

江西省 2023 年初中学业水平考试数学试题卷

一、单项选择题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）在每小题列出的四个备选项中只有一项是最符合题目要求的，请将其代码填涂在答题卡相应位置。错选、多选或未选均不得分。

1. 下列各数中，正整数是（ ）

- A. 3 B. 2.1 C. 0 D. -2

【答案】A

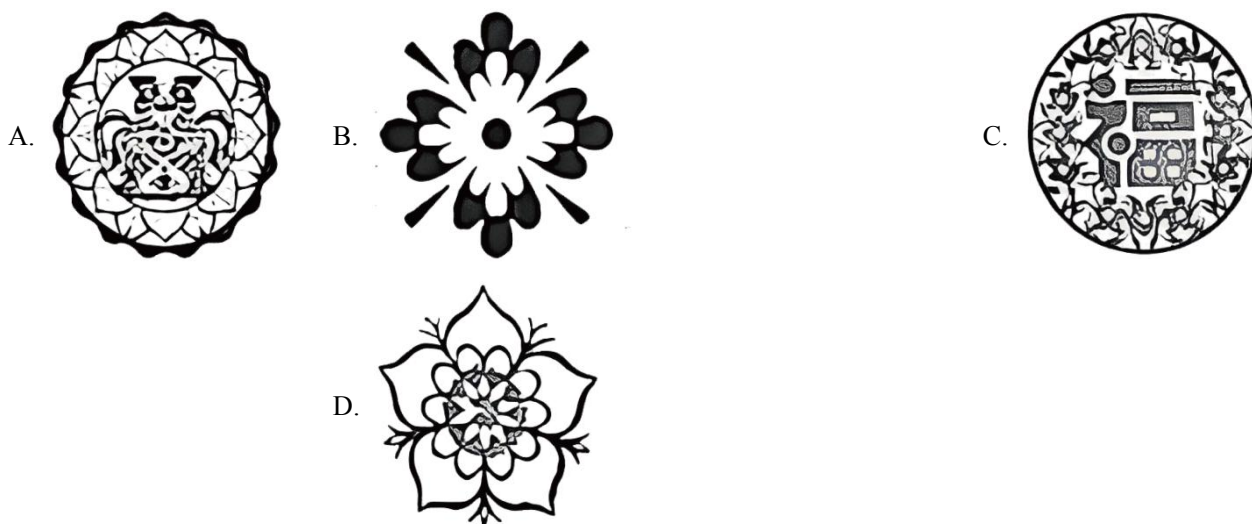
【解析】

【分析】根据有理数的分类即可求解。

【详解】解：3 是正整数，2.1 是小数，不是整数，0 不是正数，-2 不是正数，
故选：A.

【点睛】本题考查了有理数的分类，熟练掌握有理数的分类是解题的关键。

2. 下列图形中，是中心对称图形的是（ ）



【答案】B

【解析】

【分析】根据中心对称图形的定义：把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形可得答案。

【详解】解：选项 A、C、D 均不能找到这样的点，使图形绕某一点旋转 180° 后与原来的图形重合，所以不是中心对称图形；

选项 B 能找到这样的点，使图形绕某一点旋转 180° 后与原来的图形重合，所以是中心对称图形；

故选：B.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形，关键是找出对称中心。

3. 若 $\sqrt{a-4}$ 有意义，则 a 的值可以是 ()

- A. -1 B. 0 C. 2 D. 6

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件即可求解.

【详解】解： $\because \sqrt{a-4}$ 有意义，

$$\therefore a-4 \geq 0,$$

解得： $a \geq 4$ ，则 a 的值可以是 6

故选：D.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，熟练掌握二次根式有意义的条件是解题的关键.

4. 计算 $(2m^2)^3$ 的结果为 ()

- A. $8m^6$ B. $6m^6$ C. $2m^6$ D. $2m^5$

【答案】A

【解析】

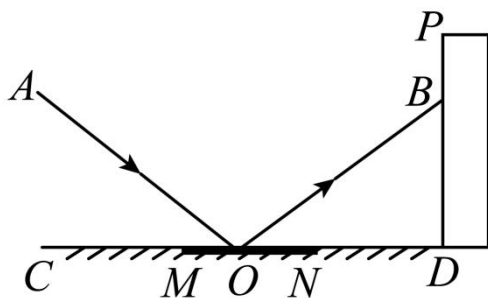
【分析】根据积的乘方计算法则求解即可.

【详解】解： $(2m^2)^3 = 8m^6$ ，

故选 A.

【点睛】本题主要考查了积的乘方计算，熟知相关计算法则是解题的关键.

5. 如图，平面镜 MN 放置在水平地面 CD 上，墙面 $PD \perp CD$ 于点 D ，一束光线 AO 照射到镜面 MN 上，反射光线为 OB ，点 B 在 PD 上，若 $\angle AOC = 35^\circ$ ，则 $\angle OBD$ 的度数为 ()



- A. 35° B. 45° C. 55° D. 65°

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可得 $\angle AOC = \angle BOD$ ，进而根据直角三角形的两个锐角互余即可求解.

【详解】解：依题意， $\angle AOC = \angle BOD$ ， $\angle AOC = 35^\circ$

$$\therefore \angle BOD = 35^\circ,$$

$$\because PD \perp CD,$$

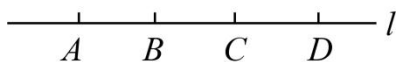
$$\therefore \angle OBD = 90^\circ - \angle BOD = 55^\circ,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了直角三角形中两个锐角互余，入射角等于反射角，熟练掌握以上知识是解题的关键.

6. 如图，点 A ， B ， C ， D 均在直线 l 上，点 P 在直线 l 外，则经过其中任意三个点，最多可画出圆的个数为（ ）

$P \bullet$



A. 3 个

B. 4 个

C. 5 个

D. 6 个

【答案】D

【解析】

【分析】根据不共线三点确定一个圆可得，直线上任意 2 个点加上点 P 可以画出一个圆，据此列举所有可能即可求解.

【详解】解：依题意， A, B ； A, C ； A, D ； B, C ； B, D ， C, D 加上点 P 可以画出一个圆，

$\therefore$ 共有 6 个，

故选：D.

【点睛】本题考查了确定圆的条件，熟练掌握不共线三点确定一个圆是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 单项式 $-5ab$ 的系数为_____.

【答案】-5

【解析】

【分析】根据单项式系数的定义：单项式中的数字因数，得出结果即可.

【详解】解：单项式 $-5ab$ 的系数是 -5.

故答案是：-5.

【点睛】本题考查单项式的系数，解题的关键是掌握单项式系数的定义.

8. 我国海洋经济复苏态势强劲. 在建和新开工海上风电项目建设规模约 1800 万千瓦，比上一年同期翻一番，

将 18000000 用科学记数法表示应为_____.

【答案】 1.8×10^7

【解析】

【分析】 根据科学记数法的表示形式进行解答即可.

【详解】 解： $18000000 = 1.8 \times 10^7$,

故答案为： 1.8×10^7 .

【点睛】 本题考查科学记数法，熟练掌握科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$, a 为整数) 的形式, n 的绝对值与小数点移动的位数相同是解题的关键.

9. 计算： $(a+1)^2 - a^2 =$ _____.

【答案】 $2a+1$

【解析】

【详解】 【分析】 原式利用完全平方公式展开，然后合并同类项即可得到结果.

【详解】 $(a+1)^2 - a^2$

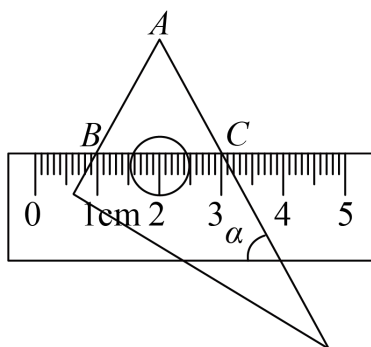
$$= a^2 + 2a + 1 - a^2$$

$$= 2a + 1,$$

故答案为 $2a+1$.

【点睛】 本题考查了整式的混合运算，熟练掌握完全平方公式以及合并同类项的法则是解题的关键.

10. 将含 30° 角的直角三角板和直尺按如图所示的方式放置，已 $\angle \alpha = 60^\circ$ ，点 B ， C 表示的刻度分别为 1cm, 3cm，则线段 AB 的长为_____cm.



【答案】 2

【解析】

【分析】 根据平行线的性质得出 $\angle ACB = 60^\circ$ ，进而可得 $\triangle ABC$ 是等边三角形，根据等边三角形的性质即

可求解.

【详解】解： $\because$ 直尺的两边平行，

$$\therefore \angle ACB = \angle \alpha = 60^\circ,$$

又 $\angle A = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\because$ 点 B ， C 表示的刻度分别为 1cm ， 3cm ，

$$\therefore BC = 2\text{cm},$$

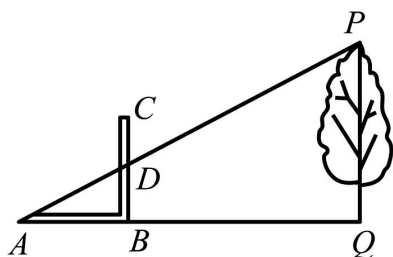
$$\therefore AB = BC = 2\text{cm}$$

$\therefore$ 线段 AB 的长为 2cm ，

故答案为：2.

【点睛】本题考查了平行线的性质，等边三角形的性质与判定，得出 $\angle ACB = 60^\circ$ 是解题的关键.

11. 《周髀算经》中记载了“偃矩以望高”的方法. “矩”在古代指两条边呈直角的曲尺（即图中的 ABC ）. “偃矩以望高”的意思是把“矩”仰立放，可测量物体的高度如图，点 A ， B ， Q 在同一水平线上， $\angle ABC$ 和 $\angle AQP$ 均为直角， AP 与 BC 相交于点 D . 测得 $AB = 40\text{cm}$ ， $BD = 20\text{cm}$ ， $AQ = 12\text{m}$ ，则树高 $PQ = \underline{\hspace{2cm}}\text{m}$.



【答案】6

【解析】

【分析】根据题意可得 $\triangle ABD \sim \triangle AQP$ ，然后相似三角形的性质，即可求解.

【详解】解： $\because \angle ABC$ 和 $\angle AQP$ 均为直角

$$\therefore BD \parallel PQ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle AQP,$$

$$\therefore \frac{BD}{PQ} = \frac{AB}{AQ}$$

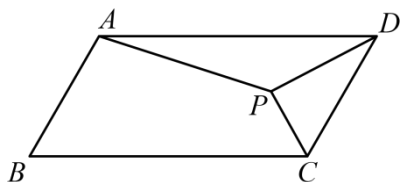
$$\therefore AB = 40\text{cm}, BD = 20\text{cm}, AQ = 12\text{m},$$

$$\therefore PQ = \frac{AQ \times BD}{AB} = \frac{12 \times 20}{40} = 6\text{m},$$

故答案为：6.

【点睛】 本题考查了相似三角形的应用，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

12. 如图，在 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $BC = 2AB$ ，将 AB 绕点 A 逆时针旋转角 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$) 得到 AP ，连接 PC ， PD 。当 $\triangle PCD$ 为直角三角形时，旋转角 α 的度数为_____.

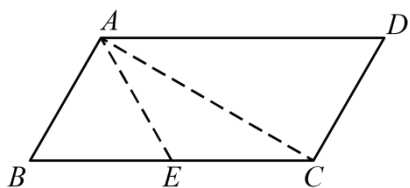


【答案】 90° 或 270° 或 180°

【解析】

【分析】 连接 AC ，根据已知条件可得 $\angle BAC = 90^\circ$ ，进而分类讨论即可求解.

【详解】 解：连接 AC ，取 BC 的中点 E ，连接 AE ，如图所示，



$\therefore$ 在 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $BC = 2AB$ ，

$$\therefore BE = CE = \frac{1}{2}BC = AB,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle BAE = \angle AEB = 60^\circ, \quad AE = BE,$$

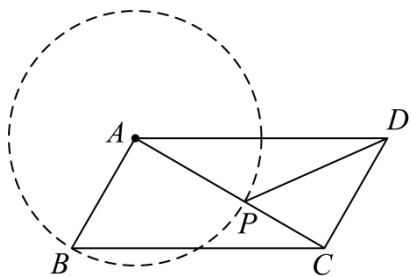
$$\therefore AE = EC$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA = \frac{1}{2}\angle AEB = 30^\circ,$$

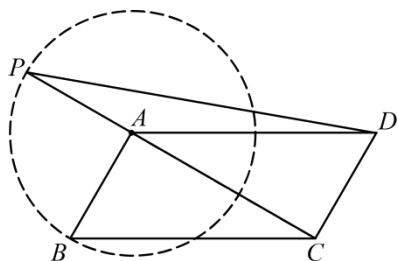
$$\therefore \angle BAC = 90^\circ$$

$$\therefore AC \perp CD,$$

如图所示，当点 P 在 AC 上时，此时 $\angle BAP = \angle BAC = 90^\circ$ ，则旋转角 α 的度数为 90° ，



当点 P 在 CA 的延长线上时，如图所示，则 $\alpha = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$



当 P 在 BA 的延长线上时，则旋转角 α 的度数为 180° ，如图所示，

$\because PA = PB = CD, PB \parallel CD,$

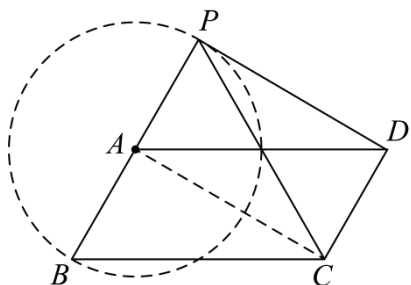
$\therefore$ 四边形 $PACD$ 是平行四边形，

$\because AC \perp AB$

$\therefore$ 四边形 $PACD$ 是矩形，

$\therefore \angle PDC = 90^\circ$

即 $\triangle PDC$ 是直角三角形，



综上所述，旋转角 α 的度数为 90° 或 270° 或 180°

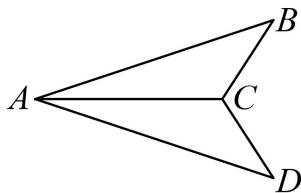
故答案为： 90° 或 270° 或 180° .

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，矩形的性质与判定，旋转的性质，熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

13. (1) 计算： $\sqrt[3]{8} + \tan 45^\circ - 3^0$

(2) 如图， $AB = AD$ ， AC 平分 $\angle BAD$. 求证： $\triangle ABC \cong \triangle ADC$.



【答案】(1) 2; (2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 先计算立方根，特殊角三角函数值和零指数幂，再计算加减法即可；

(2) 先由角平分线的定义得到 $\angle BAC = \angle DAC$ ，再利用 SAS 证明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$ 即可.

【详解】解：(1) 原式 $= 2 + 1 - 1$

$= 2$;

(2) $\because AC$ 平分 $\angle BAD$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AD \\ \angle BAC = \angle DAC, \\ AC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$ (SAS).

【点睛】本题主要考查了实数的运算，零指数幂，特殊角三角函数值，全等三角形的判定，角平分线的定义等等，灵活运用所学知识是解题的关键.

14. 如图是 4×4 的正方形网格，请仅用无刻度的直尺按要求完成以下作图（保留作图痕迹）.

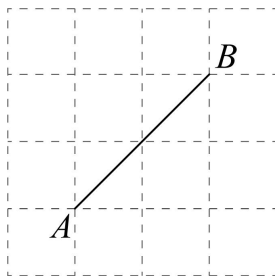


图1

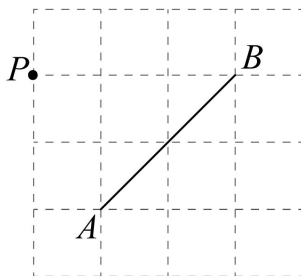


图2

(1) 在图 1 中作锐角 $\triangle ABC$ ，使点 C 在格点上；

(2) 在图 2 中的线段 AB 上作点 Q ，使 PQ 最短.

【答案】(1) 作图见解析

(2) 作图见解析

【解析】

【分析】(1) 如图，取格点 K ，使 $\angle AKB = 90^\circ$ ，在 K 的左上方的格点 C 满足条件，再画三角形即可；

(2) 利用小正方形的性质取格点 M ，连接 PM 交 AB 于 Q ，从而可得答案.

【小问 1 详解】

解：如图， $\triangle ABC$ 即为所求作的三角形；

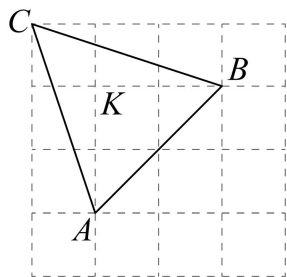


图1

【小问 2 详解】

如图， Q 即为所求作的点；

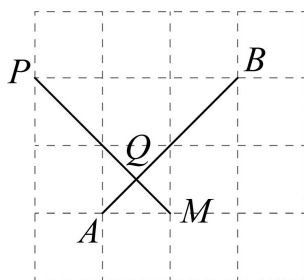


图2

【点睛】本题考查的是复杂作图，同时考查了三角形的外角的性质，正方形的性

质，垂线段最短，熟记基本几何图形的性质再灵活应用是解本题的关键.

15. 化简 $\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1}\right) \cdot \frac{x^2-1}{x}$. 下面是甲、乙两同学的部分运算过程：

 甲同学	解：原式 $= \left[\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] \cdot \frac{x^2-1}{x}$
解：原式 $= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x}$	 乙同学

(1) 甲同学解法的依据是_____，乙同学解法的依据是_____；(填序号)

①等式的基本性质；②分式的基本性质；③乘法分配律；④乘法交换律.

(2) 请选择一种解法，写出完整的解答过程.

【答案】(1) ②，③ (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据所给的解题过程即可得到答案；

(2) 甲同学的解法：先根据分式的基本性质把小括号内的分式先同分，然后根据分式的加法计算法则求解，最后根据分式的乘法计算法则求解即可；

乙同学的解法：根据乘法分配律去括号，然后计算分式的乘法，最后合并同类项即可。

【小问 1 详解】

解：根据解题过程可知，甲同学解法的依据是分式的基本性质，乙同学解法的依据是乘法分配律，

故答案为：②，③；

【小问 2 详解】

解：甲同学的解法：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \left[\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)} \right] \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x^2-x+x^2+x}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= 2x;\end{aligned}$$

乙同学的解法：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x} \\ &= \frac{x}{x+1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x} \\ &= x-1+x+1 \\ &= 2x.\end{aligned}$$

【点睛】本题主要考查了分式的混合计算，熟知相关计算法则是解题的关键。

16. 为了弘扬雷锋精神，某校组织“学雷锋，争做新时代好少年”的宣传活动，根据活动要求，每班需要 2 名宣传员，某班班主任决定从甲、乙、丙、丁 4 名同学中随机选取 2 名同学作为宣传员。

(1) “甲、乙同学都被选为宣传员”是_____事件：(填“必然”、“不可能”或“随机”)

(2) 请用画树状图法或列表法，求甲、丁同学都被选为宣传员的概率。

【答案】(1) 随机 (2) $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】(1) 由确定事件与随机事件的概念可得答案；

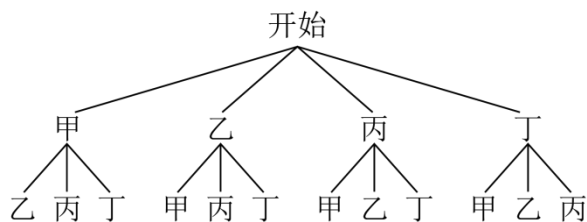
(2) 先画树状图得到所有可能的情况数与符合条件的情况数，再利用概率公式计算即可.

【小问 1 详解】

解：“甲、乙同学都被选为宣传员”是随机事件；

【小问 2 详解】

画树状图为：

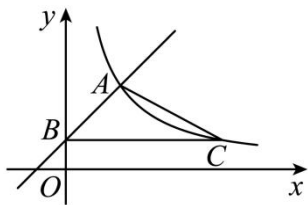


共有 12 种等可能的结果，其中选中的两名同学恰好是甲，丁的结果数为 2，

所以选中的两名同学恰好是甲，丁的概率 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点睛】本题考查的是事件的含义，利用画树状图求解随机事件的概率，熟记事件的概念与分类以及画树状图的方法是解本题的关键.

17. 如图，已知直线 $y = x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(2, 3)$ ，与 y 轴交于点 B ，过点 B 作 x 轴的平行线交反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象于点 C .



(1) 求直线 AB 和反比例函数图象的表达式；

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】(1) 直线 AB 的表达式为 $y = x + 1$ ，反比例函数的表达式为 $y = \frac{6}{x}$

(2) 6

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求函数解析式即可；

(2) 由一次函数解析式求得点 B 的坐标，再根据 $BC \parallel x$ 轴，可得点 C 的纵坐标为 1，再利用反比例函数表达式求得点 C 坐标，即可求得结果.

【小问 1 详解】

解：∵直线 $y = x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(2, 3)$,

$$\therefore k = 2 \times 3 = 6, \quad 2 + b = 3, \quad \text{即 } b = 1,$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的表达式为 } y = x + 1, \quad \text{反比例函数的表达式为 } y = \frac{6}{x}.$$

【小问 2 详解】

解：∵直线 $y = x + 1$ 的图象与 y 轴交于点 B ,

$$\therefore \text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 1,$$

$$\therefore B(0, 1),$$

∵ $BC \parallel x$ 轴, 直线 BC 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 C ,

∴点 C 的纵坐标为 1,

$$\therefore \frac{6}{x} = 1, \quad \text{即 } x = 6,$$

$$\therefore C(6, 1),$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 = 6.$$

【点睛】本题考查用待定系数法求一次函数和反比例函数解析式、一次函数与反比例函数的交点、一次函数与 y 轴的交点, 熟练掌握用待定系数法求函数解析式是解题的关键.

四、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

18. 今年植树节, 某班同学共同种植一批树苗, 如果每人种 3 棵, 则剩余 20 棵; 如果每人种 4 棵, 则还缺 25 棵.

(1) 求该班的学生人数;

(2) 这批树苗只有甲、乙两种, 其中甲树苗每棵 30 元, 乙树苗每棵 40 元. 购买这批树苗的总费用没有超过 5400 元, 请问至少购买了甲树苗多少棵?

【答案】(1) 该班的学生人数为 45 人

(2) 至少购买了甲树苗 80 棵

【解析】

【分析】(1) 设该班的学生人数为 x 人, 根据两种方案下树苗的总数不变列出方程求解即可;

(2) 根据 (1) 所求出树苗的总数为 155 棵, 设购买了甲树苗 m 棵, 则购买了乙树苗 $(155 - m)$ 棵树苗, 再根据总费用不超过 5400 元列出不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：设该班的学生人数为 x 人，

由题意得， $3x + 20 = 4x - 25$ ，

解得 $x = 45$ ，

$\therefore$ 该班的学生人数为 45 人；

【小问 2 详解】

解：由 (1) 得一共购买了 $3 \times 45 + 20 = 155$ 棵树苗，

设购买了甲树苗 m 棵，则购买了乙树苗 $(155 - m)$ 棵树苗，

由题意得， $30m + 40(155 - m) \leq 5400$ ，

解得 $m \geq 80$ ，

$\therefore m$ 得最小值为 80，

$\therefore$ 至少购买了甲树苗 80 棵，

答：至少购买了甲树苗 80 棵.

【点睛】 本题主要考查了一元一次方程的实际应用，一元一次不等式的实际应用，正确理解题意找到等量关系列出方程，找到不等关系列出不等式是解题的关键.

19. 如图 1 是某红色文化主题公园内的雕塑，将其抽象成如图 2 所示的示意图，已知点 B ， A ， D ， E 均在同一直线上， $AB = AC = AD$ ，测得 $\angle B = 55^\circ$ ， $BC = 1.8\text{m}$ ， $DE = 2\text{m}$. (结果保小数点后一位)



图1

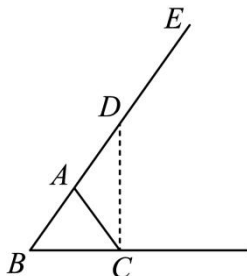


图2

(1) 连接 CD ，求证： $DC \perp BC$ ；

(2) 求雕塑的高 (即点 E 到直线 BC 的距离).

(参考数据: $\sin 55^\circ \approx 0.82$, $\cos 55^\circ \approx 0.57$, $\tan 55^\circ \approx 1.43$)

【答案】 (1) 见解析 (2) 雕塑的高约为 4.2 米

【解析】

【分析】 (1) 根据等边对等角得出 $\angle B = \angle ACB$, $\angle ACD = \angle ADC$ ，根据三角形内角和定理得出 $2(\angle B + \angle ADC) = 180^\circ$ ，进而得出 $\angle BCD = 90^\circ$ ，即可得证；

(2) 过点 E 作 $EF \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F ，在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中，得出 $AD = \frac{BC}{\cos B} = \frac{1.8}{\cos 55^\circ}$ ，则 $BE = AD + DE = 2 + \frac{1.8}{\cos 55^\circ}$ ，在 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中，根据 $EF = BE \cdot \sin B$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

解： $\because AB = AC = AD$ ，

$$\therefore \angle B = \angle ACB, \angle ACD = \angle ADC$$

$$\because \angle B + \angle ADC + \angle BCD = 180^\circ$$

$$\text{即 } 2(\angle B + \angle ADC) = 180^\circ$$

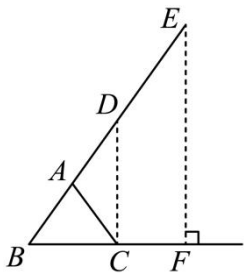
$$\therefore \angle B + \angle ADC = 90^\circ$$

$$\text{即 } \angle BCD = 90^\circ$$

$$\therefore DC \perp BC;$$

【小问 2 详解】

如图所示，过点 E 作 $EF \perp BC$ ，交 BC 的延长线于点 F ，



在 $\text{Rt}\triangle BDC$ 中， $\angle B = 55^\circ$ ， $BC = 1.8\text{m}$ ， $DE = 2\text{m}$

$$\therefore \cos B = \frac{BC}{AD},$$

$$\therefore AD = \frac{BC}{\cos B} = \frac{1.8}{\cos 55^\circ}$$

$$\therefore BE = AD + DE = 2 + \frac{1.8}{\cos 55^\circ}$$

在 $\text{Rt}\triangle EBF$ 中， $\sin B = \frac{EF}{BE}$ ，

$$\therefore EF = BE \cdot \sin B$$

$$= \left(2 + \frac{1.8}{\cos 55^\circ} \right) \times \sin 55^\circ$$

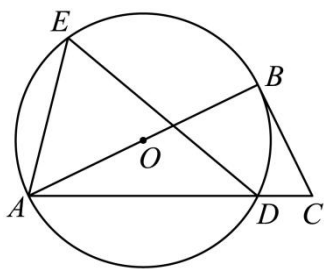
$$\approx \left(2 + \frac{1.8}{0.57} \right) \times 0.82$$

≈ 4.2 (米).

答：雕塑的高约为4.2米.

【点睛】本题考查了等腰三角形的性质，三角形内角和定理的应用，解直角三角形的应用，熟练掌握三角函数的定义是解题的关键.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$ ， $\angle C = 64^\circ$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 AC 相交于点 D ， E 为 $\widehat{ABD}$ 上一点，且 $\angle ADE = 40^\circ$.



(1) 求 $\widehat{BE}$ 的长；

(2) 若 $\angle EAD = 76^\circ$ ，求证： CB 为 $\odot O$ 的切线.

【答案】(1) $\frac{10}{9}\pi$

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 如图所示，连接 OE ，先求出 $OE = OB = OA = 2$ ，再由圆周角定理得到 $\angle AOE = 2\angle ADE = 80^\circ$ ，进而求出 $\angle BOE = 100^\circ$ ，再根据弧长公式进行求解即可；

(2) 如图所示，连接 BD ，先由三角形内角和定理得到 $\angle AED = 64^\circ$ ，则由圆周角定理可得 $\angle ABD = \angle AED = 64^\circ$ ，再由 AB 是 $\odot O$ 的直径，得到 $\angle ADB = 90^\circ$ ，进而求出 $\angle BAC = 26^\circ$ ，进一步推出 $\angle ABC = 90^\circ$ ，由此即可证明 BC 是 $\odot O$ 的切线.

【小问1详解】

解：如图所示，连接 OE ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且 $AB = 4$ ，

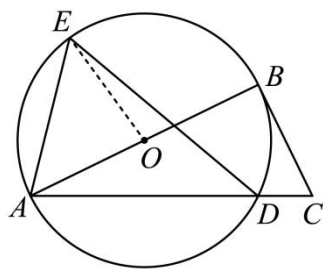
$\therefore OE = OB = OA = 2$ ，

$\because E$ 为 $\widehat{ABD}$ 上一点，且 $\angle ADE = 40^\circ$ ，

$\therefore \angle AOE = 2\angle ADE = 80^\circ$ ，

$\therefore \angle BOE = 180^\circ - \angle AOE = 100^\circ$ ，

$\therefore \widehat{BE}$ 的长 $= \frac{100 \times \pi \times 2}{180} = \frac{10}{9}\pi$ ；



【小问 2 详解】

证明：如图所示，连接 BD ，

$$\because \angle EAD = 76^\circ, \angle ADE = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle EAD - \angle ADE = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle AED = 64^\circ,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

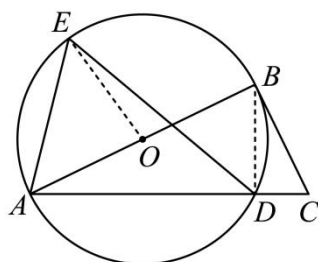
$$\therefore \angle BAC = 90^\circ - \angle ABD = 26^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle C - \angle BAC = 90^\circ, \text{ 即 } AB \perp BC,$$

$\because OB$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线.



【点睛】本题主要考查了切线的判定，求弧长，圆周角定理，三角形内角和

定理等等，正确作出辅助线是解题的关键

五、解答题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

21. 为了解中学生的视力情况，某区卫健部门决定随机抽取本区部分初、高中学生进行调查，并对他们的视力数据进行了整理，得到如下统计表和统计图.

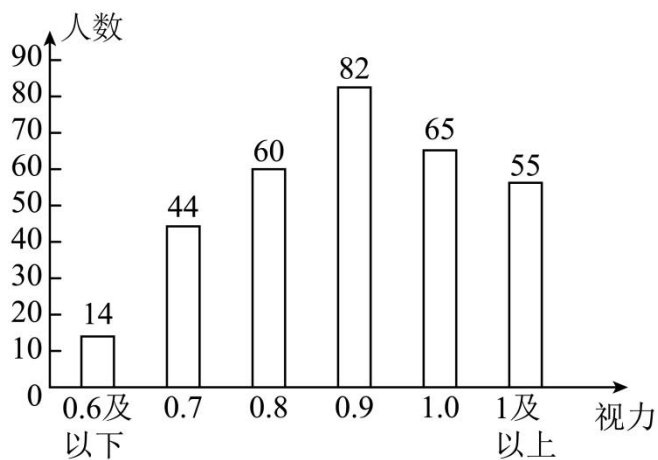
整理描述

初中学生视力情况统计表

视力	人数	百分比
0.6 及以下	8	4%

0.7	16	8%
0.8	28	14%
0.9	34	17%
1.0	m	34%
1.1及以上	46	n
合计	200	100%

高中学生视力情况统计图



(1) $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) 被调查的高中学生视力情况的样本容量为 $\underline{\hspace{2cm}}$;

(3) 分析处理：①小胡说：“初中学生的视力水平比高中学生的好。”请你对小胡的说法进行判断，并选择一个能反映总体的统计量说明理由：

②约定：视力未达到1.0为视力不良。若该区有 26000 名初中学生，估计该区有多少名初中学生视力不良？并对视力保护提出一条合理化建议。

【答案】 (1) 68；23%；

(2) 320；

(3) ①小胡的说法合理，选择中位数，理由见解析；②11180 人，合理化建议见解析，合理即可。

【解析】

【分析】 (1) 由总人数乘以视力为1.0的百分比可得 m 的值，再由视力 1.1 及以上的人数除以总人数可得 n 的值；

(2) 由条形统计图中各数据之和可得答案；

(3) ①选择视力的中位数进行比较即可得到小胡说法合理；②由初中生总人数乘以样本中视力不良的百分

比即可，根据自身体会提出合理化建议即可.

【小问 1 详解】

解：由题意可得：初中样本总人数为：200 人，

$$\therefore m = 34\% \times 200 = 68 \text{ (人)}, n = 46 \div 200 = 23\%;$$

【小问 2 详解】

由题意可得： $14 + 44 + 60 + 82 + 65 + 55 = 320$,

$\therefore$ 被调查的高中学生视力情况的样本容量为 320;

【小问 3 详解】

①小胡说：“初中学生的视力水平比高中学生的好.”

小胡的说法合理;

初中学生视力的中位数为第 100 个与第 101 个数据的平均数，落在视力为 1.0 这一组，

而高中学生视力的中位数为第 160 个与第 161 个数据的平均数，落在视力为 0.9 的这一组，

而 $1.0 > 0.9$,

$\therefore$ 小胡的说法合理.

②由题意可得： $26000 \times (1 - 34\% - 23\%) = 11180$ (人),

$\therefore$ 该区有 26000 名中学生，估计该区有 11180 名中学生视力不良;

合理化建议为：学校可以多开展用眼知识的普及，规定时刻做眼保健操.

【点睛】 本题考查的是从频数分布表与频数分布直方图中获取信息，中位数的含义，利用样本估计总体，理解题意，确定合适的统计量解决问题是解本题的关键.

22. 课本再现

思考

我们知道，菱形的对角线互相垂直. 反过来，对角线互相垂直的平行四边形是菱形吗？

可以发现并证明菱形的一个判定定理：

对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

(1) 定理证明：为了证明该定理，小明同学画出了图形（如图 1），并写出了“已知”和“求证”，请你完成证明过程.

已知：在 $ABCD$ 中，对角线 $BD \perp AC$ ，垂足为 O .

求证： $ABCD$ 是菱形.

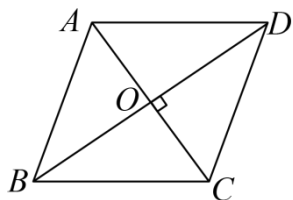


图1

(2) 知识应用：如图2，在 $ABCD$ 中，对角线 AC 和 BD 相交于点 O ， $AD = 5$ ， $AC = 8$ ， $BD = 6$ 。

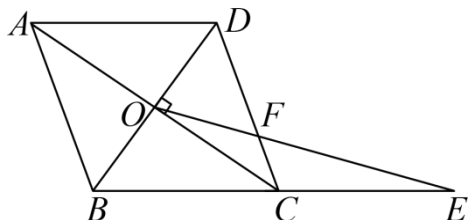


图2

①求证： $ABCD$ 是菱形；

②延长 BC 至点 E ，连接 OE 交 CD 于点 F ，若 $\angle E = \frac{1}{2}\angle ACD$ ，求 $\frac{OF}{EF}$ 的值。

【答案】(1) 见解析 (2) ①见解析；② $\frac{5}{8}$

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质证明 $\triangle AOB \cong \triangle COB$ 得出 $AB = CB$ ，同理可得 $\triangle DOA \cong \triangle ODC$ ，则 $DA = DC$ ， $AB = CD$ ，进而根据四边相等的四边形是菱形，即可得证；

(2) ①勾股定理的逆定理证明 $\triangle AOD$ 是直角三角形，且 $\angle AOD = 90^\circ$ ，得出 $AC \perp BD$ ，即可得证；

②根据菱形的性质结合已知条件得出 $\angle E = \angle COE$ ，则 $OC = OE = \frac{1}{2}AC = 4$ ，过点 O 作 $OG \parallel CD$ 交 BC 于点 G ，根据平行线分线段成比例求得 $CG = \frac{1}{2}CB = \frac{5}{2}$ ，然后根据平行线分线段成比例即可求解。

【小问1详解】

证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AO = CO, \quad AB = DC,$$

$$\because BD \perp AC$$

$$\therefore \angle AOB = \angle COB = 90^\circ,$$

在 $\triangle AOB, \triangle COB$ 中，

$$\begin{cases} AO = CO \\ \angle AOB = \angle COB \\ BO = BO \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COB$$

$$\therefore AB = CB,$$

同理可得 $\triangle DOA \cong \triangle ODC$ ，则 $DA = DC$ ，

$$\text{又} \because AB = CD$$

$$\therefore AB = BC = CD = DA$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

【小问 2 详解】

①证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形， $AD = 5$ ， $AC = 8$ ， $BD = 6$ 。

$$\therefore DO = BO = \frac{1}{2}BD = 3, AO = CO = \frac{1}{2}AC = 4$$

在 $\triangle AOD$ 中， $AD^2 = 25$ ， $AO^2 + OD^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ ，

$$\therefore AD^2 = AO^2 + OD^2,$$

$\therefore \triangle AOD$ 是直角三角形，且 $\angle AOD = 90^\circ$ ，

$$\therefore AC \perp BD,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

② $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形；

$$\therefore \angle ACB = \angle ACD$$

$$\because \angle E = \frac{1}{2}\angle ACD,$$

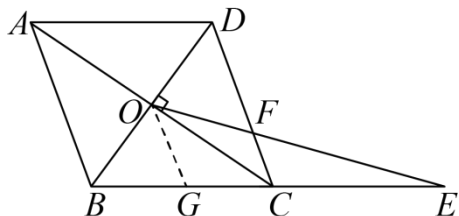
$$\therefore \angle E = \frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\because \angle ACB = \angle E + \angle COE,$$

$$\therefore \angle E = \angle COE,$$

$$\therefore OC = OE = \frac{1}{2}AC = 4,$$

如图所示，过点 O 作 $OG \parallel CD$ 交 BC 于点 G ，



$$\therefore \frac{BG}{GC} = \frac{BO}{OD} = 1,$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = \frac{5}{2},$$

$$\therefore \frac{OF}{EF} = \frac{GC}{CE} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8}.$$

【点睛】本题考查了菱形的性质与判定，勾股定理以及勾股定理的逆定理，等腰三角形的性质与判定，平行线分线段成比例，熟练掌握菱形的性质与判定是解题的关键.

六、解答题 (本大题共 12 分)

23. 综合与实践

问题提出：某兴趣小组开展综合实践活动：在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， D 为 AC 上一点， $CD = \sqrt{2}$ ，动点 P 以每秒 1 个单位的速度从 C 点出发，在三角形边上沿 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 匀速运动，到达点 A 时停止，以 DP 为边作正方形 $DPEF$ 设点 P 的运动时间为 t s，正方形 $DPEF$ 的面积为 S ，探究 S 与 t 的关系

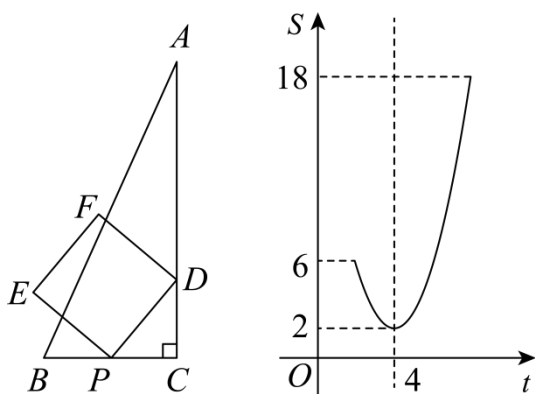


图1

图2

(1) 初步感知：如图 1，当点 P 由点 C 运动到点 B 时，

①当 $t = 1$ 时， $S = \underline{\hspace{2cm}}$.

② S 关于 t 的函数解析式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 当点 P 由点 B 运动到点 A 时，经探究发现 S 是关于 t 的二次函数，并绘制成如图 2 所示的图象请根据图象信息，求 S 关于 t 的函数解析式及线段 AB 的长.

(3) 延伸探究：若存在 3 个时刻 t_1, t_2, t_3 ($t_1 < t_2 < t_3$) 对应的正方形 $DPEF$ 的面积均相等.

① $t_1 + t_2 = \underline{\hspace{2cm}}$;

②当 $t_3 = 4t_1$ 时，求正方形 $DPEF$ 的面积.

【答案】(1) ①3; ② $S = t^2 + 4$

(2) $S = t^2 - 8t + 18$ ($2 \leq t \leq 8$), $AB = 6$

(3) ①4; ② $\frac{34}{9}$

【解析】

【分析】(1) ①先求出 $CP=1$ ，再利用勾股定理求出 $DP=\sqrt{3}$ ，最后根据正方形面积公式求解即可；②仿照 (1) ①先求出 $CP=t$ ，进而求出 $DP^2=t^2+2$ ，则 $S=DP^2=t^2+2$ ；

(2) 先由函数图象可得当点 P 运动到 B 点时， $S=DP^2=6$ ，由此求出当 $t=2$ 时， $S=6$ ，可设 S 关于 t 的函数解析式为 $S=a(t-4)^2+2$ ，利用待定系数法求出 $S=t^2-8t+18$ ，进而求出当 $S=t^2-8t+18=18$ 时，求得 t 的值即可得答案；

(3) ①根据题意可得可知函数 $S=(t-4)^2+2$ 可以看作是由函数 $S=t^2+2$ 向右平移四个单位得到的，设 $P(m_1, n)$ ， $Q(m_2, n)$ ($m_2 > m_1$) 是函数 $S=t^2+2$ 上的两点，则 (m_1+4, n) ， (m_2+4, n) 是函数 $S=(t-4)^2+2$ 上的两点，由此可得 $m_1+m_2=0$ ， $m_1 < m_2 < m_1+4 < m_2+4$ ，则 $m_2+m_1+4=4$ ，根据题意可以看作 $t_1=m_2$ ， $t_2=m_1+4$ ， $t_3=m_2+4$ ，则 $t_1+t_2=4$ ；②由 (3) ①可得 $t_3=t_1+4$ ，再由 $t_3=4t_1$ ，得到 $t_1=\frac{4}{3}$ ，继而得答案。

【小问 1 详解】

解：∵动点 P 以每秒 1 个单位的速度从 C 点出发，在三角形边上沿 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 匀速运动，

∴当 $t=1$ 时，点 P 在 BC 上，且 $CP=1$ ，

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad CD = \sqrt{2},$$

$$\therefore DP = \sqrt{CP^2 + CD^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S = DP^2 = 3,$$

故答案为：3；

②∵动点 P 以每秒 1 个单位的速度从 C 点出发，在 BC 匀速运动，

$$\therefore CP = t,$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad CD = \sqrt{2},$$

$$\therefore DP^2 = CP^2 + CD^2 = t^2 + 2,$$

$$\therefore S = DP^2 = t^2 + 2;$$

【小问 2 详解】

解：由图 2 可知当点 P 运动到 B 点时， $S = DP^2 = 6$ ，

$$\therefore t^2 + 4 = 6,$$

解得 $t = 2$,

$\therefore$ 当 $t = 2$ 时, $S = 6$,

由图 2 可知, 对应的二次函数的顶点坐标为 $(4, 2)$,

$\therefore$ 可设 S 关于 t 的函数解析式为 $S = a(t - 4)^2 + 2$,

把 $(2, 6)$ 代入 $S = a(t - 4)^2 + 2$ 中得: $6 = a(2 - 4)^2 + 2$,

解得 $a = 1$,

$\therefore S$ 关于 t 的函数解析式为 $S = (t - 4)^2 + 2 = t^2 - 8t + 18 (2 \leq t \leq 8)$,

在 $S = t^2 - 8t + 18$ 中, 当 $S = t^2 - 8t + 18 = 18$ 时, 解得 $t = 8$ 或 $t = 0$,

$\therefore AB = 8 - 2 = 6$;

【小问 3 详解】

解: ① $\because$ 点 P 在 BC 上运动时, $S = t^2 + 2$, 点 P 在 AB 上运动时 $S = (t - 4)^2 + 2$,

$\therefore$ 可知函数 $S = (t - 4)^2 + 2$ 可以看作是由函数 $S = t^2 + 2$ 向右平移四个单位得到的,

设 $P(m_1, n)$, $Q(m_2, n) (m_2 > m_1)$ 是函数 $S = t^2 + 2$ 上的两点, 则 $(m_1 + 4, n)$, $(m_2 + 4, n)$ 是函数

$S = (t - 4)^2 + 2$ 上的两点,

$\therefore m_1 + m_2 = 0, m_1 < m_2 < m_1 + 4 < m_2 + 4$,

$\therefore m_2 + m_1 + 4 = 4$,

$\therefore$ 存在 3 个时刻 $t_1, t_2, t_3 (t_1 < t_2 < t_3)$ 对应的正方形 $DPEF$ 的面积均相等.

$\therefore$ 可以看作 $t_1 = m_2, t_2 = m_1 + 4, t_3 = m_2 + 4$,

$\therefore t_1 + t_2 = 4$,

故答案为: 4;

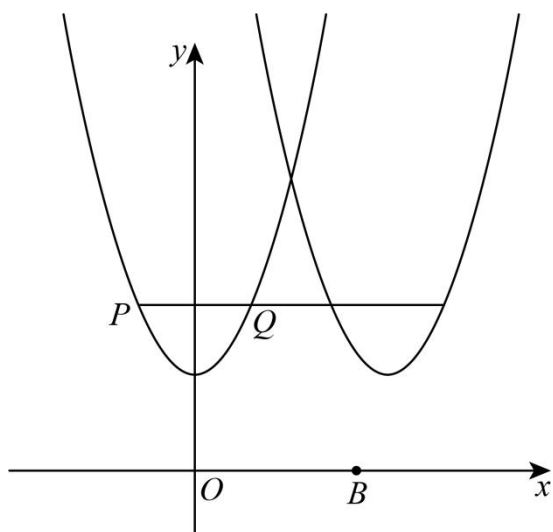
②由 (3) ①可得 $t_3 = t_1 + 4$,

$\therefore t_3 = 4t_1$,

$\therefore 4t_1 = t_1 + 4$,

$\therefore t_1 = \frac{4}{3}$,

$$\therefore S = t^2 + 2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 + 2 = \frac{34}{9}.$$



【点睛】 本题主要考查了二次函数与图形运动问题，待定系数法求函数解析式，勾股定理等等，正确理解题意利用数形结合的思想求解是解题的关键.

