

2023 年苏州市初中学业水平考试试卷

数学

注意事项：

1. 本试卷共 27 小题，满分 130 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、考点名称、考场号、座位号用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在答题卡相应位置上，并认真核对条形码上的准考证号、姓名是否与本人的相符；
3. 答选择题必须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；答非选择题必须用 0.5 毫米黑色，墨水签字笔写在答题卡指定的位置上，不在答题区域内的答案一律无效，不得用其他笔答题；
4. 考生答题必须答在答题卡上，保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破，答在试卷和草稿纸上一律无效。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。请将选择题的答案用 2B 铅笔涂在答题卡相对应的位置上。

1. 有理数 $\frac{2}{3}$ 的相反数是 ()
- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\pm\frac{2}{3}$

【答案】A

【解析】

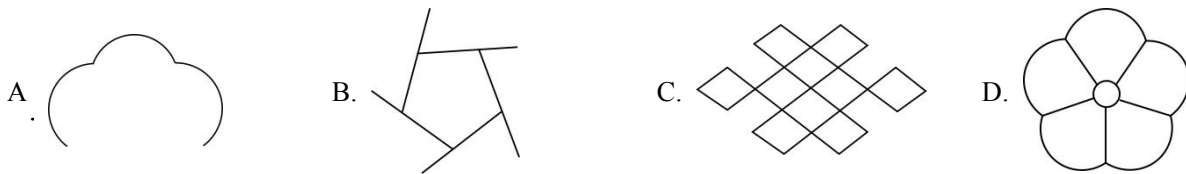
【分析】根据互为相反数的定义进行解答即可。

【详解】解：有理数 $\frac{2}{3}$ 的相反数是 $-\frac{2}{3}$ ，

故选 A

【点睛】本题考查的是相反数，仅仅只有符号不同的两个数互为相反数，熟记定义是解本题的关键。

2. 古典园林中的花窗通常利用对称构图，体现对称美。下面四个花窗图案，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】C

【解析】

【分析】根据中心对称图形和轴对称图形定义进行解答即可。

【详解】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

B、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项不合题意；

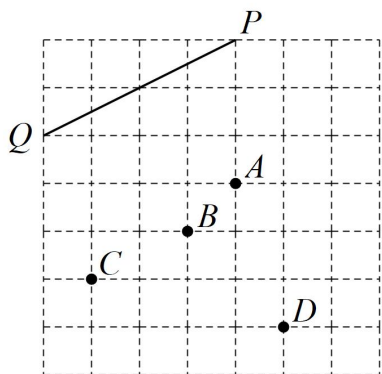
C、既是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

故选：C.

【点睛】此题主要考查了轴对称图形和中心对称图形定义，关键是掌握如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合，这样的图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴. 如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心.

3. 如图，在正方形网格内，线段 PQ 的两个端点都在格点上，网格内另有 A, B, C, D 四个格点，下面四个结论中，正确的是（ ）



A. 连接 AB ，则 $AB \parallel PQ$

B. 连接 BC ，则 $BC \parallel PQ$

C. 连接 BD ，则 $BD \perp PQ$

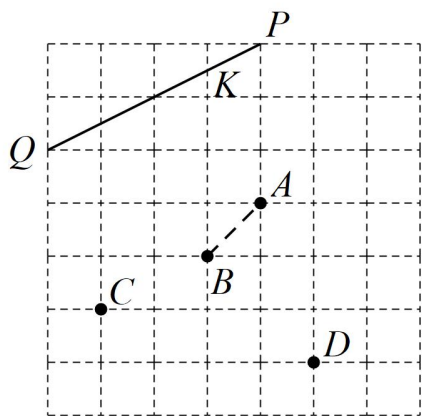
D. 连接 AD ，则 $AD \perp PQ$

【答案】B

【解析】

【分析】根据各选项的要求，先作图，再利用平行四边形的判定与性质，垂线的性质逐一分析判断即可.

【详解】解：如图，连接 AB ，取 PQ 与格线的交点 K ，则 $AP \parallel BK$ ，

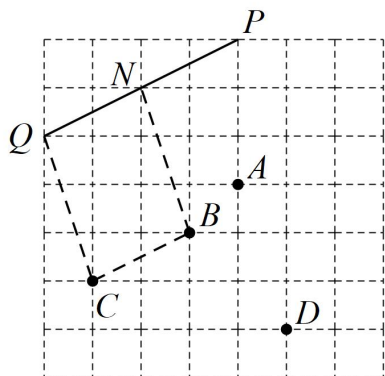


而 $AP \neq BK$,

$\therefore$ 四边形 $ABKP$ 不是平行四边形,

$\therefore AB, PQ$ 不平行, 故 A 不符合题意;

如图, 取格点 N , 连接 QC, BN ,

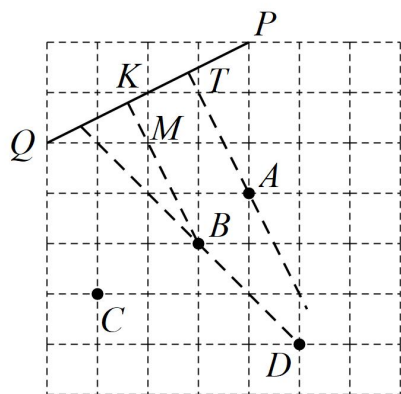


由勾股定理可得: $QN = \sqrt{5} = BC, QC = \sqrt{10} = BN$,

$\therefore$ 四边形 $QCBN$ 是平行四边形,

$\therefore BC \parallel PQ$, 故 B 符合题意;

如图, 取格点 M, T ,



根据网格图的特点可得: $BM \perp PQ, AT \perp QP$,

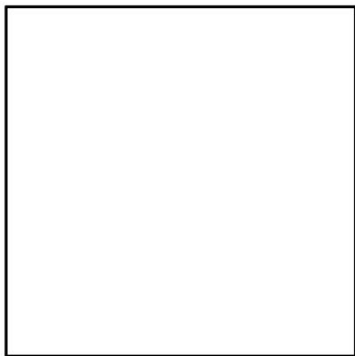
根据垂线的性质可得: $BD \perp PQ, AD \perp PQ$, 都错误, 故 C, D 不符合题意;

故选 B

【点睛】 本题考查的是垂线的性质, 勾股定理的应用, 平行四边形的判定与性质, 熟记网格图形的特点与基本图形的性质是解本题的关键.

4. 今天是父亲节, 小东同学准备送给父亲一个小礼物. 已知礼物外包装的主视图如图所示, 则该礼物的外

包装不可能是 ()



- A. 长方体 B. 正方体 C. 圆柱 D. 三棱锥

【答案】 D

【解析】

【分析】 由长方体，正方体，圆柱的主视图是长方形，而三棱锥的主视图是三角形，从而可得答案.

【详解】 解： $\because$ 长方体，正方体，圆柱的主视图是长方形，而三棱锥的主视图是三角形，

$\therefore$ 该礼物的外包装不可能是三棱锥，

$\therefore$ A, B, C 不符合题意，D 符合题意；

故选 D

【点睛】 本题考查的是简单几何体的主视图，熟记简单几何体的三种视图是解本题的关键.

5. 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3 - a^2 = a$ B. $a^3 \cdot a^2 = a^5$ C. $a^3 \div a^2 = 1$ D. $(a^3)^2 = a$

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据合并同类项法则、同底数幂的乘法法则、同底数幂的除法法则、幂的乘方法则分别计算即可.

【详解】 解： a^3 与 a^2 不是同类项，不能合并，故 A 选项错误；

$a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$ ，故 B 选项正确；

$a^3 \div a^2 = a$ ，故 C 选项错误；

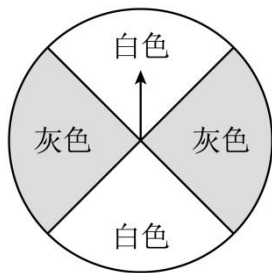
$(a^3)^2 = a^6$ ，故 D 选项错误；

故选 B.

【点睛】 本题考查合并同类项、同底数幂的乘法、同底数幂的除法、幂的乘方，熟练掌握各项运算是解题的关键.

6. 如图，转盘中四个扇形的面积都相等，任意转动这个转盘 1 次，当转盘停止转动时，指针落在灰色区域

的概率是 ()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据灰色区域与整个面积的比即可求解.

【详解】解: $\because$ 转盘中四个扇形的面积都相等, 设整个圆的面积为 1,

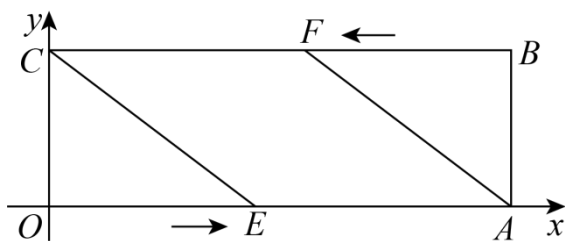
$\therefore$ 灰色区域的面积为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 当转盘停止转动时, 指针落在灰色区域的概率是 $\frac{1}{2}$,

故选: C.

【点睛】本题考查了几何概率, 熟练掌握概率公式是解题的关键.

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(9, 0)$, 点 C 的坐标为 $(0, 3)$, 以 OA, OC 为边作矩形 OABC. 动点 E, F 分别从点 O, B 同时出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿 OA, BC 向终点 A, C 移动. 当移动时间为 4 秒时, $AC \cdot EF$ 的值为 ()



A. $\sqrt{10}$

B. $9\sqrt{10}$

C. 15

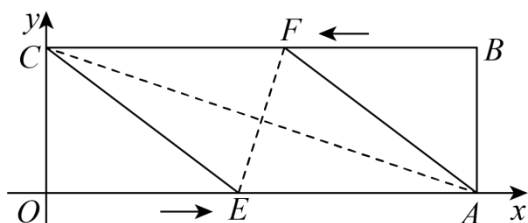
D. 30

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意, 得出 $E(4, 0)$, $F(5, 3)$, 勾股定理求得 $EF = \sqrt{10}$, $AC = 3\sqrt{10}$, 即可求解.

【详解】解: 连接 AC、EF



$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(9,0)$ ，点 C 的坐标为 $(0,3)$ ，以 OA, OC 为边作矩形 $OABC$ 。

$$\therefore B(9,3), AC = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$$

则 $OA = 9, BC = OA = 9$

依题意， $OE = 4 \times 1 = 4, BF = 4 \times 1 = 4$

$$\therefore AE = 9 - 4 = 5, \text{ 则 } E(4,0),$$

$$\therefore CF = BC - BF = 9 - 4 = 5$$

$$\therefore F(5,3),$$

$$\therefore EF = \sqrt{(5-4)^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore C(0,3),$$

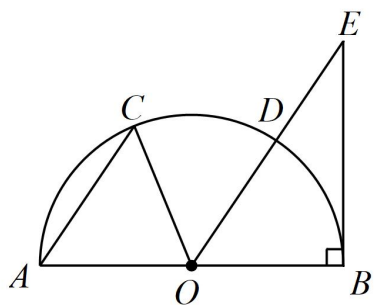
$$\therefore AC \cdot EF = 3\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 30$$

故选：D。

【点睛】本题考查了坐标与图形，勾股定理求两点坐标距离，矩形的性质，求得 E, F 的坐标是解题的关键。

8. 如图， AB 是半圆 O 的直径，点 C, D 在半圆上， $\widehat{CD} = \widehat{DB}$ ，连接 OC, CA, OD ，过点 B 作 $EB \perp AB$ ，

交 OD 的延长线于点 E 。设 $\triangle OAC$ 的面积为 S_1 ， $\triangle OBE$ 的面积为 S_2 ，若 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$ ，则 $\tan \angle ACO$ 的值为 ()



A. $\sqrt{2}$

B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{7}{5}$

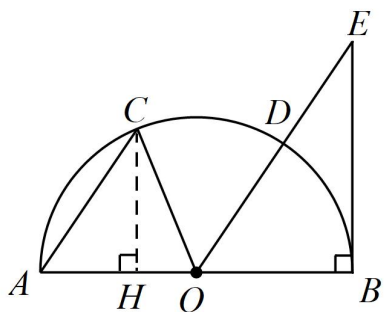
D. $\frac{3}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】如图，过 C 作 $CH \perp AO$ 于 H ，证明 $\angle COD = \angle BOE = \angle CAO$ ，由 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}$ ，即 $\frac{\frac{1}{2}OA \cdot CH}{\frac{1}{2}OB \cdot BE} = \frac{2}{3}$ ，可得 $\frac{CH}{BE} = \frac{2}{3}$ ，证明 $\tan \angle A = \tan \angle BOE$ ，可得 $\frac{CH}{BE} = \frac{AH}{OB} = \frac{2}{3}$ ，设 $AH = 2m$ ，则 $BO = 3m = AO = CO$ ，可得 $OH = 3m - 2m = m$ ， $CH = \sqrt{9m^2 - m^2} = 2\sqrt{2}m$ ，再利用正切的定义可得答案。

【详解】解：如图，过 C 作 $CH \perp AO$ 于 H ，



$$\because \widehat{CD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle COD = \angle BOE = \angle CAO,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } \frac{\frac{1}{2}OA \cdot CH}{\frac{1}{2}OB \cdot BE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{CH}{BE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \angle A = \angle BOE,$$

$$\therefore \tan \angle A = \tan \angle BOE,$$

$$\therefore \frac{CH}{AH} = \frac{BE}{OB}, \text{ 即 } \frac{CH}{BE} = \frac{AH}{OB} = \frac{2}{3},$$

设 $AH = 2m$ ，则 $BO = 3m = AO = CO$ ，

$$\therefore OH = 3m - 2m = m,$$

$$\therefore CH = \sqrt{9m^2 - m^2} = 2\sqrt{2}m,$$

$$\therefore \tan \angle A = \frac{CH}{AH} = \frac{2\sqrt{2}m}{2m} = \sqrt{2},$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle A = \angle ACO,$$

$$\therefore \tan \angle ACO = \sqrt{2};$$

故选 A

【点睛】本题考查的是圆周角定理的应用，勾股定理的应用，锐角三角函数的应用，作出合适的辅助线构建直角三角形是解本题的关键.

二、填空题：本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分. 把答案直接填在答题卡相对应的位置上.

9. 使 $\sqrt{x+1}$ 有意义的 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x \geq -1$

【解析】

【分析】根据二次根式的定义可知被开方数必须为非负数，列不等式求解即可.

【详解】解：根据二次根式的定义可知被开方数必须为非负数，列不等式得：

$$x+1 \geq 0,$$

解得 $x \geq -1$.

故答案为 $x \geq -1$.

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，比较简单.

10. 因式分解： $a^2+ab=$ _____.

【答案】 $a(a+b)$.

【解析】

【分析】直接提公因式 a 即可.

【详解】 $a^2+ab=a(a+b)$.

故答案为： $a(a+b)$.

11. 分式方程 $\frac{x+1}{x} = \frac{2}{3}$ 的解为 $x =$ _____.

【答案】 -3

【解析】

【分析】方程两边同时乘以 $3x$ ，化为整式方程，解方程验根即可求解.

【详解】解：方程两边同时乘以 $3x$ ， $3(x+1) = 2x$

解得： $x = -3$,

经检验， $x = -3$ 是原方程的解，

故答案为： -3 .

【点睛】本题考察了解分式方程，熟练掌握解分式方程的步骤是解题的关键.

12. 在比例尺为 $1:8000000$ 的地图上，量得 A, B 两地在地图上的距离为 3.5 厘米，即实际距离为 28000000 厘米. 数据 28000000 用科学记数法可表示为_____.

【答案】 2.8×10^7

【解析】

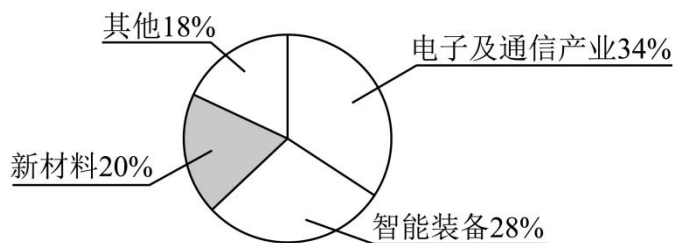
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负整数．

【详解】解： $28000000 = 2.8 \times 10^7$ ，

故答案为： 2.8×10^7 ．

【点睛】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

13. 小惠同学根据某市统计局发布的 2023 年第一季度高新技术产业产值数据，绘制了如图所示的扇形统计图，则“新材料”所对应扇形的圆心角度数是_____．



【答案】 72° ## 72 度

【解析】

【分析】根据“新材料”的占比乘以 360° ，即可求解．

【详解】解：“新材料”所对应扇形的圆心角度数是 $20\% \times 360^\circ = 72^\circ$ ，

故答案为： 72° ．

【点睛】本题考查了求扇形统计图的圆心角的度数，熟练掌握求扇形统计图的圆心角的度数是解题的关键．

14. 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(-1, 2)$ ，则 $k^2 - b^2 =$ _____．

【答案】 -6

【解析】

【分析】把点 $(1, 3)$ 和 $(-1, 2)$ 代入 $y = kx + b$ ，可得 $\begin{cases} k + b = 3 \\ k - b = -2 \end{cases}$ ，再整体代入求值即可．

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(-1, 2)$ ，

$$\therefore \begin{cases} k + b = 3 \\ -k + b = 2 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} k + b = 3 \\ k - b = -2 \end{cases},$$

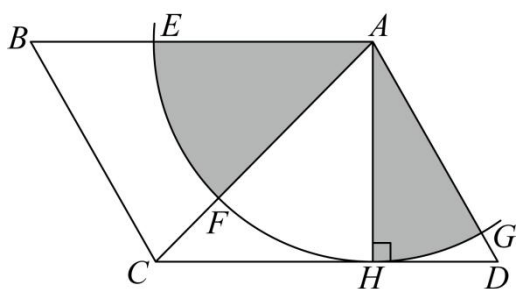
$$\therefore k^2 - b^2 = (k+b)(k-b) = 3 \times (-2) = -6;$$

故答案为：-6

【点睛】本题考查的是一次函数的性质，利用待定系数法求解一次函数的解析式，利用平方差公式分解因式，熟练的利用平方差公式求解代数式的值是解本题的关键。

15. 如图，在 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, $AH \perp CD$ ，垂足为 H , $AH = \sqrt{3}$ 。以点 A 为圆心， AH 长为半径画弧，与 AB , AC , AD 分别交于点 E , F , G 。若用扇形 AEF 围成一个圆锥的侧面，记这个圆锥底面圆的半径为 r_1 ；用扇形 AHG 围成另一个圆锥的侧面，记这个圆锥底面圆的半径为 r_2 ，则

$r_1 - r_2 =$ _____。（结果保留根号）



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{24} - \frac{1}{24}\sqrt{3}$

【解析】

【分析】由 $ABCD$ ， $AB = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, $AH \perp CD$ ， $AH = \sqrt{3}$ ， $AD = BC = 2$ ， $DH = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$ ， $\cos \angle DAH = \frac{AH}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $AB = CD = \sqrt{3} + 1$ ， $AB \parallel CD$ ，求解 $\angle DAH = 30^\circ$ ， $CH = \sqrt{3} = AH$ ，证明 $\angle ACH = \angle CAH = 45^\circ$ ，可得 $\angle BAC = 45^\circ$ ，再分别计算圆锥的底面半径即可。

【详解】解：∵在 $ABCD$ 中， $AB = \sqrt{3} + 1$, $BC = 2$, $AH \perp CD$ ， $AH = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore AD = BC = 2, DH = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1,$$

$$\therefore \cos \angle DAH = \frac{AH}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}, AB = CD = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore \angle DAH = 30^\circ, CH = \sqrt{3} = AH,$$

$$\therefore \angle ACH = \angle CAH = 45^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle BAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \frac{45\pi \times \sqrt{3}}{180} = 2\pi r_1, \quad \frac{30\pi \times \sqrt{3}}{180} = 2\pi r_2,$$

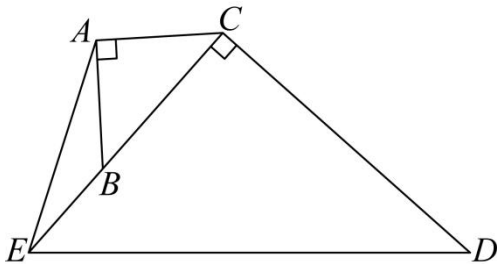
$$\text{解得: } r_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}, \quad r_2 = \frac{\sqrt{3}}{12},$$

$$\therefore r_1 - r_2 = \frac{3\sqrt{3}}{24} - \frac{2\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{24};$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{3}}{24}$$

【点睛】 本题考查的是平行四边形的性质，勾股定理的应用，锐角三角函数的应用，扇形的弧长的计算，圆锥的底面半径的计算，熟记圆锥的侧面展开图的扇形弧长等于底面圆的周长是解本题的关键.

16. 如图, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = 3\sqrt{2}$. 过点 C 作 $CD \perp BC$, 延长 CB 到 E , 使 $BE = \frac{1}{3}CD$, 连接 AE, ED . 若 $ED = 2AE$, 则 $BE =$ _____ . (结果保留根号)



【答案】 $\sqrt{7} + 1$

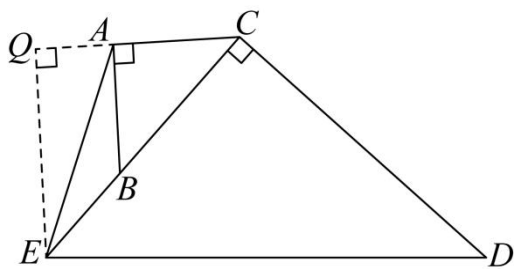
【解析】

【分析】如图, 过 E 作 $EQ \perp CQ$ 于 Q , 设 $BE = x$, $AE = y$, 可得 $CD = 3x$, $DE = 2y$, 证明 $BC = \sqrt{2}AB = 6$,

$CE = 6 + x$, $\triangle CQE$ 为等腰直角三角形, $QE = CQ = \frac{\sqrt{2}}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}(6 + x) = 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}x$,

由勾股定理可得:
$$\begin{cases} (2y)^2 = (6+x)^2 + (3x)^2 \\ y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 \end{cases}$$
 再解方程组可得答案.

【详解】解: 如图, 过 E 作 $EQ \perp CQ$ 于 Q ,



设 $BE = x, AE = y$,

$$\therefore BE = \frac{1}{3}CD, \quad ED = 2AE,$$

$$\therefore CD = 3x, DE = 2y,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, AB = AC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB = 6, \quad CE = 6 + x, \quad \triangle CQE \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore QE = CQ = \frac{\sqrt{2}}{2}CE = \frac{\sqrt{2}}{2}(6+x) = 3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

$$\therefore AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

由勾股定理可得:
$$\begin{cases} (2y)^2 = (6+x)^2 + (3x)^2 \\ y^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 + \left(3\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 \end{cases}$$

整理得: $x^2 - 2x - 6 = 0$,

解得: $x = 1 \pm \sqrt{7}$,

经检验 $x = 1 - \sqrt{7}$ 不符合题意;

$$\therefore BE = x = 1 + \sqrt{7};$$

故答案为: $1 + \sqrt{7}$.

【点睛】 本题考查的是等腰直角三角形的性质，勾股定理的应用，一元二次方程的解法，作出合适的辅助线构建直角三角形是解本题的关键.

三、解答题： 本大题共 11 小题，共 82 分. 把解答过程写在答题卡相对应的位置上，解答时应写出必要的计算过程、推演步骤或文字说明. 作图时用 2B 铅笔或黑色墨水签字笔.

17. 计算: $|-2| - \sqrt{4} + 3^2$.

【答案】9

【解析】

【分析】先计算绝对值，算术平方根，乘方运算，再合并即可.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & |-2| - \sqrt{4} + 3^2 \\ &= 2 - 2 + 9 \\ &= 9. \end{aligned}$$

【点睛】本题考查的是实数的混合运算，熟记算术平方根的含义，乘方与绝对值的含义是解本题的关键.

$$18. \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 2x+1 > 0, \\ \frac{x+1}{3} > x-1. \end{cases}$$

$$\text{【答案】 } -\frac{1}{2} < x < 2$$

【解析】

【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} 2x+1 > 0 \text{ ①} \\ \frac{x+1}{3} > x-1 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{解不等式①得: } x > -\frac{1}{2}$$

$$\text{解不等式②得: } x < 2$$

$$\therefore \text{ 不等式组的解集为: } -\frac{1}{2} < x < 2$$

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，正确掌握一元一次不等式解集确定方法是解题的关键.

$$19. \text{ 先化简，再求值: } \frac{a-1}{a-2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-2a+1} - \frac{2}{a-1}, \text{ 其中 } a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{【答案】 } \frac{a}{a-1}; -1$$

【解析】

【分析】先根据分式的乘法进行计算，然后计算减法，最后将字母的值代入求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{a-1}{a-2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-2a+1} - \frac{2}{a-1} \\ &= \frac{a-1}{a-2} \cdot \frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)^2} - \frac{2}{a-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{a+2}{a-1} - \frac{2}{a-1}$$

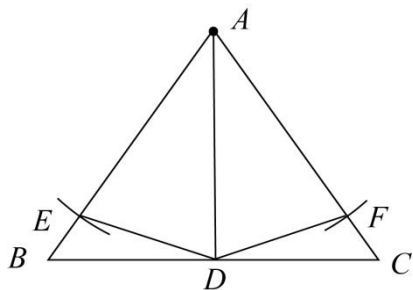
$$= \frac{a}{a-1};$$

当 $a = \frac{1}{2}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1} = -1.$$

【点睛】 本题考查了分式化简求值，解题关键是熟练运用分式运算法则进行求解.

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线. 以点 A 圆心， AD 长为半径画弧，与 AB, AC 分别交于点 E, F ，连接 DE, DF .



(1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle ADF$;

(2) 若 $\angle BAC = 80^\circ$ ，求 $\angle BDE$ 的度数.

【答案】 (1) 见解析 (2) $\angle BDE = 20^\circ$

【解析】

【分析】 (1) 根据角平分线的定义得出 $\angle BAD = \angle CAD$ ，由作图可得 $AE = AF$ ，即可证明 $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ ；

(2) 根据角平分线的定义得出 $\angle EAD = 40^\circ$ ，由作图得出 $AE = AD$ ，则根据三角形内角和定理以及等腰三角形的性质得出 $\angle ADE = 70^\circ$ ， $AD \perp BC$ ，进而即可求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

由作图可得 $AE = AF$,

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AE = AF \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AD = AD \end{cases}$$

$$\therefore ADE \cong ADF \text{ (SAS)};$$

【小问 2 详解】

$\because \angle BAC = 80^\circ$, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle EAD = 40^\circ$$

由作图可得 $AE = AD$,

$$\therefore \angle ADE = 70^\circ,$$

$\because AB = AC$, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BDE = 20^\circ$$

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，等腰三角形的性质与判定，角平分线的定义，熟练掌握等腰三角形的性质与判定是解题的关键.

21. 一只不透明的袋子中装有 4 个小球，分别标有编号 1, 2, 3, 4，这些小球除编号外都相同.

(1) 搅匀后从中任意摸出 1 个球，这个球的编号是 2 的概率为_____.

(2) 搅匀后从中任意摸出 1 个球，记录球的编号后放回、搅匀，再从中任意摸出 1 个球. 求第 2 次摸到的小球编号比第 1 次摸到的小球编号大 1 的概率是多少？（用画树状图或列表的方法说明）

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{3}{16}$

【解析】

【分析】(1) 直接利用概率公式求解即可求得答案；

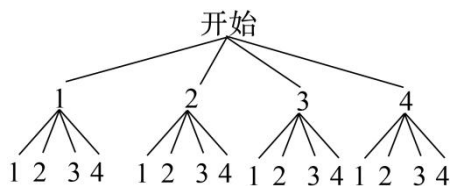
(2) 画树状图表示所有等可能出现的情况，从中找出符合条件的结果数，进而求出概率.

【小问 1 详解】

解：搅匀后从中任意摸出 1 个球，这个球的编号是 2 的概率为 $\frac{1}{4}$ ；

【小问 2 详解】

如图，画树状图如下：

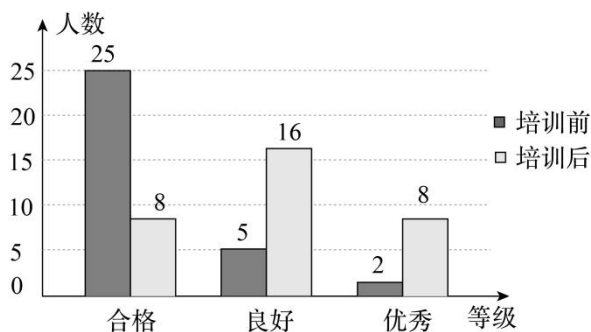


所有可能的结果数为 16 个，第 2 次摸到的小球编号比第 1 次摸到的小球编号大 1 的结果数为 3 个，

∴第2次摸到的小球编号比第1次摸到的小球编号大1的概率为： $\frac{3}{16}$ 。

【点睛】本题考查简单随机事件的概率计算，利用列表法或树状图法求等可能事件发生的概率，使用此方法一定要注意每一种结果出现的可能性是均等的，即为等可能事件。

22. 某初中学校为加强劳动教育，开设了劳动技能培训课程。为了解培训效果，学校对七年级320名学生在培训前和培训后各进行一次劳动技能检测，两次检测项目相同，评委依据同一标准进行现场评估，分成“合格”、“良好”、“优秀”3个等级，依次记为2分、6分、8分（比如，某同学检测等级为“优秀”，即得8分）。学校随机抽取32名学生的2次检测等级作为样本，绘制成下面的条形统计图：



(1) 这32名学生在培训前得分的中位数对应等级应为_____；（填“合格”、“良好”或“优秀”）

(2) 求这32名学生培训后比培训前的平均分提高了多少？

(3) 利用样本估计该校七年级学生中，培训后检测等级为“良好”与“优秀”的学生人数之和是多少？

【答案】(1) 合格 (2) 2.5分

(3) 240人

【解析】

【分析】(1) 由32个数据排在最中间是第16个，第17个，这两个数据的平均数即为中位数，从而可得答案；

(2) 分别计算培训前与培训后的平均成绩，再作差即可；

(3) 利用总人数乘以良好与优秀所占的百分比即可得到答案。

【小问1详解】

解：32个数据排在最中间是第16个，第17个，这两个数据的平均数即为中位数，

∴这32名学生在培训前得分的中位数对应等级应为合格；

【小问2详解】

32名学生在培训前的平均分为： $\frac{1}{32}(25 \times 2 + 5 \times 6 + 2 \times 8) = 3$ （分），

32 名学生在培训后的平均分为： $\frac{1}{32}(8 \times 2 + 16 \times 6 + 8 \times 8) = 5.5$ （分），

这 32 名学生培训后比培训前的平均分提高了 $5.5 - 3 = 2.5$ （分）；

【小问 3 详解】

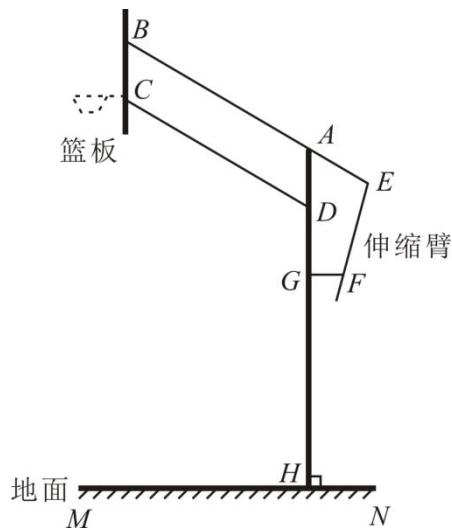
培训后检测等级为“良好”与“优秀”的学生人数之和是：

$$320 \times \frac{16+8}{32} = 240 \text{（人）}.$$

【点睛】 本题考查的是频数分布直方图，利用样本估计总体，求解平均数，掌握以上基础的统计知识是解本题的关键.

23. 四边形不具有稳定性，工程上可利用这一性质解决问题. 如图是某篮球架的侧面示意图， BE, CD, GF 为长度固定的支架，支架在 A, D, G 处与立柱 AH 连接（ AH 垂直于 MN ，垂足为 H ），在 B, C 处与篮板连接（ BC 所在直线垂直于 MN ）， EF 是可以调节长度的伸缩臂（旋转点 F 处的螺栓改变 EF 的长度，使得支架 BE 绕点 A 旋转，从而改变四边形 $ABCD$ 的形状，以此调节篮板的高度）. 已知

$AD = BC, DH = 208\text{cm}$ ，测得 $\angle GAE = 60^\circ$ 时，点 C 离地面的高度为 288cm . 调节伸缩臂 EF ，将 $\angle GAE$ 由 60° 调节为 54° ，判断点 C 离地面的高度升高还是降低了？升高（或降低）了多少？（参考数据： $\sin 54^\circ \approx 0.8, \cos 54^\circ \approx 0.6$ ）



【答案】点 C 离地面的高度升高了，升高了 16cm .

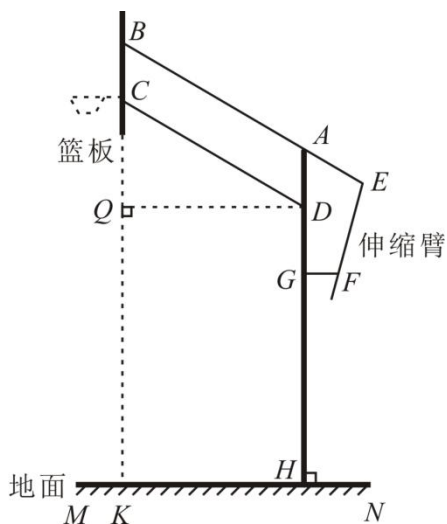
【解析】

【分析】如图，延长 BC 与底面交于点 K ，过 D 作 $DQ \perp CK$ 于 Q ，则四边形 $DHKQ$ 为矩形，可得 $QK = DH = 208$ ，证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形，可得 $AB \parallel CD$ ，当 $\angle GAE = 60^\circ$ 时，则

$\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 60^\circ$ ，此时 $\angle CDQ = 30^\circ$ ， $CQ = 288 - 208 = 80$ ， $CD = 2CQ = 160$ ，当 $\angle GAE = 54^\circ$ 时，则 $\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 54^\circ$ ， $CQ = CD \cdot \cos 54^\circ \approx 160 \times 0.6 = 96$ ，从而可得答案.

【详解】解：如图，延长 BC 与底面交于点 K ，过 D 作 $DQ \perp CK$ 于 Q ，则四边形 $DHKQ$ 为矩形，

$$\therefore QK = DH = 208,$$



$$\therefore AD = BC, \quad AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB \parallel CD,$$

当 $\angle GAE = 60^\circ$ 时, 则 $\angle QCD = \angle QBA = \angle GAE = 60^\circ$,

此时 $\angle CDQ = 30^\circ$, $CQ = 288 - 208 = 80$,

$$\therefore CD = 2CQ = 160,$$

当 $\angle GAE = 54^\circ$ 时, 则 $\angle OCD = \angle OBA = \angle GAE = 54^\circ$,

$$\therefore CQ = CD \cdot \cos 54^\circ \approx 160 \times 0.6 = 96,$$

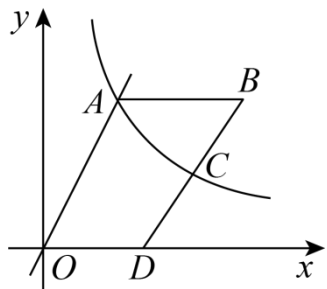
而 $96 > 80$, $96 - 80 = 16$,

∴点C离地面的高度升高了, 升高了16cm.

【点睛】本题考查的是平行四边形的判定与性质，矩形的判定与性质，解直角三角形的实际应用，理解题意，作出合适的辅助线是解本题的关键.

24. 如图, 一次函数 $y = 2x$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象交于点 $A(4, n)$. 将点 A 沿 x 轴正方向

平移 m 个单位长度得到点 B, D 为 x 轴正半轴上的点, 点 B 的横坐标大于点 D 的横坐标, 连接 BD, BD 的中点 C 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上.



- (1) 求 n, k 的值;
 (2) 当 m 为何值时, $AB \cdot OD$ 的值最大? 最大值是多少?

【答案】(1) $n = 8, k = 32$

- (2) 当 $m = 6$ 时, $AB \cdot OD$ 取得最大值, 最大值为 36

【解析】

【分析】(1) 把点 $A(4, n)$ 代入 $y = 2x$, 得出 $n = 8$, 把点 $A(4, 8)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$, 即可求得 $k = 32$;

(2) 过点 C 作 x 轴的垂线, 分别交 AB, x 轴于点 E, F , 证明 $\triangle ECB \cong \triangle FCD$, 得出 $BE = DF, CE = CF$, 进而可得 $C(8, 4)$, 根据平移的性质得出 $B(m + 4, 8), D(12 - m, 0)$, 进而表示出 $AB \cdot OD$, 根据二次函数的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 把点 $A(4, n)$ 代入 $y = 2x$,

$$\therefore n = 2 \times 4,$$

解得: $n = 8$;

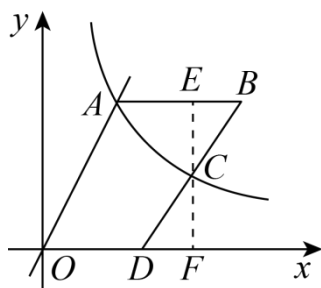
把点 $A(4, 8)$ 代入 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$, 解得 $k = 32$;

【小问 2 详解】

$\because$ 点 B 横坐标大于点 D 的横坐标,

$\therefore$ 点 B 在点 D 的右侧,

如图所示, 过点 C 作 x 轴的垂线, 分别交 AB, x 轴于点 E, F ,



$$\therefore AB \parallel DF,$$

$$\therefore \angle B = \angle CDF,$$

在 $\triangle ECB$ 和 $\triangle FCD$ 中,

$$\begin{cases} \angle BCE = \angle DCF \\ BC = CD \\ \angle B = \angle CDF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ECB \cong \triangle FCD (\text{ASA}),$$

$$\therefore BE = DF, CE = CF,$$

$$\therefore EF = y_A = 8,$$

$$\therefore CE = CF = 4,$$

$$\therefore C(8,4),$$

$\therefore$ 将点 A 沿 x 轴正方向平移 m 个单位长度得到点 B,

$$\therefore B(m+4,8),$$

$$\therefore BE = DF = m-4,$$

$$\therefore D(12-m,0),$$

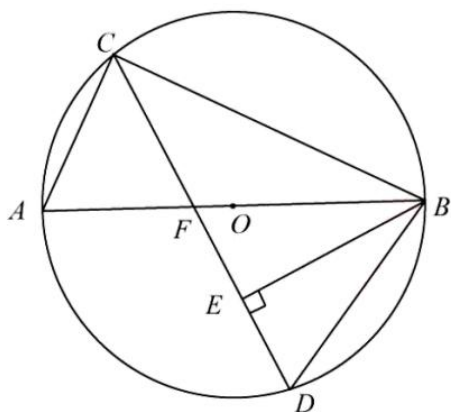
$$\therefore OD = 12-m,$$

$$\therefore AB \cdot OD = m(12-m) = -(m-6)^2 + 36,$$

$\therefore$ 当 $m=6$ 时, $AB \cdot OD$ 取得最大值, 最大值为 36.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例函数综合, 二次函数的性质, 全等三角形的性质与判定, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

25. 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 2\sqrt{5}$, 点 F 在 AB 上, 连接 CF 并延长, 交 $\odot O$ 于点 D , 连接 BD , 作 $BE \perp CD$, 垂足为 E .



- (1) 求证: $\triangle DBE \sim \triangle ABC$;
 (2) 若 $AF = 2$, 求 ED 的长.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【解析】

【分析】(1) 分别证明 $\angle ACB = 90^\circ = \angle BED$, $\angle CAB = \angle CDB$, 从而可得结论;

(2) 求解 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$, $\tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$, 可得 $BF = 3$, 证明 $\tan \angle ABC = \tan \angle DBE = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2}$, 设 $DE = x$, 则 $BE = 2x$, $BD = \sqrt{5}x$, 证明 $\triangle ACF \sim \triangle DBF$, 可得 $\frac{AC}{BD} = \frac{AF}{DF} = \frac{CF}{BF}$, 可得 $DF = 2x$, $EF = x = DE$, $BD = BF = 3$, 从而可得答案.

【小问1详解】

证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $BE \perp CD$,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ = \angle BED,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle DBE \sim \triangle ABC.$$

【小问2详解】

$$\because AC = \sqrt{5}, BC = 2\sqrt{5}, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5, \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\because AF = 2,$$

$$\therefore BF = 3,$$

$$\because \triangle DBE \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle DBE,$$

$$\therefore \tan \angle ABC = \tan \angle DBE = \frac{DE}{BE} = \frac{1}{2},$$

设 $DE = x$ ，则 $BE = 2x$ ， $BD = \sqrt{5}x$ ，

$$\therefore \angle AFC = \angle BFD, \quad \angle CAB = \angle CDB,$$

$$\therefore \triangle ACF \sim \triangle DBF,$$

$$\therefore \frac{AC}{BD} = \frac{AF}{DF} = \frac{CF}{BF},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}x} = \frac{2}{DF}, \text{ 则 } DF = 2x,$$

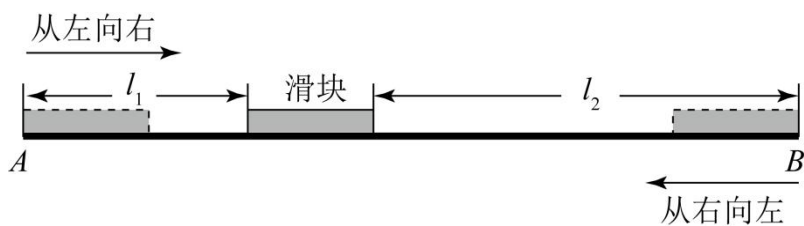
$$\therefore EF = x = DE,$$

$$\therefore BD = BF = 3,$$

$$\therefore DE = \frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

【点睛】 本题考查的是圆周角定理的应用，相似三角形的判定与性质，锐角三角函数的应用，熟记圆的基本性质与重要定理是解本题的关键.

26. 某动力科学研究院实验基地内装有一段笔直的轨道 AB ，长度为 1m 的金属滑块在上面做往返滑动. 如图，滑块首先沿 AB 方向从左向右匀速滑动，滑动速度为 9m/s ，滑动开始前滑块左端与点 A 重合，当滑块右端到达点 B 时，滑块停顿 2s ，然后再以小于 9m/s 的速度匀速返回，直到滑块的左端与点 A 重合，滑动停止. 设时间为 $t(\text{s})$ 时，滑块左端离点 A 的距离为 $l_1(\text{m})$ ，右端离点 B 的距离为 $l_2(\text{m})$ ，记 $d = l_1 - l_2$ ， d 与 t 具有函数关系. 已知滑块在从左向右滑动过程中，当 $t = 4.5\text{s}$ 和 5.5s 时，与之对应的 d 的两个值互为相反数；滑块从点 A 出发到最后返回点 A ，整个过程总用时 27s （含停顿时间）. 请你根据所给条件解决下列问题：



- (1) 滑块从点 A 到点 B 的滑动过程中， d 的值_____；（填“由负到正”或“由正到负”）
- (2) 滑块从点 B 到点 A 的滑动过程中，求 d 与 t 的函数表达式；
- (3) 在整个往返过程中，若 $d = 18$ ，求 t 的值.

【答案】 (1) 由负到正

$$(2) \quad d = -12t + 234$$

(3) 当 $t = 6$ 或 $t = 18$ 时, $d = 18$

【解析】

【分析】(1) 根据等式 $d = l_1 - l_2$, 结合题意, 即可求解;

(2) 设轨道 AB 的长为 n , 根据已知条件得出 $l_1 + l_2 + 1 = n$, 则 $d = l_1 - l_2 = 18t - n + 1$, 根据当 $t = 4.5\text{s}$ 和 5.5s 时, 与之对应的 d 的两个值互为相反数; 则 $t = 5$ 时, $d = 0$, 得出 $d = 91$, 继而求得滑块返回的速度为 $(91-1) \div 15 = 6 (\text{m/s})$, 得出 $l_2 = 6(t-12)$, 代入 $d = l_1 - l_2$, 即可求解;

(3) 当 $d = 18$ 时, 有两种情况, 由 (2) 可得, ①当 $0 \leq t \leq 10$ 时, ②当 $12 \leq t \leq 27$ 时, 分别令 $d = 18$, 进而即可求解.

【小问 1 详解】

$$\because d = l_1 - l_2,$$

当滑块在 A 点时, $l_1 = 0$, $d = -l_2 < 0$,

当滑块在 B 点时, $l_2 = 0$, $d = l_1 > 0$,

$\therefore d$ 的值由负到正.

故答案为: 由负到正.

【小问 2 详解】

解: 设轨道 AB 的长为 n , 当滑块从左向右滑动时,

$$\because l_1 + l_2 + 1 = n,$$

$$\therefore l_2 = n - l_1 - 1,$$

$$\therefore d = l_1 - l_2 = l_1 - (n - l_1 - 1) = 2l_1 - n + 1 = 2 \times 9t - n + 1 = 18t - n + 1$$

$\therefore d$ 是 t 的一次函数,

$\therefore$ 当 $t = 4.5\text{s}$ 和 5.5s 时, 与之对应的 d 的两个值互为相反数;

$\therefore$ 当 $t = 5$ 时, $d = 0$,

$$\therefore 18 \times 5 - n + 1 = 0,$$

$$\therefore d = 91,$$

$\therefore$ 滑块从点 A 到点 B 所用的时间为 $(91-1) \div 9 = 10 (\text{s})$,

$\therefore$ 整个过程总用时 27s (含停顿时间). 当滑块右端到达点 B 时, 滑块停顿 2s ,

$\therefore$ 滑块从点 B 到点 A 的滑动时间为 $27 - 10 - 2 = 15\text{s}$,

$\therefore$ 滑块返回的速度为 $(91-1) \div 15 = 6 \text{ (m/s)}$,

$\therefore$ 当 $12 \leq t \leq 27$ 时, $l_2 = 6(t-12)$,

$\therefore l_1 = 91-1-l_2 = 90-6(t-12) = 162-6t$,

$\therefore l_1 - l_2 = 162-6t-6(t-12) = -12t+234$,

$\therefore d$ 与 t 的函数表达式为 $d = -12t + 234$;

【小问3详解】

当 $d = 18$ 时, 有两种情况,

由 (2) 可得,

① 当 $0 \leq t \leq 10$ 时, $18t-91+1=18$,

解得: $t = 6$;

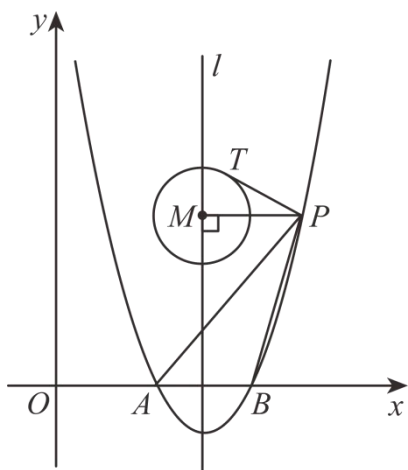
② 当 $12 \leq t \leq 27$ 时, $-12t+234=18$,

解得: $t = 18$,

综上所述, 当 $t = 6$ 或 $t = 18$ 时, $d = 18$.

【点睛】 本题考查了一次函数的应用, 分析得出 $n = 91$, 并求得往返过程中的解析式是解题的关键.

27. 如图, 二次函数 $y = x^2 - 6x + 8$ 的图像与 x 轴分别交于点 A, B (点 A 在点 B 的左侧), 直线 l 是对称轴. 点 P 在函数图像上, 其横坐标大于 4, 连接 PA, PB , 过点 P 作 $PM \perp l$, 垂足为 M , 以点 M 为圆心, 作半径为 r 的圆, PT 与 $\odot M$ 相切, 切点为 T .



(1) 求点 A, B 的坐标;

(2) 若以 $\odot M$ 的切线长 PT 为边长的正方形的面积与 $\triangle PAB$ 的面积相等, 且 $\odot M$ 不经过点 $(3, 2)$, 求 PM 长的取值范围.

【答案】(1) $A(2,0), B(4,0)$

(2) $1 < PM < \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} < PM < 2$ 或 $PM > 2$

【解析】

【分析】(1) 令 $y=0$ 求得点 A, B 的横坐标即可解答；

(2) 由题意可得抛物线的对称轴为 $x=3$ ，设 $P(m, m^2 - 6m + 8)$ ，则 $M(3, m^2 - 6m + 8)$ ；如图连接 MT ，则 $MT \perp PT$ ，进而可得切线长 PT 为边长的正方形的面积为 $(m-3)^2 - r^2$ ；过点 P 作 $PH \perp x$ 轴，垂足为 H ，可得 $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PH = m^2 - 6m + 8$ ；由题意可得 $(m-3)^2 - r^2 = m^2 - 6m + 8$ ，解得 $r=1$ ；然后再分当点 M 在点 N 的上方和下方两种情况解答即可。

【小问 1 详解】

解：令 $y=0$ ，则有： $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，解得： $x=2$ 或 $x=4$ ，

$\therefore A(2,0), B(4,0)$ 。

【小问 2 详解】

解： $\because$ 抛物线过 $A(2,0), B(4,0)$

$\therefore$ 抛物线的对称轴为 $x=3$ ，

设 $P(m, m^2 - 6m + 8)$ ，

$\therefore PM \perp l$ ，

$\therefore M(3, m^2 - 6m + 8)$ ，

如图：连接 MT ，则 $MT \perp PT$ ，

$\therefore PT^2 = PM^2 - MT^2 = (m-3)^2 - r^2$ ，

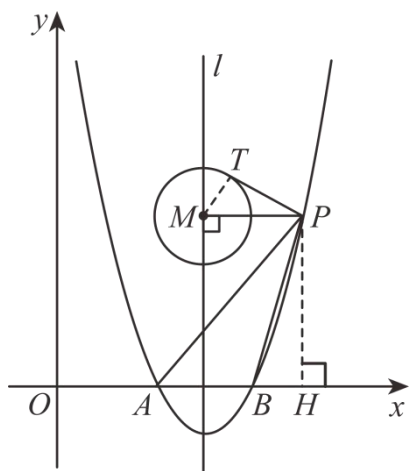
$\therefore$ 切线 PT 为边长的正方形的面积为 $(m-3)^2 - r^2$ ，

过点 P 作 $PH \perp x$ 轴，垂足为 H ，则： $S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} AB \cdot PH = m^2 - 6m + 8$ ，

$\therefore (m-3)^2 - r^2 = m^2 - 6m + 8$

$\therefore r > 0$ ，

$\therefore r=1$ ，



假设 $\odot M$ 过点 $N(3,2)$, 则有以下两种情况:

①如图 1: 当点 M 在点 N 的上方, 即 $M(3,3)$

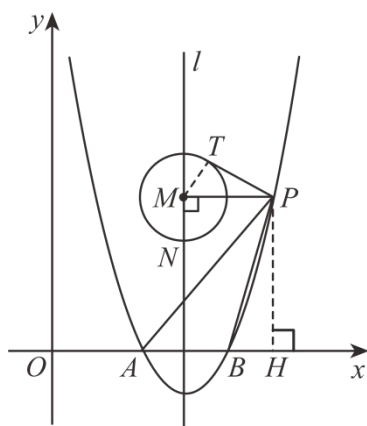


图1

$$\therefore m^2 - 6m + 8 = 3, \text{ 解得: } m = 5 \text{ 或 } m = 1,$$

$$\therefore m > 4$$

$$\therefore m = 5;$$

②如图 2: 当点 M 在点 N 的下方, 即 $M(3,1)$

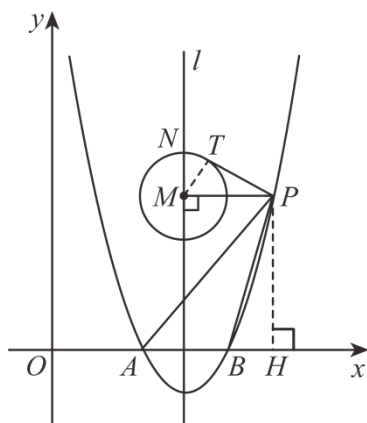


图2

$$\therefore m^2 - 6m + 8 = 1, \text{ 解得: } m = 3 \pm \sqrt{2},$$

$$\therefore m > 4$$

$$\therefore m = 3 \pm \sqrt{2};$$

综上, $PM = m - 3 = 2$ 或 $\sqrt{2}$.

$\therefore$ 当 $\odot M$ 不经过点 $(3, 2)$ 时, $1 < PM < \sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2} < PM < 2$ 或 $PM > 2$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的性质、切线的性质、勾股定理等知识点, 掌握分类讨论思想是解答本题的关键.

