

2023 年浙江省丽水市中考数学真题

卷 I

说明：本卷共有 1 大题，10 小题，共 30 分.

一、选择题（本题有 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. -3 的相反数是（ ）

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】相反数的定义是：如果两个数只有符号不同，我们称其中一个数为另一个数的相反数，特别地，0 的相反数还是 0.

【详解】根据相反数的定义可得： -3 的相反数是 3，
故选 D.

【点睛】本题考查相反数，题目简单，熟记定义是关键.

2. 计算 $2a^2 + a^2$ ，结果正确的是（ ）

- A. $2a^4$ B. $2a^2$ C. $3a^4$ D. $3a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】合并同类项法则是指将同类项的系数相加减，字母和字母的指数不变.

【详解】原式 $= 3a^2$ ，
故选 D

【点睛】本题考查了同类项的定义及合并同类项，熟练掌握合并同类项的方法是解答本题的关键合并同类项时，把同类项的系数相加，所得和作为合并后的系数，字母和字母的指数不变.

3. 某校准备组织红色研学活动，需要从梅岐、王村口、住龙、小顺四个红色教育基地中任选一个前往研学，选中梅岐红色教育基地的概率是（ ）

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

【答案】B

【解析】

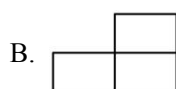
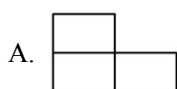
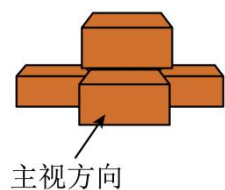
【分析】直接根据概率公式求解即可.

【详解】解：从梅岐、王村口、住龙、小顺四个红色教育基地中任选一个前往研学，总共有 4 种选择，选中梅岐红色教育基地有 1 种，则概率为 $\frac{1}{4}$ ，

故选：B

【点睛】此题考查了概率的求法，通过所有可能结果得出 n ，再从中选出符合事件结果的数目 m ，然后根据概率公式 $P = \frac{m}{n}$ 求出事件概率.

4. 如图，箭头所指的是某陶艺工作室用于垫放陶器的 5 块相同的耐火砖搭成的几何体，它的主视图是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】主视图为从正面看到的图形，即可判断.

【详解】解：从正面观察图形可知，其主视图分为两层，上层中间 1 个小长方形，下层有 3 个小长方形，D 选

项符合；

故选：D

【点睛】本题主要考查几何体的三视图，解题的关键是掌握主视图是从正面看到的图形.

5. 在平面直角坐标系中，点 $P(-1, m^2 + 1)$ 位于（ ）

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

【答案】B

【解析】

【分析】根据 P 点坐标分别判断出横坐标和纵坐标的符号，从而就可以判断改点所在的象限.

【详解】解： $\because P(-1, m^2 + 1)$,

$$\therefore -1 < 0, \quad m^2 + 1 \geq 1,$$

$\therefore$ 满足第二象限的条件.

故选：B.

【点睛】本题考查的是平面直角坐标系中点的坐标以及象限知识，解题的关键在于熟练掌握各个象限的横

纵坐标点的符号特点.

6. 小霞原有存款 52 元, 小明原有存款 70 元. 从这个月开始, 小霞每月存 15 元零花钱, 小明每月存 12 元零花钱, 设经过 n 个月后小霞的存款超过小明, 可列不等式为 ()

A. $52 + 15n > 70 + 12n$

B. $52 + 15n < 70 + 12n$

C. $52 + 12n > 70 + 15n$

D. $52 + 12n < 70 + 15n$

【答案】A

【解析】

【分析】依据数量关系式: 小霞原来存款数 + $15 \times$ 月数 $n >$ 小明原来存款数 + $12 \times$ 月数 n , 把相关数值代入即可;

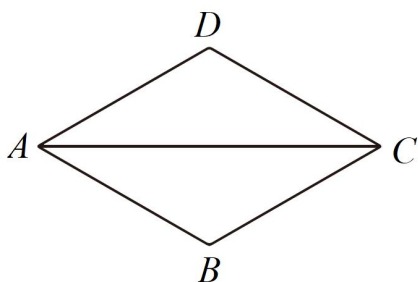
【详解】解: 根据题意得,

$$52 + 15n > 70 + 12n,$$

故选: A.

【点睛】此题主要考查了一元一次不等式的应用, 得到两人存款数的关系式是解决本题的关键.

7. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, $\angle DAB = 60^\circ$, 则 AC 的长为 ()



A. $\frac{1}{2}$

B. 1

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

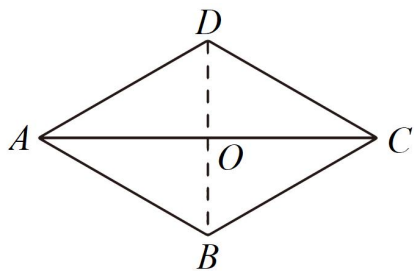
D. $\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】连接 BD 与 AC 交于 O . 先证明 $\triangle ABD$ 是等边三角形, 由 $AC \perp BD$, 得到 $\angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$, 即可得到 $OB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}$, 利用勾股定理求出 AO 的长度, 即可求得 AC 的长度.

【详解】解: 连接 BD 与 AC 交于 O .



∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB \parallel CD, AB = AD, AC \perp BD, AO = OC = \frac{1}{2}AC,$$

∵ $\angle DAB = 60^\circ$, 且 $AB = AD$,

∴ $\triangle ABD$ 是等边三角形,

∴ $AC \perp BD$,

$$\therefore \angle OAB = \frac{1}{2}\angle BAD = 30^\circ, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AC = 2AO = \sqrt{3},$$

故选: D.

【点睛】此题主要考查了菱形的性质、勾股定理、等边三角形的判定和性质、 30° 角所对直角边等于斜边的一半,关键是熟练掌握菱形的性质.

8. 如果100N的压力F作用于物体上,产生的压强P要大于1000Pa,则下列关于物体受力面积 $S(\text{m}^2)$ 的说法正确的是 ()

- A. S 小于 0.1m^2 B. S 大于 0.1m^2 C. S 小于 10m^2 D. S 大于 10m^2

【答案】A

【解析】

【分析】根据压力压强受力面积之间的关系 $S = \frac{F}{P}$ 即可求出答案.

【详解】解: 假设P为1000Pa,

∵ F为100N,

$$\therefore S = \frac{F}{P} = \frac{100}{1000} = 0.1\text{m}^2.$$

∵ $P > 1000\text{Pa}$,

$$\therefore S < 0.1\text{m}^2.$$

故选：A.

【点睛】本题考查的是反比例函数值的取值范围，解题的关键是要知道压力压强受力面积之间的关系以及P越大，S越小

9. 一个球从地面竖直向上弹起时的速度为10米/秒，经过 t （秒）时球距离地面的高度 h （米）适用公式 $h = 10t - 5t^2$ ，那么球弹起后又回到地面所花的时间 t （秒）是（ ）

- A. 5 B. 10 C. 1 D. 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据球弹起后又回到地面时 $h = 0$ ，得到 $0 = 10t - 5t^2$ ，解方程即可得到答案.

【详解】解：球弹起后又回到地面时 $h = 0$ ，即 $0 = 10t - 5t^2$ ，

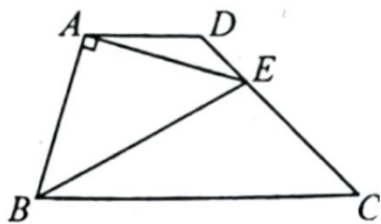
解得 $t_1 = 0$ （不合题意，舍去）， $t_2 = 2$ ，

$\therefore$ 球弹起后又回到地面所花的时间 t （秒）是2，

故选：D

【点睛】此题考查了求二次函数自变量的值，读懂题意，得到方程是解题的关键.

10. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle C = 45^\circ$ ，以 AB 为腰作等腰直角三角形 BAE ，顶点 E 恰好落在 CD 边上，若 $AD = 1$ ，则 CE 的长是（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 2 D. 1

【答案】A

【解析】

【分析】先根据等腰三角形的性质可得 $BE = \sqrt{2}AB$ ， $\angle ABE = \angle AEB = 45^\circ$ ， $\angle BAE = 90^\circ$ ，再判断出点 A, B, E, D 四点共圆，在以 BE 为直径的圆上，连接 BD ，根据圆周角定理可得 $\angle BDE = 90^\circ$ ， $\angle ADB = \angle AEB = 45^\circ$ ，然后根据相似三角形的判定可得 $\triangle ABD \sim \triangle EBC$ ，根据相似三角形的性质即可得.

【详解】解：∵ $\triangle BAE$ 是以 AB 为腰的等腰直角三角形，

$$\therefore BE = \sqrt{2}AB, \angle ABE = \angle AEB = 45^\circ, \angle BAE = 90^\circ,$$

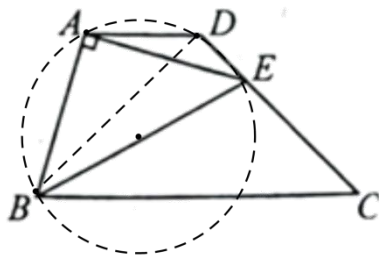
$$\because AD \parallel BC, \angle C = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 180^\circ - \angle C = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE + \angle ABE = 180^\circ,$$

∴ 点 A, B, E, D 四点共圆，在以 BE 为直径的圆上，

如图，连接 BD ，



由圆周角定理得： $\angle BDE = 90^\circ$ ， $\angle ADB = \angle AEB = 45^\circ$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle C = \angle CBD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBE = 45^\circ = \angle EBC + \angle DBE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle EBC,$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle EBC \text{ 中, } \begin{cases} \angle ADB = \angle C \\ \angle ABD = \angle EBC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle EBC,$$

$$\therefore \frac{CE}{AD} = \frac{EB}{AB} = \sqrt{2},$$

$$\therefore CE = \sqrt{2}AD = \sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2},$$

故选：A.

【点睛】本题考查了圆内接四边形、圆周角定理、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质等知识点，正确判断出点 A, B, E, D 四点共圆，在以 BE 为直径的圆上是解题关键.

卷 II

说明：本卷共有 2 大题，14 小题，共 90 分.

二、填空题（本题有 6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. 分解因式： $x^2 - 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $(x+3)(x-3)$

【解析】

【详解】解： $x^2-9=(x+3)(x-3)$,

故答案为： $(x+3)(x-3)$.

12. 青田县“稻鱼共生”种养方式因稻鱼双收、互惠共生而受到农户青睐，现有一农户在5块面积相等的稻田里养殖田鱼，产量分别是（单位：kg）：12，13，15，17，18，则这5块稻田的田鱼平均产量是_____kg.

【答案】15

【解析】

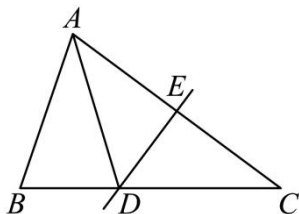
【分析】根据平均数的定义，即可求解.

【详解】解：这5块稻田的田鱼平均产量是 $\frac{1}{5}(12+13+15+17+18)=15$,

故答案为：15.

【点睛】本题考查了求一组数据的平均数，熟练掌握平均数的定义是解题的关键.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， AC 的垂直平分线交 BC 于点 D ，交 AC 于点 E ， $\angle B = \angle ADB$. 若 $AB = 4$ ，则 DC 的长是_____.



【答案】4

【解析】

【分析】由 $\angle B = \angle ADB$ 可得 $AD = AB = 4$ ，由 DE 是 AC 的垂直平分线可得 $AD = DC$ ，从而可得 $DC = AB = 4$.

【详解】解： $\because \angle B = \angle ADB$,

$\therefore AD = AB = 4$,

$\because DE$ 是 AC 的垂直平分线,

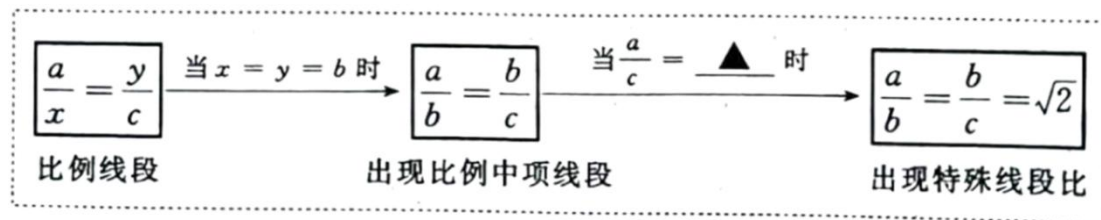
$\therefore AD = DC$,

$\therefore DC = AB = 4$.

故答案为：4.

【点睛】本题主要考查了线段垂直平分线的性质以及等角对等边等知识，熟练掌握相关知识是解答本题的关键.

14. 小慧同学在学习了九年级上册“4.1 比例线段”3节课后，发现学习内容是一个逐步特殊化的过程，请在横线上填写适当的数值，感受这种特殊化的学习过程. 图中横线处应填：_____



【答案】2

【解析】

【分析】根据题意得出 $a = \sqrt{2}b, c = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \sqrt{2}$

$$\therefore a = \sqrt{2}b, c = \frac{\sqrt{2}}{2}b$$

$$\therefore \frac{a}{c} = \frac{\sqrt{2}b}{\frac{\sqrt{2}}{2}b} = 2,$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查了比例的性质，熟练掌握比例的性质是解题的关键.

15. 古代中国的数学专著《九章算术》中有一题：“今有生丝三十斤，干之，耗三斤十二两. 今有干丝一十二斤，问生丝几何？”意思是：“今有生丝30斤，干燥后耗损3斤12两（古代中国1斤等于16两）. 今有干丝12斤，问原有生丝多少？”则原有生丝为_____斤.

【答案】 $\frac{96}{7}$

【解析】

【分析】设原有生丝 x 斤，根据题意列出方程，解方程即可求解.

【详解】解：设原有生丝 x 斤，依题意，

$$\frac{30}{30-3\frac{12}{16}} = \frac{x}{12}$$

$$\text{解得: } x = \frac{96}{7},$$

$$\text{故答案为: } \frac{96}{7}.$$

【点睛】 本题考查了一元一次方程的应用，根据题意列出方程解题的关键.

16. 如图，分别以 a, b, m, n 为边长作正方形，已知 $m > n$ 且满足 $am - bn = 2$ ， $an + bm = 4$.

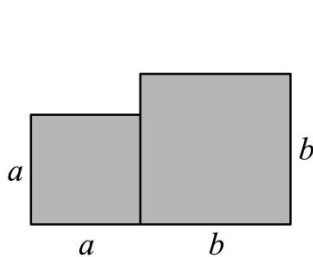


图1

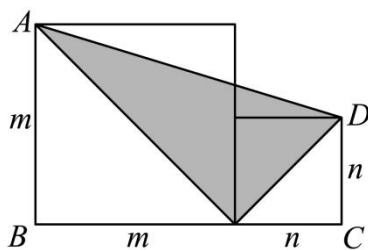


图2

(1) 若 $a = 3, b = 4$ ，则图 1 阴影部分的面积是_____；

(2) 若图 1 阴影部分的面积为 3，图 2 四边形 $ABCD$ 的面积为 5，则图 2 阴影部分的面积是_____.

【答案】 ①. 25 ②. $\frac{5}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据正方形的面积公式进行计算即可求解；

$$(2) \text{ 根据题意, 解方程组得出 } \begin{cases} m = \frac{2a+4b}{3} \\ n = \frac{4a-2b}{3} \end{cases}, \text{ 根据题意得出 } m+n = \sqrt{10}, \text{ 进而得出 } \begin{cases} a = \frac{9\sqrt{10}-\sqrt{30}}{20} \\ b = \frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{30}}{20} \end{cases},$$

根据图 2 阴影部分的面积为 mn ，代入进行计算即可求解.

【详解】 解: (1) $a = 3, b = 4$ ，图 1 阴影部分的面积是 $a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ，

故答案为: 25.

(2) $\because$ 图 1 阴影部分的面积为 3，图 2 四边形 $ABCD$ 的面积为 5，

$$\therefore a^2 + b^2 = 3, \quad \frac{1}{2}(m+n)(m+n) = 5, \quad \text{即 } (m+n)^2 = 10$$

$$\therefore m+n = \sqrt{10} \quad (\text{负值舍去})$$

$$\therefore am - bn = 2, \quad an + bm = 4.$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{2a+4b}{a^2+b^2} \\ n = \frac{4a-2b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3 \text{ ①}$$

$$\therefore \begin{cases} m = \frac{2a+4b}{3} \\ n = \frac{4a-2b}{3} \end{cases},$$

$$\therefore m+n = \frac{6a+2b}{3} = 2a + \frac{2}{3}b,$$

$$\therefore 2a + \frac{2}{3}b = \sqrt{10} \text{ ②}$$

$$\text{联立①②解得: } \begin{cases} a = \frac{\sqrt{30}+9\sqrt{10}}{20} \\ b = \frac{3\sqrt{10}-3\sqrt{30}}{20} \end{cases} \quad (b \text{ 为负数舍去}) \text{ 或 } \begin{cases} a = \frac{9\sqrt{10}-\sqrt{30}}{20} \\ b = \frac{3\sqrt{10}+3\sqrt{30}}{20} \end{cases}$$

$$\therefore 2a+4b = \frac{\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{2}, \quad 4a+2b = \frac{-\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{2}$$

图 2 阴影部分的面积是 $\frac{1}{2}\sqrt{2}m \times \sqrt{2}n = mn$

$$mn = \frac{(2a+4b)(4a-2b)}{9}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{2} \times \frac{-\sqrt{30}+3\sqrt{10}}{2}}{9}$$

$$= \frac{5}{3}$$

故答案为: 25 或 $\frac{5}{3}$.

【点睛】本题考查了整式的乘方与图形的面积，正方形的性质，勾股定理，二元一次方程组，解一元二次方程，正确的计算是解题的关键.

三、解答题 (本题有 8 小题，第 17~19 题每题 6 分，第 20, 21 题每题 8 分，第 22, 23 题每题 10 分，第 24 题 12 分，共 66 分，各小题都必须写出解答过程)

$$17. \text{ 计算: } \left| -\frac{1}{2} \right| + (-2023)^0 + 2^{-1}.$$

【答案】2

【解析】

【分析】直接利用负整数指数幂的性质以及零指数幂的性质、绝对值的意义分别化简，再利用有理数的加减运算法则计算得出答案.

【详解】原式 $= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$.

【点睛】此题主要考查了负整数指数幂的性质以及零指数幂的性质，绝对值的意义，掌握这些知识并正确计算是解题关键.

18. 解一元一次不等式组: $\begin{cases} x+2>3 \\ 2x-1<5 \end{cases}$.

【答案】 $1 < x < 3$

【解析】

【分析】根据不等式的性质，解一元一次不等式，然后求出两个解集的公共部分即可.

【详解】解: $\begin{cases} x+2>3 \text{ ①} \\ 2x-1<5 \text{ ②} \end{cases}$

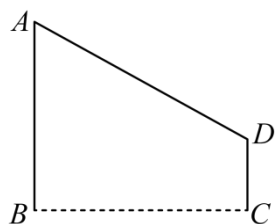
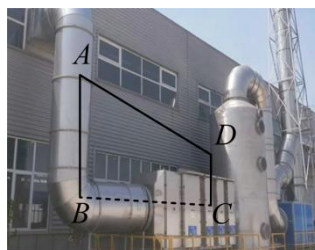
解不等式①，得 $x > 1$,

解不等式②，得 $x < 3$,

$\therefore$ 原不等式组的解是 $1 < x < 3$.

【点睛】本题主要考查解一元一次不等式组，掌握不等式的性质，解一元一次不等式的方法是解题的关键.

19. 如图，某工厂为了提升生产过程中所产生废气的净化效率，需在气体净化设备上增加一条管道 $A-D-C$ ，已知 $DC \perp BC$ ， $AB \perp BC$ ， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 11\text{m}$ ， $CD = 4\text{m}$ ，求管道 $A-D-C$ 的总长.



【答案】18m

【解析】

【分析】如图：过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，由题意易得 $BE = CD = 4$ ，进而求得 $AE = 7$ ，再通过解直角三角形可得 $AD = AE \div \cos 60^\circ = 14$ ，然后求出 $AD + CD$ 即可解答.

【详解】解：如图：过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，

由题意，得 $BE = CD = 4$ ，

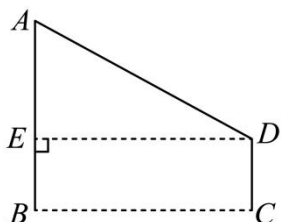
$$\therefore AB = 11,$$

$$\therefore AE = 7.$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore AD = AE \div \cos 60^\circ = 14.$$

$\therefore AD + CD = 18(\text{m})$. 即管道 $A-D-C$ 的总长为 18m .



【点睛】 本题主要考查了解直角三角形的应用，理解题意求得

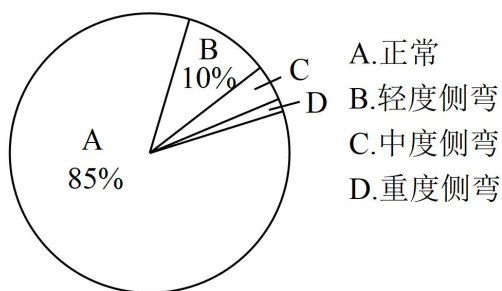
$AD = AE \div \cos 60^\circ = 14$ 是解答本题的关键.

20. 为全面提升中小学生体质健康水平，我市开展了儿童青少年“正脊行动”。人民医院专家组随机抽取某校各年级部分学生进行了脊柱健康状况筛查。根据筛查情况，李老师绘制了两幅不完整的统计图表，请根据图表信息解答下列问题：

抽取的学生脊柱健康情况统计表

类别	检查结果	人数
A	正常	170
B	轻度侧弯	▲
C	中度侧弯	7
D	重度侧弯	▲

抽取的学生脊柱健康情况统计图



(1) 求所抽取的学生总人数；

(2) 该校共有学生1600人，请估算脊柱侧弯程度为中度和重度的总人数；

(3) 为保护学生脊柱健康，请结合上述统计数据，提出一条合理的建议.

【答案】(1) 200 人

(2) 80 人

(3) 答案不唯一，见解析

【解析】

【分析】(1) 利用抽取的学生中正常的人数除以对应的百分比即可得到所抽取的学生总人数；

(2) 用该校学生总数乘以抽取学生中脊柱侧弯程度为中度和重度的百分比即可得到答案；

(3) 利用图表中的数据提出合理建议即可.

【小问 1 详解】

解： $170 \div 85\% = 200$ (人).

$\therefore$ 所抽取的学生总人数为 200 人.

【小问 2 详解】

$1600 \times (1 - 85\% - 10\%) = 80$ (人).

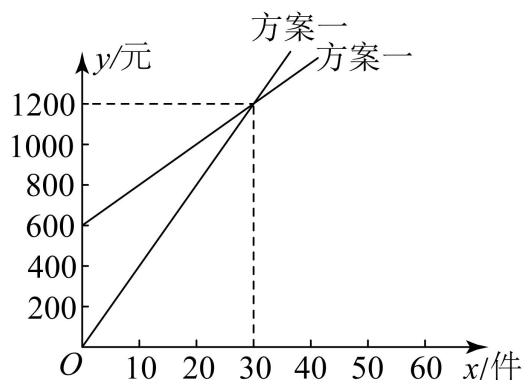
$\therefore$ 估算该校学生中脊柱侧弯程度为中度和重度的总人数有 80 人.

【小问 3 详解】

该校学生脊柱侧弯人数占比为 15%，说明该校学生脊柱侧弯情况较为严重，建议学校要每天组织学生做护脊操等.

【点睛】此题考查了统计表和扇形统计图，熟练掌握用部分除以对应的百分比求总数、用样本估计总体是解题的关键.

21. 我市“共富工坊”问海借力，某公司产品销售量得到大幅提升. 为促进生产，公司提供了两种付给员工月报酬的方案，如图所示，员工可以任选一种方案与公司签订合同. 看图解答下列问题：



(1) 直接写出员工生产多少件产品时，两种方案付给的报酬一样多；

(2) 求方案二 y 关于 x 的函数表达式；

(3) 如果你是劳务服务部门的工作人员，你如何指导员工根据自己的生产能力选择方案.

【答案】(1) 30 件 (2) $y = 20x + 600$

(3) 若每月生产产品件数不足 30 件，则选择方案二；若每月生产产品件数就是 30 件，两种方案报酬相同，可以任选一种；若每月生产产品件数超过 30 件，则选择方案一

【解析】

【分析】(1) 由图象的交点坐标即可得到解答；

(2) 由图象可得点 $(0, 600)$, $(30, 1200)$ ，设方案二的函数表达式为 $y = kx + b$ ，利用待定系数法即可得到方案二 y 关于 x 的函数表达式；

(3) 利用图象的位置关系，结合交点的横坐标即可得到结论.

【小问 1 详解】

解：由图象可知交点坐标为 $(30, 1200)$ ，即员工生产 30 件产品时，两种方案付给的报酬一样多；

【小问 2 详解】

由图象可得点 $(0, 600)$, $(30, 1200)$ ，设方案二的函数表达式为 $y = kx + b$ ，

把 $(0, 600)$, $(30, 1200)$ 代入上式，得

$$\begin{cases} b = 600, \\ 30k + b = 1200. \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = 20, \\ b = 600. \end{cases}$$

$\therefore$ 方案二的函数表达式为 $y = 20x + 600$.

【小问 3 详解】

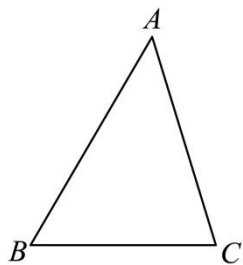
若每月生产产品件数不足 30 件，则选择方案二；

若每月生产产品件数就是 30 件，两种方案报酬相同，可以任选一种；

若每月生产产品件数超过 30 件，则选择方案一.

【点睛】此题考查了从函数图像获取信息、一次函数的应用等知识，从函数图象获取正确信息和掌握待定系数法是解题的关键.

22. 某数学兴趣小组活动，准备将一张三角形纸片（如图）进行如下操作，并进行猜想和证明.



(1) 用三角板分别取 AB, AC 的中点 D, E ，连接 DE ，画 $AF \perp DE$ 于点 F ；

- (2) 用 (1) 中所画的三块图形经过旋转或平移拼出一个四边形 (无缝隙无重叠), 并用三角板画出示意图;
- (3) 请判断 (2) 中所拼的四边形的形状, 并说明理由.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

(3) 答案不唯一, 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意画出图形即可;

(2) 方法一: 将 $\triangle ADF$ 绕点 D 逆时针旋转 180° 到 $\triangle DBM$, 将 $\triangle AEF$ 绕 E 点逆时针旋转 180° 到 $\triangle CEN$ 即可得出四边形 $BCNM$;

方法二: 将 $\triangle AEF$ 绕 E 点逆时针旋转 180° 到 $\triangle CEM$, 将 $\triangle ADF$ 绕点 D 逆时针旋转 180° 后再沿 BC 向右平移到 $\triangle CMN$, 即可得出四边形 $DBCN$;

方法三: 将 $\triangle ADF$ 绕点 D 逆时针旋转 180° 到 $\triangle DBN$, 将 $\triangle AEF$ 绕 E 点逆时针旋转 180° 后沿 CB 向左平移到 $\triangle BNM$, 即可得出四边形 $MBCE$;

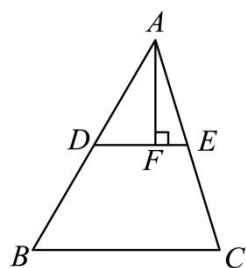
(3) 方法一: 先证明点 M, D, E, N 在同一直线上, 根据 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 得出 $DE \parallel BC$ 且 $BC = 2DE$. 证明 $MN = MD + DE + EN = BC$ 且 $MN \parallel BC$, 得出四边形 $MBCN$ 为平行四边形, 根据 $\angle M = 90^\circ$, 得出平行四边形 $MBCN$ 为矩形.

方法二: 证明点 D, E, M, N 在同一直线上, 根据 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 得出 $DE \parallel BC$ 且 $BC = 2DE$, 证明 $EN = DE$, 得出 $DN = BC$ 且 $DN \parallel BC$, 证明四边形 $DBCN$ 为平行四边形.

方法三: 证明点 M, N, D, E 在同一直线上, 根据 DE 为 $\triangle ABC$ 的中位线, 得出 $DE \parallel BC$ 且 $BC = 2DE$, 证明 $ME = BC$ 且 $ME \parallel BC$, 得出四边形 $MBCE$ 为平行四边形.

【小问 1 详解】

解: 如图所示:



【小问 2 详解】

解: 方法一: 四边形 $BCNM$ 为所求作的四边形

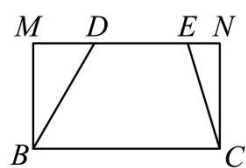


图1

方法二：四边形 $DBCN$ 是所求的四边形.

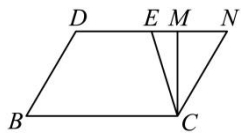
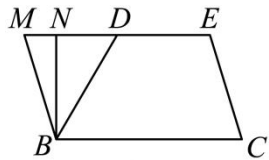


图2

方法三：四边形 $MBCE$ 是所求的四边形.



【小问 3 详解】

图3

解：方法一（图 1），

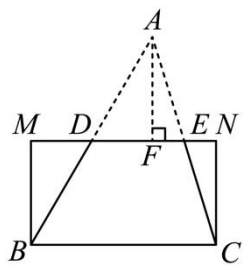


图1

$$\therefore \angle MDB + \angle BDE = 180^\circ, \angle DEC + \angle NEC = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 M, D, E, N 在同一直线上,

$\therefore$ 点 D, E 分别是 AB, AC 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel BC$ 且 $BC = 2DE$.

$\therefore MD + EN = DE$,

$\therefore MN = MD + DE + EN = BC$ 且 $MN \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $MBCN$ 为平行四边形.

$\therefore AF \perp DE$, $\angle M = 90^\circ$,

$\therefore$ 平行四边形 $MBCN$ 为矩形.

方法二（图 2），

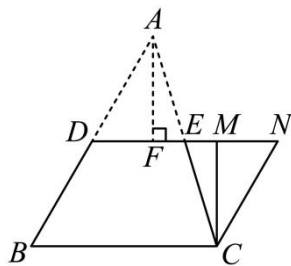


图2

$$\therefore \angle DEC + \angle MEC = 180^\circ, \angle EMC + \angle NMC = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 D, E, M, N 在同一直线上.

$\therefore$ 点 D, E 分别是 AB, AC 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel BC$ 且 $BC = 2DE$.

$\therefore EN = DE$,

$\therefore DN = BC$ 且 $DN \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $DBCN$ 为平行四边形.

方法三 (图 3),

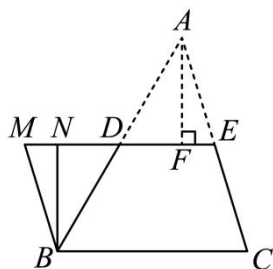


图3

$$\therefore \angle MNB + \angle BND = 180^\circ, \angle NDB + \angle BDE = 180^\circ,$$

$\therefore$ 点 M, N, D, E 在同一直线上.

$\therefore$ 点 D, E 分别是 AB, AC 的中点,

$\therefore DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线,

$\therefore DE \parallel BC$ 且 $BC = 2DE$.

$\therefore MD = DE$,

$\therefore ME = BC$ 且 $ME \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $MBCE$ 为平行四边形.

【点睛】 本题主要考查了旋转作图或平移作图，平行四边形的判定，矩形的判定，解题的关键熟练掌握旋转的性质和平移的性质.

23. 已知点 $(-m, 0)$ 和 $(3m, 0)$ 在二次函数 $y = ax^2 + bx + 3$ (a, b 是常数, $a \neq 0$) 的图像上.

(1) 当 $m = -1$ 时, 求 a 和 b 的值;

(2) 若二次函数的图像经过点 $A(n, 3)$ 且点 A 不在坐标轴上, 当 $-2 < m < -1$ 时, 求 n 的取值范围;

(3) 求证: $b^2 + 4a = 0$.

【答案】(1) $a = -1, b = -2$

(2) $-4 < n < -2$

(3) 见解析

【解析】

【分析】(1) 由 $m = -1$ 可得图像过点 $(1, 0)$ 和 $(-3, 0)$, 然后代入解析式解方程组即可解答;

(2) 先确定函数图像的对称轴为直线 $x = m$, 则抛物线过点 $(n, 3), (0, 3)$, 即 $n = 2m$, 然后再结合 $-2 < m < -1$ 即可解答;

(3) 根据图像的对称性得 $-\frac{b}{2a} = m$, 即 $b = -2am$, 顶点坐标为 $(m, am^2 + bm + 3)$; 将点 $(-m, 0)$ 和 $(3m, 0)$

分别代入表达式并进行运算可得 $am^2 = -1$; 则 $am^2 + bm + 3 = am^2 - 2am^2 + 3 = -am^2 + 3 = 4$, 进而得

到 $\frac{12a - b^2}{4a} = 4$, 然后化简变形即可证明结论.

【小问 1 详解】

解: 当 $m = -1$ 时, 图像过点 $(1, 0)$ 和 $(-3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 0 = a + b + 3 \\ 0 = 9a - 3b + 3 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 - 2x + 3,$$

$$\therefore a = -1, b = -2.$$

【小问 2 详解】

解: $\because$ 函数图像过点 $(-m, 0)$ 和 $(3m, 0)$,

$\therefore$ 函数图像的对称轴为直线 $x = m$.

$\because$ 图像过点 $(n, 3), (0, 3)$,

$\therefore$ 根据图像的对称性得 $n = 2m$.

$$\therefore -2 < m < -1,$$

$$\therefore -4 < n < -2.$$

【小问3详解】

解： $\because$ 图像过点 $(-m, 0)$ 和 $(3m, 0)$,

$$\therefore \text{根据图像的对称性得 } -\frac{b}{2a} = m.$$

$$\therefore b = -2am, \text{ 顶点坐标为 } (m, am^2 + bm + 3).$$

$$\text{将点 } (-m, 0) \text{ 和 } (3m, 0) \text{ 分别代入表达式可得 } \begin{cases} 0 = am^2 - bm + 3 \text{ ①} \\ 0 = 9am^2 + 3bm + 3 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①} \times 3 + \text{②} \text{ 得 } 12am^2 + 12 = 0,$$

$$\therefore am^2 = -1.$$

$$\therefore am^2 + bm + 3 = am^2 - 2am^2 + 3 = -am^2 + 3 = 4.$$

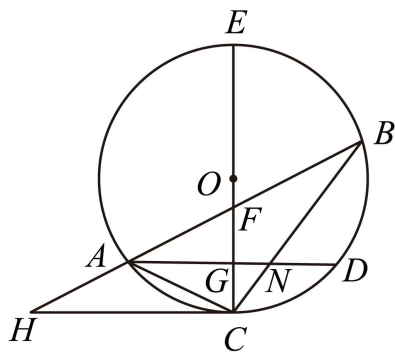
$$\therefore \frac{12a - b^2}{4a} = 4.$$

$$\therefore 12a - b^2 = 16a.$$

$$\therefore b^2 + 4a = 0.$$

【点睛】 本题主要考查了运用待定系数法求二次函数解析式、二次函数的对称性、解不等式等知识点，掌握二次函数的对称性是解答本题的关键.

24. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 是一条不过圆心 O 的弦，点 C, D 是 $\widehat{AB}$ 的三等分点，直径 CE 交 AB 于点 F ，连结 AD 交 CF 于点 G ，连结 AC ，过点 C 的切线交 BA 的延长线于点 H 。



(1) 求证： $AD \parallel HC$ ；

(2) 若 $\frac{OG}{GC} = 2$ ，求 $\tan \angle FAG$ 的值；

(3) 连结 BC 交 AD 于点 N ，若 $\odot O$ 的半径为 5

①若 $OF = \frac{5}{2}$ ，求 BC 的长；

②若 $AH = \sqrt{10}$ ，求 $\triangle ANB$ 的周长；

③若 $HF \cdot AB = 88$ ，求 $\triangle BHC$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(3) ① $\frac{5}{2}\sqrt{7}$ ；② $\frac{13\sqrt{10}}{5} + \frac{26}{3}$ ；③ $\frac{128}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据点 C, D 是 $\widehat{AB}$ 三等分点，得出 $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ ，根据 CE 是 $\odot O$ 的直径，可得 $CE \perp AD$ ，根据切线的性质可得 $HC \perp CE$ ，即可证明 $AD \parallel HC$ ；

(2) 如图 1，连结 AO ，证明 $\triangle CAG \cong \triangle FAG$ ，则 $CG = FG$ ，设 $CG = a$ ，则 $FG = a$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中由勾股定理得 $AO^2 = AG^2 + OG^2$ ，得出 $AG = \sqrt{5}a$ ，进而根据正切的定义即可求解；

(3) ①如图 1，连结 OA ，勾股定理确定 AG ，根据 $\widehat{AD} = \widehat{CB}$ ，可得 $BC = AD = \frac{5}{2}\sqrt{7}$ ；

②如图 2，连结 CD ，设 $CG = x$ ，则 $FG = x, OG = 5 - x$ ，解得 $x = 1$ 。则 $AG = 3, AD = 6$ ，证明 $\triangle CND \sim \triangle ACD$ ， $\triangle ANB \sim \triangle ACD$ ，进而根据相似三角形的性质即可求解；

③如图 3，过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M ，则 $AM = MB = \frac{1}{2}AB$ 。设 $CG = x$ ，则 $FG = x, OG = 5 - x, OF = 5 - 2x$ ，证明 $\triangle AFG \sim \triangle OFM$ ，得出 $AF \cdot FM = OF \cdot GF$ 则 $10x + x(5 - 2x) = 22$ ，得出 $CG = FG = 2$ ，则 $S_{\triangle CHA} = 8$ ，证明 $\triangle CHA \sim \triangle BHC$ ，根据相似三角形的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：∵点 C, D 是 $\widehat{AB}$ 三等分点，

∴ $\widehat{AC} = \widehat{CD} = \widehat{DB}$ 。

由 CE 是 $\odot O$ 的直径

∴ $CE \perp AD$ ，

∴ HC 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore HC \perp CE.$$

$$\therefore AD \parallel HC.$$

【小问 2 详解】

如图 1, 连结 AO , $\because \widehat{BD} = \widehat{CD}$,

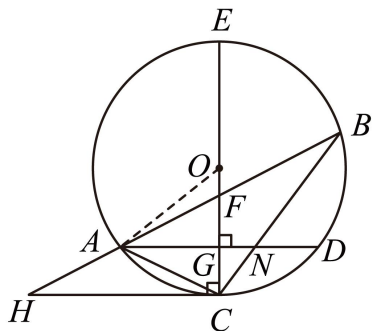


图1

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD .$$

由 $CE \perp AD$, 则 $\angle AGF = \angle AGC$,

又 $\because AG = AG$,

$$\therefore \triangle CAG \cong \triangle FAG,$$

$$\therefore CG = FG.$$

设 $CG = a$, 则 $FG = a$,

$$\therefore \frac{OG}{CG} = 2,$$

$$\therefore OG = 2a, AO = CO = 3a.$$

在 $\text{Rt}\triangle AOG$ 中由勾股定理得 $AO^2 = AG^2 + OG^2$,

$$\therefore (3a)^2 = AG^2 + (2a)^2,$$

$$\therefore AG = \sqrt{5}a .$$

$$\therefore \tan \angle FAG = \frac{FG}{AG} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

【小问 3 详解】

①如图 1, 连结 OA , $\because OF = \frac{5}{2}, OC = OA = 5$,

$$\therefore \angle HCF = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = AH = AF = \sqrt{10}.$$

设 $CG = x$, 则 $FG = x, OG = 5 - x$,

由勾股定理得 $AG^2 = AO^2 - OG^2 = AC^2 - CG^2$,

即 $25 - (5 - x)^2 = 10 - x^2$,

解得 $x = 1$.

$$\therefore AG = 3, AD = 6$$

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{DB},$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BCD.$$

$$\therefore \angle CDN = \angle ADC,$$

$$\therefore \triangle CND \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{ND}{CD} = \frac{CD}{AD},$$

$$\therefore ND = \frac{CD^2}{AD} = \frac{5}{3}, AN = \frac{13}{3}.$$

$$\therefore \angle BAD = \angle DAC, \angle ABN = \angle ADC,$$

$$\therefore \triangle ANB \sim \triangle ACD.$$

$$\therefore C_{\triangle ANB} = C_{\triangle ACD} \times \frac{AN}{AC} = (6 + 2\sqrt{10}) \times \frac{13}{3\sqrt{10}} = \frac{13\sqrt{10}}{5} + \frac{26}{3}.$$

③如图3, 过点 O 作 $OM \perp AB$ 于点 M , 则 $AM = MB = \frac{1}{2}AB$.

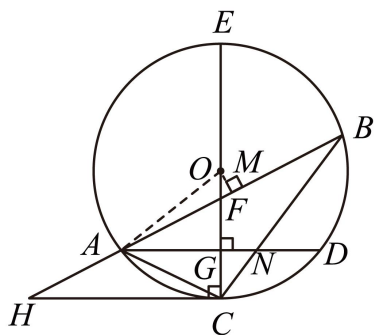


图3

设 $CG = x$, 则 $FG = x, OG = 5 - x, OF = 5 - 2x$,

由勾股定理得 $AG^2 = AO^2 - OG^2 = 25 - (5-x)^2 = 10x - x^2$,

$$AF^2 = AG^2 + FG^2 = 10x - x^2 + x^2 = 10x ,$$

$$\because AD \parallel HC, FG = GC ,$$

$$\therefore AH = AF = \frac{1}{2} HF ,$$

$$\therefore AG = \frac{1}{2} HC .$$

$$\therefore AF \cdot AM = \frac{1}{2} HF \cdot \frac{1}{2} AB = \frac{1}{4} HF \cdot AB = \frac{1}{4} \times 88 = 22 .$$

$$\because \angle AGF = \angle OMF = 90^\circ, \angle AFG = \angle OFM ,$$

$$\therefore \triangle AFG \sim \triangle OFM ,$$

$$\therefore \frac{AF}{OF} = \frac{GF}{FM} ,$$

$$\therefore AF \cdot FM = OF \cdot GF .$$

$$\therefore AF \cdot AM = AF \cdot (AF + FM) = AF^2 + AF \cdot FM = AF^2 + OF \cdot GF = 22 .$$

$$\text{可得方程 } 10x + x(5 - 2x) = 22 ,$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, x_2 = 5.5 \text{ (舍去)} .$$

$$\therefore CG = FG = 2 ,$$

$$\therefore OG = 3 ,$$

$$\therefore AG = 4 ,$$

$$\therefore HC = 8, AH = AF = 2\sqrt{5} .$$

$$\therefore S_{\triangle CHA} = 8 .$$

$$\because AD \parallel HC ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACH .$$

$$\because \widehat{AC} = \widehat{CD} ,$$

$$\therefore \angle B = \angle CAD ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACH .$$

$$\because \angle H = \angle H ,$$

$$\therefore \triangle CHA \sim \triangle BHC ,$$

$$\therefore S_{\triangle BHC} = 8 \times \left(\frac{HC}{AH} \right)^2 = \frac{128}{5}.$$

【点睛】 本题考查了圆的综合问题，相似三角形的性质与判定，解直角三角形，切线的性质，相似三角形的性质与判定熟练掌握是解题的关键.

【淘宝搜索店铺：中小学教辅资源店 微信：mlxt2022】