,$$

$$\text{解得， } x = 1,$$

经检验： $x = 1$ 是方程的解.

【点睛】本题考查分式方程的解法，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

19. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $AE \perp BC$ 于点 E ， $AF \perp CD$ 于点 F ，连接 EF



- (1) 求证: $AE = AF$;
 (2) 若 $\angle B = 60^\circ$, 求 $\angle AEF$ 的度数.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 60°

【解析】

【分析】(1) 根据菱形的性质的三角形全等即可证明 $AE = AF$.

(2) 根据菱形的性质和已知条件可推出 $\angle BAD$ 度数, 再根据第一问的三角形全等和直角三角形的性质可求出 $\angle BAE$ 和 $\angle DAF$ 度数, 从而求出 $\angle EAF$ 度数, 证明了等边三角形 AEF , 即可求出 $\angle AEF$ 的度数.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 菱形 $ABCD$,

$$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D,$$

$$\text{又} \because AE \perp BC, AF \perp CD,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AFD = 90^\circ.$$

在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEB = \angle AFD \\ \angle B = \angle D \\ AB = AD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF (\text{AAS}).$$

$$\therefore AE = AF.$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 菱形 $ABCD$,

$$\therefore \angle B + \angle BAD = 180^\circ,$$

$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 120^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle AEB = 90^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = 30^\circ.$$

由 (1) 知 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$,

$$\therefore \angle BAE = \angle DAF = 30^\circ.$$

$$\therefore \angle EAF = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

$$\because AE = AF,$$

$\therefore \triangle AEF$ 等边三角形.

$$\therefore \angle AEF = 60^\circ.$$

【点睛】 本题考查了三角形全等、菱形的性质、等边三角形的性质，解题的关键在于熟练掌握全等的方法和菱形的性质.

20. 观察下面的等式: $3^2 - 1^2 = 8 \times 1, 5^2 - 3^2 = 8 \times 2, 7^2 - 5^2 = 8 \times 3, 9^2 - 7^2 = 8 \times 4, \dots$

(1) 写出 $19^2 - 17^2$ 的结果.

(2) 按上面的规律归纳出一个一般的结论 (用含 n 的等式表示, n 为正整数)

(3) 请运用有关知识, 推理说明这个结论是正确的.

【答案】 (1) 8×9

$$(2) (2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n$$

(3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据题干的规律求解即可;

(2) 根据题干的规律求解即可;

(3) 将 $(2n+1)^2 - (2n-1)^2$ 因式分解, 展开化简求解即可.

【小问 1 详解】

$$19^2 - 17^2 = 8 \times 9;$$

【小问 2 详解】

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8n;$$

【小问 3 详解】

$$(2n+1)^2 - (2n-1)^2$$

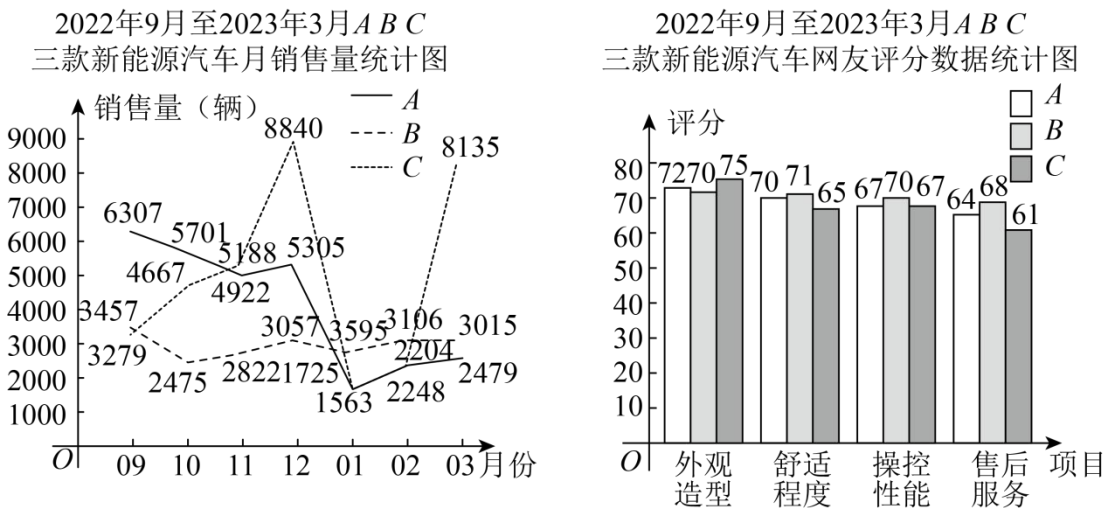
$$= (2n+1+2n-1)(2n+1-2n+1)$$

$$= 4n \times 2$$

$$= 8n.$$

【点睛】此题考查数字的变化规律，因式分解，整式乘法的混合运算，解题关键是通过观察，分析、归纳发现其中的变化规律.

21. 小明的爸爸准备购买一辆新能源汽车. 在爸爸的预算范围内, 小明收集了 A , B , C 三款汽车在 2022 年 9 月至 2023 年 3 月期间的国内销售量和网友对车辆的外观造型、舒适程度、操控性能、售后服务等四项评分数据, 统计如下:



(1) 数据分析:

- ①求 B 款新能源汽车在 2022 年 9 月至 2023 年 3 月期间月销售量的中位数;
- ②若将车辆的外观造型, 舒适程度、操控性能, 售后服务等四项评分数据按 2:3:3:2 的比例统计, 求 A 款新能源汽车四项评分数据的平均数.

(2) 合理建议:

请按你认为的各项“重要程度”设计四项评分数据的比例, 并结合销售量, 以此为依据建议小明的爸爸购买哪款汽车? 说说你的理由.

【答案】(1) ①3015 辆, ②68.3 分

(2) 选 B 款, 理由见解析

【解析】

【分析】(1) ①根据中位数的概念求解即可;

②根据加权平均数的计算方法求解即可;

(2) 根据加权平均数的意义求解即可.

【小问 1 详解】

①由中位数的概念可得,

B 款新能源汽车在 2022 年 9 月至 2023 年 3 月期间月销售量的中位数为 3015 辆;

$$\textcircled{2} \bar{x}_1 = \frac{72 \times 2 + 70 \times 3 + 67 \times 3 + 64 \times 2}{2 + 3 + 3 + 2} = 68.3 \text{ 分}.$$

$\therefore A$ 款新能源汽车四项评分数据的平均数为 68.3 分；

【小问 2 详解】

给出 1:2:1:2 的权重时，

A , B , C 三款新能源汽车评分的加权平均数分别为 67.8 分、69.7 分、65.7 分，

结合 2023 年 3 月的销售量，

$\therefore$ 可以选 B 款.

【点睛】此题考查了中位数和加权平均数，以及利用加权平均数做决策，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

22. 图 1 是某住宅单元楼的人脸识别系统（整个头部需在摄像头视角内才能被识别），其示意图如图 2，

摄像头 A 的仰角、俯角均为 15° ，摄像头高度 $OA = 160\text{cm}$ ，识别的最远水平距离 $OB = 150\text{cm}$.

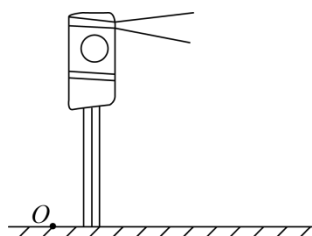


图1

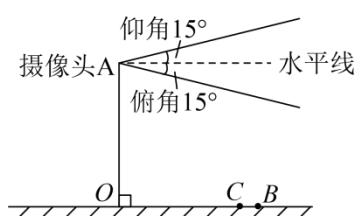


图2

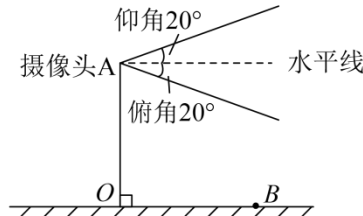


图3

(1) 身高 208cm 的小杜，头部高度为 26cm，他站在离摄像头水平距离 130cm 的点 C 处，请问小杜最少需要下蹲多少厘米才能被识别.

(2) 身高 120cm 的小若，头部高度为 15cm，踮起脚尖可以增高 3cm，但仍无法被识别. 社区及时将摄像头的仰角、俯角都调整为 20° (如图 3)，此时小若能被识别吗？请计算说明. (精确到 0.1cm，参考数据 $\sin 15^\circ \approx 0.26$, $\cos 15^\circ \approx 0.97$, $\tan 15^\circ \approx 0.27$, $\sin 20^\circ \approx 0.34$, $\cos 20^\circ \approx 0.94$, $\tan 20^\circ \approx 0.36$)

【答案】(1) 12.9cm

(2) 能，见解析

【解析】

【分析】(1) 根据正切值求出 EF 长度，再利用三角形全等可求出 $EF = DF = 35.1(\text{cm})$ ，最后利用矩形的性质求出 CE 的长度，从而求出蹲下的高度.

(2) 根据正切值求出 MP 长度，再利用三角形全等可求出 $MP = PN = 54.0(\text{cm})$ ，最后利用矩形的性质求出 BP 的长度，即可求出 BN 长度，与踮起脚尖后的高度进行比较，即可求出答案.

【小问 1 详解】

解：过点 C 作 OB 的垂线分别交仰角、俯角线于点 E, D ，交水平线于点 F ，如图所示，

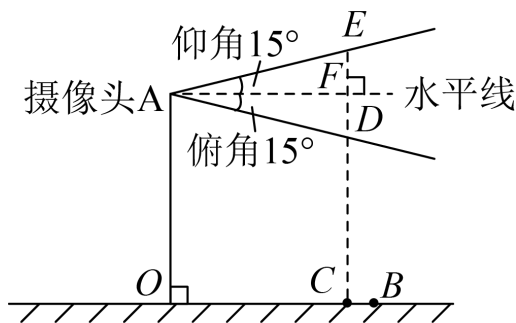


图2

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $\tan \angle EAF = \frac{EF}{AF}$.

$$\therefore EF = AF \cdot \tan 15^\circ = 130 \times 0.27 = 35.1(\text{cm}).$$

$$\because AF = AF, \angle EAF = \angle DAF, \angle AFE = \angle AFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle AEF.$$

$$\therefore EF = DF = 35.1(\text{cm}).$$

$$\therefore CE = CF + EF = 160 + 35.1 = 195.1(\text{cm}), \quad ED = 2EF = 35.1 \times 2 = 70.2(\text{cm}) > 26(\text{cm}),$$

$$\therefore \text{小杜下蹲的最小距离} = 208 - 195.1 = 12.9(\text{cm}).$$

【小问 2 详解】

解：能，理由如下：

过点 B 作 OB 的垂线分别交仰角、俯角线于点 M, N ，交水平线于点 P ，如图所示，

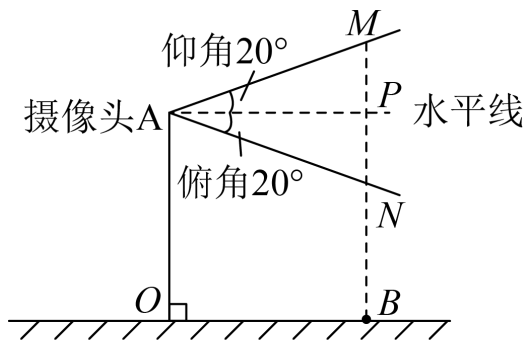


图3

在 $\text{Rt}\triangle APM$ 中， $\tan \angle MAP = \frac{MP}{AP}$.

$$\therefore MP = AP \cdot \tan 20^\circ = 150 \times 0.36 = 54.0(\text{cm}),$$

$$\because AP = AP, \angle MAP = \angle NAP, \angle APM = \angle APN = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AMP \cong \triangle ANP.$$

$$\therefore PN = MP = 54.0(\text{cm}),$$

$$\therefore BN = BP - PN = 160 - 54.0 = 106.0(\text{cm}).$$

小若垫起脚尖后头顶的高度为 $120 + 3 = 123(\text{cm})$.

$$\therefore \text{小若头顶超出点 } N \text{ 的高度 } 123 - 106.0 = 17.0(\text{cm}) > 15(\text{cm}).$$

$\therefore$ 小若垫起脚尖后能被识别.

【点睛】 本题考查的是解直角三角形的实际应用，涉及到的知识点有锐角三角函数中的正切值、矩形的性质、三角形的全等，解题的关键在于是否能根据生活实际题结合数学相关知识，解题的重点在于熟练掌握相关概念、性质和全等方法.

23. 在二次函数 $y = x^2 - 2tx + 3 (t > 0)$ 中，

(1) 若它的图象过点 $(2, 1)$ ，则 t 的值为多少？

(2) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时， y 的最小值为 -2 ，求出 t 的值；

(3) 如果 $A(m-2, a), B(4, b), C(m, a)$ 都在这个二次函数的图象上，且 $a < b < 3$ ，求 m 的取值范围.

【答案】 (1) $t = \frac{3}{2}$

(2) $t = \sqrt{5}$

(3) $3 < m < 4$ 或 $m > 6$

【解析】

【分析】 (1) 将坐标代入解析式，求解待定参数值；

(2) 确定抛物线的对称轴，对待定参数分类讨论，若 $0 < t \leq 3$ ，当 $x = t$ 时，函数值最小，求得 $t = \sqrt{5}$ ，若 $t > 3$ ，当 $x = 3$ 时，函数值最小，解得 $t = \frac{7}{3}$ (不合题意，舍去)；

(3) 由 $A(m-2, a), C(m, a)$ 关于对称轴对称得 $m-1 = t$ ，且 A 在对称轴左侧， C 在对称轴右侧；确定抛物线与 y 轴交点 $(0, 3)$ ，此交点关于对称轴的对称点为 $(2m-2, 3)$ ；由 $a < 3, b < 3$ 且 $t > 0 \therefore 4 < 2m-2$ 解得 $m > 3$ ；分类讨论：当 A, B 都在对称轴左边时，

$4 < m-2$ ，解得 $m > 6$ ，当 A, B 分别在对称轴两侧时， $4 - (m-1) > m-1 - (m-2)$ ，解得 $m < 4, \therefore 3 < m < 4$.

【小问1详解】

将 $(2, 1)$ 代入 $y = x^2 - 2tx + 3$ 中，

得 $1 = 4 - 4t + 3$ ，解得， $t = \frac{3}{2}$ ；

【小问 2 详解】

抛物线对称轴为 $x = t$ 。

若 $0 < t \leq 3$ ，当 $x = t$ 时，函数值最小，

$$\therefore t^2 - 2t^2 + 3 = -2, \text{ 解得 } t = \pm\sqrt{5}.$$

$$\because t > 0,$$

$$\therefore t = \sqrt{5}$$

若 $t > 3$ ，当 $x = 3$ 时，函数值最小，

$$\therefore -2 = 9 - 6t + 3, \text{ 解得 } t = \frac{7}{3} \text{ (不合题意, 舍去)}$$

综上所述 $t = \sqrt{5}$ 。

【小问 3 详解】

$\because A(m-2, a), C(m, a)$ 关于对称轴对称

$$\therefore \frac{m-2+m}{2} = t, m-1 = t, \text{ 且 } A \text{ 在对称轴左侧, } C \text{ 在对称轴右侧}$$

$\because$ 抛物线与 y 轴交点为 $(0, 3)$ ，抛物线对称轴为直线 $x = t$ ，

$\therefore$ 此交点关于对称轴的对称点为 $(2m-2, 3)$

$$\because a < 3, b < 3 \text{ 且 } t > 0$$

$$\therefore 4 < 2m-2, \text{ 解得 } m > 3.$$

当 A, B 都在对称轴左边时，

$$\because a < b$$

$$\therefore 4 < m-2, \text{ 解得 } m > 6,$$

$$\therefore m > 6$$

当 A, B 分别在对称轴两侧时

$\because a < b \therefore B$ 到对称轴的距离大于 A 到对称轴的距离

$$\therefore 4 - (m-1) > m-1 - (m-2), \text{ 解得 } m < 4$$

$$\therefore 3 < m < 4$$

综上所述 $3 < m < 4$ 或 $m > 6$ 。

【点睛】本题考查二次函数图象的性质、极值问题；存在待定参数的情况下，对可能情况作完备的分类讨论是解题的关键.

24. 已知， AB 是半径为 1 的 $\odot O$ 的弦， $\odot O$ 的另一条弦 CD 满足 $CD = AB$ ，且 $CD \perp AB$ 于点 H （其中点 H 在圆内，且 $AH > BH$ ， $CH > DH$ ）.

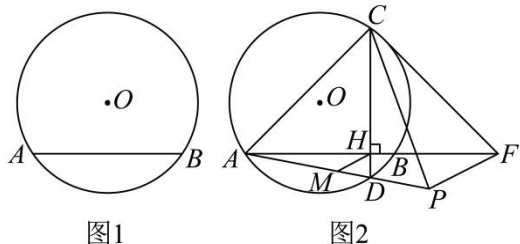


图1

图2

(1) 在图 1 中用尺规作出弦 CD 与点 H （不写作法，保留作图痕迹）.

(2) 连结 AD ，猜想，当弦 AB 的长度发生变化时，线段 AD 的长度是否变化？若发生变化，说明理由；若不变，求出 AD 的长度；

(3) 如图 2，延长 AH 至点 F ，使得 $HF = AH$ ，连结 CF ， $\angle HCF$ 的平分线 CP 交 AD 的延长线于点 P ，点 M 为 AP 的中点，连结 HM ，若 $PD = \frac{1}{2}AD$ ，求证： $MH \perp CP$ 。

【答案】(1) 作图见解析

(2) 线段 AD 是定长，长度不发生变化，值为 $\sqrt{2}$

(3) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 以 A ， B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，交点为 G ，连接 OG ，与 $\odot O$ 交点为 E ， F ，与 AB 交点为 M ，则 $OG \perp AB$ ，分别以 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径画弧，交点为 N ，连接 ON ，则 $ON \parallel AB$ ，以 O 为圆心， OM 长为半径画弧与 ON 交点为 P ，则 $OP = OM$ ，以 P 为圆心， OP 长为半径，交直线 ON 于 Q ，以 O ， Q 为圆心，大于 $\frac{1}{2}OQ$ 长为半径画弧，交点为 R ，连接 PR ，则 $PR \perp AB$ ， PR 与 $\odot O$ 交点为 C ， D ，与 AB 交点为 H ，即 CD 、点 H 即为所求；

(2) 如图 2，连结 AD ，连接 DO 并延长交 $\odot O$ 于 E ，连结 AE ， AC ，过 O 作 $OF \perp AB$ 于 F ， $ON \perp CD$ 于 N ，证明四边形 $OFHN$ 是正方形，则可证 $\triangle ACH$ 是等腰直角三角形，则 $\angle C = 45^\circ$ ，由 $\widehat{AD} = \widehat{AD}$ ，可知 $\angle E = \angle C = 45^\circ$ ，由 DE 是 $\odot O$ 的直径，可得 $\angle EAD = 90^\circ$ ，则 $\triangle ADE$ 是等腰直角三角形，

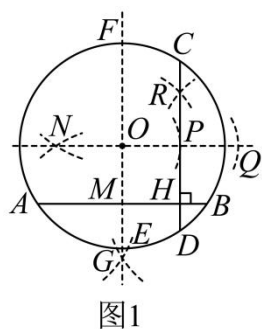
$$AD = DE \cdot \sin \angle E = \sqrt{2} ;$$

(3) 如图 3，延长 CD 、 FP ，交点为 G ，由题意知 MH 是 $\triangle APF$ 的中位线，则 $MH \parallel PF$ ， $MH = \frac{1}{2}PF$ ，

由 $PD = \frac{1}{2}AD$ ，可得 $MD = \frac{1}{2}PD$ ，证明 $\triangle MDH \sim \triangle PDG$ ，则 $\frac{MH}{GP} = \frac{MD}{PD} = \frac{1}{2}$ ，即 $GP = 2MH = PF$ ，
如图 3，作 $\triangle CFG$ 的外接圆，延长 CP 交外接圆于点 N ，连结 GN 、 FN ，由 CP 是 $\angle HCF$ 的平分线，
可得 $\angle GCP = \angle FCP$ ，则 $GN = FN$ ，证明 $\triangle GPN \cong \triangle FPN$ (SSS)，则 $\angle GPN = \angle FPN = 90^\circ$ ，即
 $PF \perp CP$ ，由 $MH \parallel PF$ ，可得 $MH \perp CP$ ，进而结论得证。

【小问 1 详解】

解：如图 1， CD 、点 H 即为所求；



【小问 2 详解】

图1

：当弦 AB 的长度发生变化时，线段 AD 的长度不变；

如图 2，连结 AD ，连接 DO 并延长交 $\odot O$ 于 E ，连结 AE ， AC ，过 O 作 $OF \perp AB$ 于 F ， $ON \perp CD$ 于 N ，则四边形 $OFHN$ 是矩形，

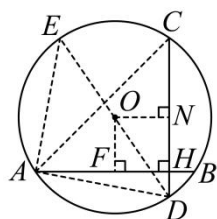


图2

$$\therefore AB = CD, AB \perp CD,$$

$$\therefore OF = ON,$$

$\therefore$ 四边形 $OFHN$ 是正方形，

$$\therefore FH = NH,$$

$$\therefore AF + FH = CN + NH, \text{ 即 } AH = CH,$$

$\therefore \triangle ACH$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AD},$$

$$\therefore \angle E = \angle C = 45^\circ,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 45^\circ,$$

$\therefore ADE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AE = AD,$$

$$\therefore AD = DE \cdot \sin \angle E = \sqrt{2},$$

$\therefore$ 线段 AD 是定长, 长度不发生变化, 值为 $\sqrt{2}$;

【小问 3 详解】

证明: 如图 3, 延长 CD 、 FP , 交点为 G ,

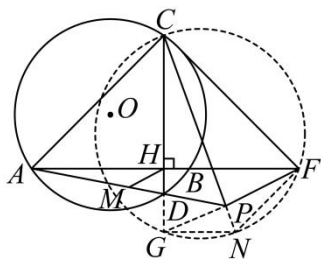


图3

$$\therefore HF = AH,$$

$\therefore$ 点 H 为 AF 的中点,

又 $\therefore$ 点 M 为 AP 的中点,

$\therefore MH$ 是 $\triangle APF$ 的中位线,

$$\therefore MH \parallel PF, \quad MH = \frac{1}{2}PF,$$

$$\text{又} \because PD = \frac{1}{2}AD, \quad PM = AM,$$

$$\therefore MD = \frac{1}{2}PD,$$

$$\therefore MH \parallel GP,$$

$$\therefore \angle MHD = \angle PGD,$$

$$\text{又} \because \angle MDH = \angle PDG,$$

$$\therefore \triangle MDH \sim \triangle PDG,$$

$$\therefore \frac{MH}{GP} = \frac{MD}{PD} = \frac{1}{2}, \quad \text{即 } GP = 2MH = PF,$$

如图 3, 作 $\triangle CFG$ 的外接圆, 延长 CP 交外接圆于点 N , 连结 GN 、 FN ,

$\therefore CP$ 是 $\angle HCF$ 的平分线,

$$\therefore \angle GCP = \angle FCP,$$

$$\therefore GN = NF,$$

$$\because GP = PF, \quad GN = NF, \quad PN = PN,$$

$$\therefore \triangle GPN \cong \triangle FPN \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle GPN = \angle FPN = 90^\circ,$$

$$\therefore PF \perp CP,$$

$$\because MH \parallel PF,$$

$$\therefore MH \perp CP.$$

【点睛】 本题考查了作垂线，同弧或等弧所对的圆周角相等，正弦，正方形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，中位线，直径所对的圆周角为直角，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，角平分线等知识．解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用．

