

2023 年无锡市初中毕业升学考试数学试题

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项是正确的）

1. 实数 9 的算术平方根是（ ）

- A. 3 B. ± 3 C. $\frac{1}{9}$ D. -9

【答案】A

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义即可求出结果．

【详解】解： $\sqrt{9} = 3$ ，

故选：A．

【点睛】本题考查了平方根和算术平方根的定义．注意一个正数有两个平方根，它们互为相反数；0 的平方根是 0；负数没有平方根．

2. 函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 中自变量 x 的取值范围是（ ）

- A. $x > 2$ B. $x \geq 2$ C. $x \neq 2$ D. $x < 2$

【答案】C

【解析】

【分析】令分母不等于 0 求解即可．

【详解】由题意得

$$x-2 \neq 0,$$

$$\therefore x \neq 2.$$

故选 C．

【点睛】本题考查了函数自变量的取值范围，函数有意义时字母的取值范围一般从几个方面考虑：①当函数解析式是整式时，字母可取全体实数；②当函数解析式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；③当函数解析式是二次根式时，被开方数为非负数．

3. 下列 4 组数中，不是二元一次方程 $2x + y = 4$ 的解是（ ）

- A. $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=0.5 \\ y=3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$

【答案】D

【解析】

【分析】将选项中的 x, y 的值分别代入方程的左边，进而即可求解.

【详解】解：A、当 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 时， $2x+y=4$ ，则 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 是二元一次方程 $2x+y=4$ 的解，不合题意；

B、当 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 时， $2x+y=4$ ，则 $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$ 是二元一次方程 $2x+y=4$ 的解，不合题意；

C、当 $\begin{cases} x=0.5 \\ y=3 \end{cases}$ 时， $2x+y=4$ ，则 $\begin{cases} x=0.5 \\ y=3 \end{cases}$ 是二元一次方程 $2x+y=4$ 的解，不合题意；

D、当 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 时， $2x+y=0$ ，则 $\begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$ 不是二元一次方程 $2x+y=4$ 的解，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了二元一次方程的解的定义，熟练掌握二元一次方程的解的定义是解题的关键.

4. 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 \times a^3 = a^6$

B. $a^2 + a^3 = a^5$

C. $(-2a)^2 = -4a^2$

D. $a^6 \div a^4 = a^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，同底数幂的除法，积的乘方，合并同类项，逐项分析判断即可求解.

【详解】解：A. $a^2 \times a^3 = a^5$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. a^2 与 a^3 不能合并，故该选项不正确，不符合题意；

C. $(-2a)^2 = 4a^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $a^6 \div a^4 = a^2$ ，故该选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，积的乘方，合并同类项，熟练掌握同底数幂的乘法，同底数幂的除法，积的乘方，合并同类项的运算法则是解题的关键.

5. 将函数 $y=2x+1$ 的图像向下平移 2 个单位长度，所得图像对应的函数表达式是 ()

A. $y=2x-1$

B. $y=2x+3$

C. $y=4x-3$

D. $y=4x+5$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题目条件函数 $y=2x+1$ 的图像向下平移 2 个单位长度，则 b 的值减少 2，代入方程中即可.

【详解】解：∵函数 $y = 2x + 1$ 的图像向下平移 2 个单位长度，

$$\therefore y = 2x + 1 - 2 = 2x - 1,$$

故答案为：A.

【点睛】本题主要考查函数平移，根据题目信息判断是沿 y 轴移动还是沿 x 轴移动是解题的关键.

6. 2020 年—2022 年无锡居民人均可支配收入由 5.76 万元增长至 6.58 万元，设人均可支配收入的平均增长率为 x ，下列方程正确的是 ()

A. $5.76(1+x)^2 = 6.58$

B. $5.76(1+x^2) = 6.58$

C. $5.76(1+2x) = 6.58$

D. $5.76x^2 = 6.58$

【答案】A

【解析】

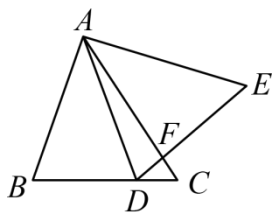
【分析】根据 2020 年的人均可支配收入和 2022 年的人均可支配收入，列出一元二次方程即可.

【详解】解：由题意得： $5.76(1+x)^2 = 6.58$.

故选：A.

【点睛】此题主要考查了由实际问题抽象出一元二次方程，找准等量关系，正确列出一元二次方程是解题的关键.

7. 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 55^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 逆时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 55^\circ$)，得到 $\triangle ADE$ ， DE 交 AC 于 F . 当 $\alpha = 40^\circ$ 时，点 D 恰好落在 BC 上，此时 $\angle AFE$ 等于 ()



A. 80°

B. 85°

C. 90°

D. 95°

【答案】B

【解析】

【分析】根据旋转可得 $\angle B = \angle ADB = \angle ADE$ ，再结合旋转角 $\alpha = 40^\circ$ 即可求解.

【详解】解：由旋转性质可得： $\angle BAC = \angle DAE = 55^\circ$ ， $AB = AD$ ，

$$\therefore \alpha = 40^\circ,$$

$$\therefore \angle DAF = 15^\circ, \quad \angle B = \angle ADB = \angle ADE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle DAF + \angle ADE = 85^\circ,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了几何—旋转问题，掌握旋转的性质是关键.

8. 下列命题：①各边相等的多边形是正多边形；②正多边形是中心对称图形；③正六边形的外接圆半径与边长相等；④正 n 边形共有 n 条对称轴. 其中真命题的个数是 ()

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】根据正多边形的性质以及正多边形与圆的关系逐一进行判断即可.

【详解】解：各边相等各角相等的多边形是正多边形，只有各边相等的多边形不一定是正多边形，如菱形，故①是假命题；

正三角形和正五边形就不是中心对称图形，故②为假命题；

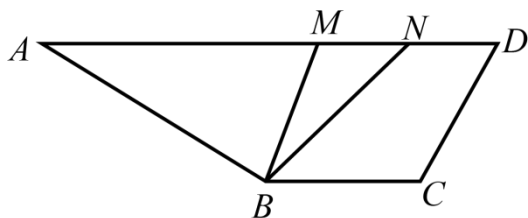
正六边形中由外接圆半径与边长可构成等边三角形，所以外接圆半径与边长相等，故③为真命题；

根据轴对称图形的定义和正多边形的特点，可知正 n 边形共有 n 条对称轴，故④为真命题.

故选：C.

【点睛】本题考查的是正多边形的概念以及正多边形与圆的关系，属于基础题型.

9. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle DAB = 30^\circ$ ， $\angle ADC = 60^\circ$ ， $BC = CD = 2$ ，若线段 MN 在边 AD 上运动，且 $MN = 1$ ，则 $BM^2 + 2BN^2$ 的最小值是 ()



A. $\frac{13}{2}$

B. $\frac{29}{3}$

C. $\frac{39}{4}$

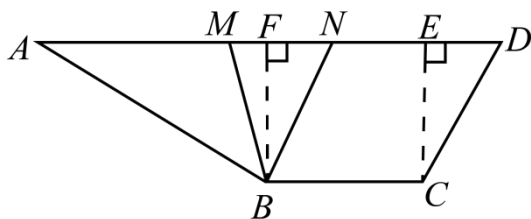
D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】过点 C 作 $CE \perp AD$ ，过点 B 作 $BF \perp AD$ ，需使 $BM^2 + 2BN^2$ 最小，显然要使得 BM 和 BN 越小越好，则点 F 在线段 MN 的之间，设 $MF = x$ ，则 $FN = 1 - x$ ，求得 $BM^2 + 2BN^2$ 关于 x 的二次函数，利用二次函数的性质即可求解.

【详解】解：过点 C 作 $CE \perp AD$ ，



$$\therefore \angle D = 60^\circ, \quad CD = 2,$$

$$\therefore CE = CD \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

过点 B 作 $BF \perp AD$,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $BCEF$ 是矩形,

$$\therefore BF = CE = \sqrt{3},$$

需使 $BM^2 + 2BN^2$ 最小, 显然要使得 BM 和 BN 越小越好,

$\therefore$ 显然点 F 在线段 MN 的之间,

设 $MF = x$, 则 $FN = 1 - x$,

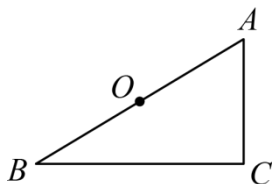
$$\therefore BM^2 + 2BN^2 = x^2 + 3 + 2[(1-x)^2 + 3] = 3x^2 - 4x + 11 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{29}{3},$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{2}{3} \text{ 时取得最小值为 } \frac{29}{3}.$$

故选: B.

【点睛】本题考查了二次函数应用, 矩形的判定和性质, 解直角三角形, 利用二次函数的性质是解题的关键.

10. 如图 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 4$, $AC = x$, $\angle BAC = \alpha$, O 为 AB 中点, 若点 D 为直线 BC 下方一点, 且 $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 相似, 则下列结论: ①若 $\alpha = 45^\circ$, BC 与 OD 相交于 E , 则点 E 不一定是 $\triangle ABD$ 的重心; ②若 $\alpha = 60^\circ$, 则 AD 的最大值为 $2\sqrt{7}$; ③若 $\alpha = 60^\circ$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, 则 OD 的长为 $2\sqrt{3}$; ④若 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$, 则当 $x = 2$ 时, $AC + CD$ 取得最大值. 其中正确的为 ()



A. ①④

B. ②③

C. ①②④

D. ①③④

【答案】A

【解析】

【分析】①有3种情况，分别画出图形，得出 $\triangle ABD$ 的重心，即可求解；当 $\alpha = 60^\circ$ ， $BD \perp BC$ 时， AD 取得最大值，进而根据已知数据，结合勾股定理，求得 AD 的长，即可求解；③如图5，若 $\alpha = 60^\circ$ ，

$\triangle ABC \sim \triangle CBD$ ，根据相似三角形的性质求得 $CD = \sqrt{3}$ ， $GE = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $CF = \frac{3}{2}$ ，进而求得 OD ，

即可求解；④如图6，根据相似三角形的性质得出 $CD = \frac{1}{4}BC^2$ ，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $BC^2 = 16 - x^2$ ，根据二次函数的性质，即可求 $AC + CD$ 取得最大值时， $x = 2$ 。

【详解】①有3种情况，如图1， BC 和 OD 都是中线，点 E 是重心；

如图2，四边形 $ABDC$ 是平行四边形， F 是 AD 中点，点 E 是重心；

如图3，点 F 不是 AD 中点，所以点 E 不是重心；

①正确

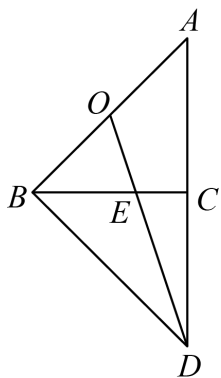


图1

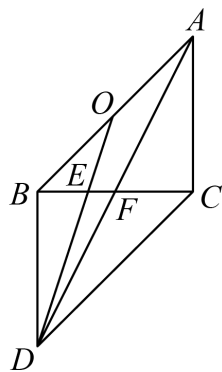


图2

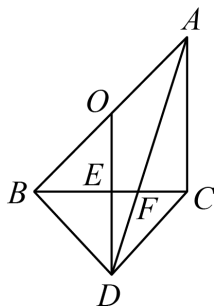


图3

②当 $\alpha = 60^\circ$ ，如图4时 AD 最大， $AB = 4$ ，

$$\therefore AC = BE = 2, BC = AE = 2\sqrt{3}, BD = \sqrt{3}BC = 6,$$

$$\therefore DE = 8,$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{19} \neq 2\sqrt{7},$$

$\therefore$ ②错误；

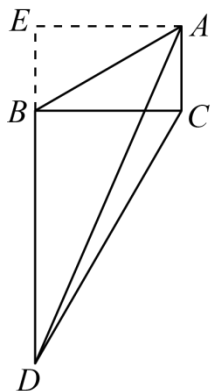


图4

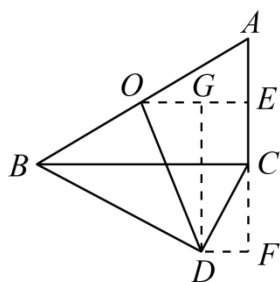


图5

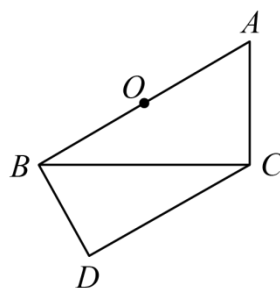


图6

③如图 5, 若 $\alpha = 60^\circ$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$,

$$\therefore \angle BCD = 60^\circ, \angle CDB = 90^\circ, AB = 4, AC = 2, BC = 2\sqrt{3}, OE = \sqrt{3}, CE = 1,$$

$$\therefore CD = \sqrt{3}, GE = DF = \frac{\sqrt{3}}{2}, CF = \frac{3}{2},$$

$$\therefore EF = DG = \frac{5}{2}, OG = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OD = \sqrt{7} \neq 2\sqrt{3},$$

$\therefore$ ③错误;

④如图 6, $\triangle ABC \sim \triangle BCD$,

$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AB},$$

$$\text{即 } CD = \frac{1}{4}BC^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $BC^2 = 16 - x^2$,

$$\therefore CD = \frac{1}{4}(16 - x^2) = -\frac{1}{4}x^2 + 4,$$

$$\therefore AC + CD = x - \frac{1}{4}x^2 + 4 = -\frac{1}{4}(x - 2)^2 + 5,$$

当 $x = 2$ 时, $AC + CD$ 最大为 5,

$\therefore$ ④正确.

故选: C.

【点睛】本题考查了三角形重心的定义, 勾股定理, 相似三角形的性质, 二次函数的性质, 分类讨论, 画出图形是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分.)

11. 分解因式: $4 - 4x + x^2 =$ _____.

【答案】 $(2 - x)^2$

【解析】

【分析】利用完全平方公式进行因式分解即可.

【详解】解: $4 - 4x + x^2 = (2 - x)^2$;

故答案为: $(2 - x)^2$.

【点睛】本题考查因式分解. 熟练掌握完全平方公式法因式分解, 是解题的关键.

12. 废旧电池含有少量重金属，随意丢弃会污染环境有资料表明，一粒纽扣大的废旧电池，大约会污染水 600000 L. 数据 600000 用科学记数法可表示_____.

【答案】 6×10^5

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.

【详解】解： $600000 = 6 \times 100000 = 6 \times 10^5$.

故答案为： 6×10^5 .

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

13. 方程 $\frac{3}{x-2} = \frac{2}{x-1}$ 的解是： $x =$ _____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】首先方程两边乘以最简公分母 $(x-2)(x-1)$ 去分母，然后去括号，移项，合并同类项，把 x 的系数化为 1，最后一定要检验.

【详解】解：去分母得： $3(x-1) = 2(x-2)$,

去括号得： $3x-3 = 2x-4$,

移项得： $3x-2x = -4+3$,

合并同类项得： $x = -1$,

检验：把 $x = -1$ 代入最简公分母中： $x-2 \neq 0, x-1 \neq 0$,

$\therefore$ 原分式方程的解为： $x = -1$,

故答案为： -1

【点睛】此题主要考查了分式方程的解法，做题过程中关键是不要忘记检验，很多同学忘记检验，导致错误.

14. 若直三棱柱的上下底面为正三角形，侧面展开图是边长为 6 的正方形，则该直三棱柱的表面积为_____.

【答案】 $36 + 2\sqrt{3}$

【解析】

【分析】根据题意得出正三角形的边长为2，进而根据表面积等于两个底面积加上侧面正方形的面积即可求解.

【详解】解：∵侧面展开图是边长为6的正方形，

∴底面周长为6，

∴底面为正三角形，

∴正三角形的边长为2

作 $CD \perp AB$ ，

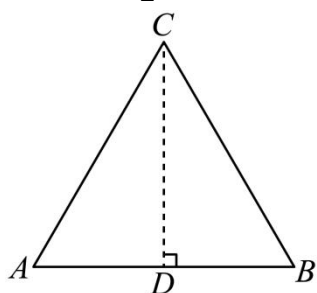
∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形， $AB = BC = AC = 2$ ，

∴ $AD = 1$ ，

∴在直角 $\triangle ADC$ 中，

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3};$$



∴该直三棱柱的表面积为 $6 \times 6 + 2\sqrt{3} = 36 + 2\sqrt{3}$ ，

故答案为： $36 + 2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了三棱柱的侧面展开图的面积，等边三角形的性质，正方形的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键.

15. 请写出一个函数的表达式，使得它的图象经过点 $(2,0)$ ：_____.

【答案】 $y = x - 2$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】根据一次函数的定义，可以先给出 k 值等于1，再找出符合点的 b 的值即可，答案不唯一.

【详解】解：设 $k = 1$ ，则 $y = x + b$ ，

∴它的图象经过点 $(2,0)$ ，

∴代入得： $2 + b = 0$ ，

解得： $b = -2$ ，

$\therefore$ 一次函数解析式为 $y = x - 2$ ，

故答案为： $y = x - 2$ （答案不唯一）.

【点睛】 本题主要考查对一次函数的常数 k 、 b 的理解和待定系数法的运用，是开放型题目.

16. 《九章算术》中提出了如下问题：今有户不知高、广，竿不知长短，横之不出四尺，从之不出二尺，邪之适出，问户高、广、邪各几何？这段话的意思是：今有门不知其高宽：有竿，不知其长短，横放，竿比门宽长出 4 尺；竖放，竿比门高长出 2 尺；斜放，竿与门对角线恰好相等. 问门高、宽和对角线的长各是多少？则该问题中的门高是_____尺.

【答案】 8

【解析】

【分析】 设门高 x 尺，则竿长为 $(x+2)$ 尺，门的对角线长为 $(x+2)$ 尺，门宽为 $(x-2)$ 尺，根据勾股定理即可求解.

【详解】 解：设门高 x 尺，依题意，竿长为 $(x+2)$ 尺，门的对角线长为 $(x+2)$ 尺，门宽为 $x+2-4 = (x-2)$ 尺，

$$\therefore (x+2)^2 = x^2 + (x-2)^2,$$

解得： $x = 8$ 或 $x = 0$ （舍去），

故答案为： 8.

【点睛】 本题考查了勾股定理，根据题意建立方程是解题的关键.

17. 已知曲线 C_1 、 C_2 分别是函数 $y = -\frac{2}{x} (x < 0)$ 、 $y = \frac{k}{x} (k > 0, x > 0)$ 的图像，边长为 6 的正 $\triangle ABC$ 的顶点 A 在 y 轴正半轴上，顶点 B、C 在 x 轴上（B 在 C 的左侧），现将 $\triangle ABC$ 绕原点 O 顺时针旋转，当点 B 在曲线 C_1 上时，点 A 恰好在曲线 C_2 上，则 k 的值为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 画出变换后的图像即可（画 $\triangle AOB$ 即可），当点 A 在 y 轴上，点 B、C 在 x 轴上时，根据 $\triangle ABC$ 为等边三角形且 $AO \perp BC$ ，可得 $\frac{OB}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ，过点 A、B 分别作 x 轴垂线构造相似，则 $\triangle BFO \sim \triangle OEA$ ，根据相似三角形的性质得出 $S_{\triangle AOE} = 3$ ，进而根据反比例函数 k 的几何意义，即可求解.

【详解】 当点 A 在 y 轴上，点 B、C 在 x 轴上时，连接 AO，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形且 $AO \perp BC$ ，则 $\angle BAO = 30^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle BAO = \tan 30^\circ = \frac{OB}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

如图所示，过点 A, B 分别作 x 轴的垂线，交 x 轴分别于点 E, F ，

$\because AO \perp BO$ ， $\angle BFO = \angle AEO = \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOF = 90^\circ - \angle AOE = \angle EAO$ ，

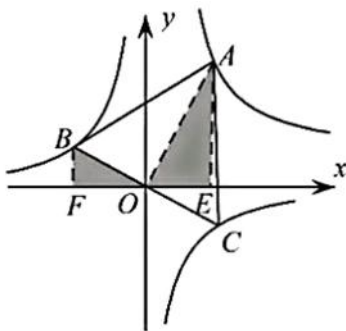
$\therefore \triangle BFO \sim \triangle OEA$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BFO}}{S_{\triangle AOE}} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BFO} = \frac{|-2|}{2} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOE} = 3,$$

$$\therefore k = 6.$$



【点睛】本题考查了反比例函数的性质， k 的几何意义，相似三角形的性质与判定，正确作出辅助线构造相似三角形是解题关键。

18. 二次函数 $y = a(x-1)(x-5)$ ($a > \frac{1}{2}$) 的图像与轴交于点 A 、 B ，与 y 轴交于点 C ，过点 $M(3,1)$ 的直线将 $\triangle ABC$ 分成两部分，这两部分是三角形或梯形，且面积相等，则 a 的值为_____。

【答案】 $\frac{9}{10}$ 或 $\frac{2+\sqrt{2}}{5}$ 或 $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

【解析】

【分析】先求得 $A(1,0)$ ， $B(5,0)$ ， $C(0,5a)$ ，直线 BM 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ ，直线 AM 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ，1)、当分成两个三角形时，直线必过三角形一个顶点，平分面积，必为中线，则①如图 1，

直线 AM 过 BC 中点, ②如图 2, 直线 BM 过 AC 中点, 直线 BM 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, AC 中点坐标为 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}a)$, 待入直线求得 $a = \frac{9}{10}$; ③如图 3, 直线 CM 过 AB 中点, AB 中点坐标为 $(3, 0)$, 直线 MB 与 y 轴平行, 必不成立; 2) 当分成三角形和梯形时, 过点 M 的直线必与 $\triangle ABC$ 一边平行, 所以必有“ A ”型相似, 因为平分面积, 所以相似比为 $1:\sqrt{2}$. ④如图 4, 直线 $EM \parallel AB$, 根据相似三角形的性质, 即可求解; ⑤如图 5, 直线 $ME \parallel AC$, ⑥如图 6, 直线 $ME \parallel BC$, 同理可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, 进而根据 $\tan \angle MEN = \tan \angle CBO$, 即可求解.

【详解】解: 由 $y = a(x-1)(x-5)$, 令 $x = 0$, 解得: $y = 5a$, 令 $y = 0$, 解得: $x_1 = 1, x_2 = 5$,

$$\therefore A(1, 0), B(5, 0), C(0, 5a),$$

设直线 BM 解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} 5k + b = 0 \\ 3k + b = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 BM 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, 当 $x = 0$ 时, $y = \frac{5}{2}$, 则直线 BM 与 y 轴交于 $(0, \frac{5}{2})$,

$$\therefore a > \frac{1}{2},$$

$$\therefore 5a > \frac{5}{2},$$

$\therefore$ 点 M 必在 $\triangle ABC$ 内部.

1)、当分成两个三角形时, 直线必过三角形一个顶点, 平分面积, 必为中线

设直线 AM 的解析式为 $y = mx + n$

$$\therefore \begin{cases} k + b = 0 \\ 3k + b = 1 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

则直线 AM 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

①如图 1, 直线 AM 过 BC 中点,,

BC 中点坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}a\right)$, 代入直线求得 $a = \frac{3}{10} < \frac{1}{2}$, 不成立;

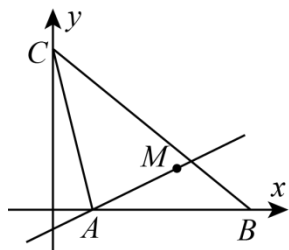


图1

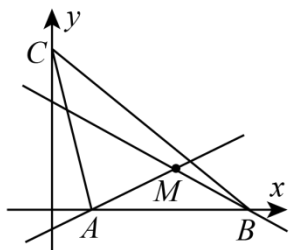


图2

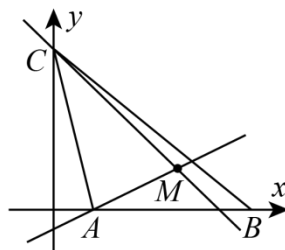


图3

②如图 2, 直线 BM 过 AC 中点, 直线 BM 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, AC 中点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}a\right)$, 代入直线

求得 $a = \frac{9}{10}$;

③如图 3, 直线 CM 过 AB 中点, AB 中点坐标为 $(3, 0)$,

$\therefore$ 直线 MB 与 y 轴平行, 必不成立;

2)、当分成三角形和梯形时, 过点 M 的直线必与 $\triangle ABC$ 一边平行, 所以必有“ A ”型相似, 因为平分面积, 所以相似比为 $1:\sqrt{2}$.

④如图 4, 直线 $EM \parallel AB$,

$\therefore \triangle CEN \sim \triangle COA$

$$\therefore \frac{CE}{CO} = \frac{CN}{CA} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\therefore \frac{5a-1}{5a} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{解得 } a = \frac{2+\sqrt{2}}{5};$$

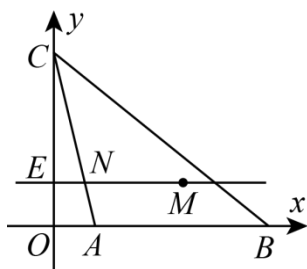


图4

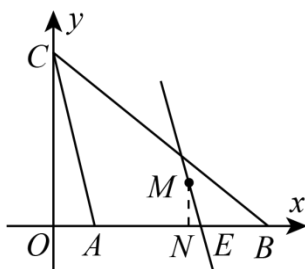


图5

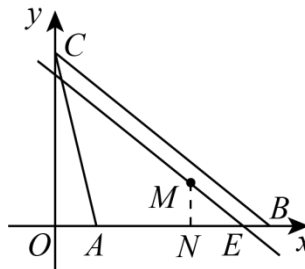


图6

⑤如图 5，直线 $ME \parallel AC$ ， $MN \parallel CO$ ，则 $\triangle EMN \sim \triangle ACO$

$$\therefore \frac{BE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 又 } AB = 4,$$

$$\therefore BE = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BN = 5 - 3 = 2 < 2\sqrt{2},$$

$\therefore$ 不成立;

⑥如图 6，直线 $ME \parallel BC$ ，同理可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\therefore AE = 2\sqrt{2}, \quad NE = 2\sqrt{2} - 2, \quad \tan \angle MEN = \tan \angle CBO,$$

$$\therefore \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{5a}{5}, \text{ 解得 } a = \frac{\sqrt{2} + 1}{2};$$

$$\text{综上所述, } a = \frac{9}{10} \text{ 或 } \frac{2 + \sqrt{2}}{5} \text{ 或 } \frac{\sqrt{2} + 1}{2}.$$

【点睛】本题考查了二次函数的综合问题，解直角三角形，相似三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识，并分类讨论是解题的关键.

三、解答题（本大题共 10 小题，共 90 分．解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. (1) 计算: $(-3)^2 - \sqrt{25} + |-4|$

(2) 化简: $(x + 2y)(x - 2y) - x(x - y)$

【答案】(1) 8; (2) $-4y^2 + xy$

【解析】

【分析】(1) 根据有理数的乘方，求一个数的算术平方根，化简绝对值，进行计算即可求解;

(2) 根据平方差公式以及单项式乘以多项式进行计算即可求解.

【详解】解: (1) $(-3)^2 - \sqrt{25} + |-4|$

$$= 9 - 5 + 4$$

$$= 8;$$

$$(2) (x+2y)(x-2y) - x(x-y)$$

$$= x^2 - 4y^2 - x^2 + xy$$

$$= -4y^2 + xy.$$

【点睛】 本题考查了有理数的乘方，求一个数的算术平方根，化简绝对值，整式的乘法，熟练掌握以上运算法则以及乘法公式是解题的关键.

$$20. (1) \text{解方程: } 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$(2) \text{解不等式组: } \begin{cases} x+3 > -2x \\ 2x-5 < 1 \end{cases}$$

$$\text{【答案】 (1) } x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}; (2) -1 < x < 3$$

【解析】

【分析】 (1) 根据公式法解一元二次方程即可求解;

(2) 分别求出每一个不等式的解集, 根据口诀: 同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集.

$$\text{【详解】 (1) } 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$\text{解: } \because a=2, b=1, c=-2,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 1 + 4 \times 2 \times 2 = 17 > 0,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4};$$

$$(2) \begin{cases} x+3 > -2x \text{ ①} \\ 2x-5 < 1 \text{ ②} \end{cases}$$

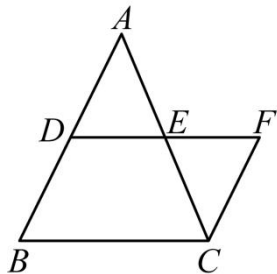
$$\text{解不等式①得: } x > -1$$

$$\text{解不等式②得: } x < 3$$

$$\therefore \text{不等式组的解集为: } -1 < x < 3$$

【点睛】 本题考查了解一元二次方程，求不等式组的解集，熟练掌握公式法解一元二次方程以及解一元一次不等式组是解题的关键.

21. 如图， $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别为 AB 、 AC 的中点，延长 DE 到点 F ，使得 $EF = DE$ ，连接 CF . 求证：



(1) $\triangle CEF \cong \triangle AED$;

(2) 四边形 $DBCF$ 是平行四边形.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 根据三角形的中位线定理得到 $AE = CE$, $DE \parallel BC$, 根据全等三角形的判定定理即可得到结论;

(2) 根据全等三角形的性质和平行四边形的判定定理即可得到结论.

【小问 1 详解】

证明: $\because$ 点 D 、 E 分别为 AB 、 AC 的中点,

$\therefore AE = CE$, $DE \parallel BC$,

$\therefore \angle ADE = \angle F$,

在 $\triangle CEF$ 与 $\triangle AED$ 中,
$$\begin{cases} \angle ADE = \angle F \\ \angle AED = \angle CEF , \\ AE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle CEF \cong \triangle AED$ (AAS);

【小问 2 详解】

证明: 由 (1) 证得 $\triangle CEF \cong \triangle AED$,

$\therefore \angle A = \angle FCE$,

$\therefore BD \parallel CF$,

$\therefore DF \parallel BC$,

$\therefore$ 四边形 $DBCF$ 是平行四边形.

【点睛】 本题考查了全等三角形的判定和性质，三角形中位线定理，平行四边形的判定，熟练掌握全等三

角形的判定和性质定理是解题的关键.

22. 为了深入推动大众旅游, 满足人民群众美好生活需要, 我市举办中国旅游日惠民周活动, 活动主办方在活动现场提供免费门票抽奖箱, 里面放有 4 张相同的卡片, 分别写有景区: A . 宜兴竹海, B . 宜兴善卷洞, C . 阖闾城遗址博物馆, D . 锡惠公园. 抽奖规则如下: 搅匀后从抽奖箱中任意抽取一张卡片, 记录后放回, 根据抽奖的结果获得相应的景区免费门票.

(1) 小明获得一次抽奖机会, 他恰好抽到景区 A 门票的概率是_____.

(2) 小亮获得两次抽奖机会, 求他恰好抽到景区 A 和景区 B 门票的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{8}$

【解析】

【分析】(1) 根据概率公式求解即可;

(2) 画出树状图, 得出总的结果数和恰好抽到景区 A 和景区 B 门票的情况, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 共有 4 张相同的卡片且任意抽取一张卡片, 记录后放回,

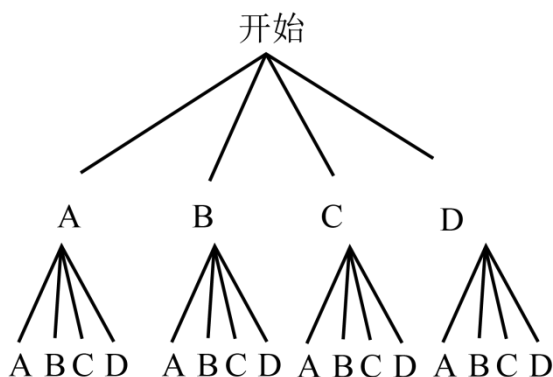
$\therefore$ 每张卡片抽到的概率都是 $\frac{1}{4}$,

设小明恰好抽到景区 A 门票为事件 A , 则 $P(A) = \frac{1}{4}$,

故答案为: $\frac{1}{4}$;

【小问 2 详解】

解: 根据题意, 画树状图如下:



$\therefore$ 一共有 16 种等可能的情况, 恰好抽到景区 A 和景区 B 门票的情况有 2 种,

$\therefore$ 他恰好抽到景区 A 和景区 B 门票的概率为 $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$;

【点睛】此题考查的是用树状图法求概率，树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

23. 2023 年 5 月 30 日，神州十六号载人飞船成功发射，为大力弘扬航天精神，普及航天知识，激发学生探索和创新热情，某初中在全校开展航天知识竞赛活动现采用简单随机抽样的方法从每个年级抽取相同数量的学生答题成绩进行分析，绘制成下列图表，请根据图表提供的信息，解答下列问题：

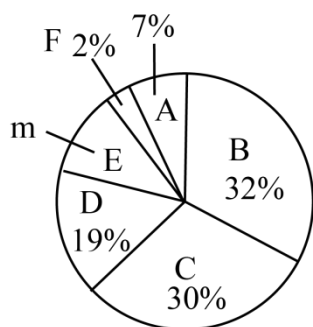
学生参加航天知识竞赛成绩频数分布表

竞赛成绩 x (组别)	$x < 75$ (A)	$75 \leq x < 80$ (B)	$80 \leq x < 85$ (C)	$85 \leq x < 90$ (D)	$90 \leq x < 95$ (E)	$95 \leq x \leq 100$ (F)
频数	21	96	a	57	b	6

学生参加航天知识竞赛成绩统计表

年级	平均数	众数	中位数
七年级	82.73	82	81
八年级	81.84	82	82
九年级	81.31	83	80

学生参加航天知识竞赛成绩扇形统计图



(1) $a =$ _____; $m =$ _____%;

(2) 请根据“学生参加航天知识竞赛成绩统计表”对本次竞赛中 3 个年级的总体情况做出评价，并说明理由.

【答案】(1) 90; 10

(2) 七年级的平均分最高；八年级的中位数最大；九年级的众数最大

【解析】

【分析】(1) 先求出总人数，再根据 C 所占的百分比求出 a ，再由所有频率之和为 1，求出“ E ”所占的百分比，进而确定 m 的值；

(2) 比较中位数、众数、平均数的大小得出答案.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 抽取的总人数为 $21 \div 7\% = 300$ (人)，

$\therefore C$ 组的人数为 $a = 300 \times 30\% = 90$ (人)，

$m = 100\% - 7\% - 32\% - 30\% - 19\% - 2\% = 10\%$ ；

故答案为：90，10；

【小问 2 详解】

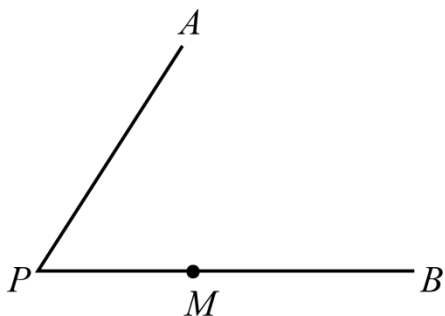
解：七年级的平均分最高；

八年级的中位数最大；

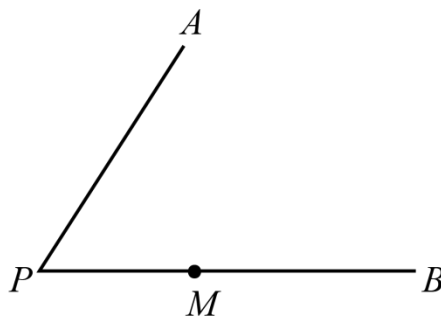
九年级的众数最大. (答案不唯一).

【点睛】本题考查中位数、众数、平均数以及样本估计总体，理解中位数、众数的定义，掌握中位数、众数、平均数的计算方法是正确解答的关键.

24. 如图，已知 $\angle APB$ ，点 M 是 PB 上的一个定点.



(图1)



(图2)

(1) 尺规作图：请在图 1 中作 $\odot O$ ，使得 $\odot O$ 与射线 PB 相切于点 M ，同时与 PA 相切，切点记为 N ；

(2) 在 (1) 的条件下，若 $\angle APB = 60^\circ$ ， $PM = 3$ ，则所作的 $\odot O$ 的劣弧 $\widehat{MN}$ 与 PM 、 PN 所围成图形的面积是_____.

【答案】(1) 见解析 (2) $3\sqrt{3} - \pi$

【解析】

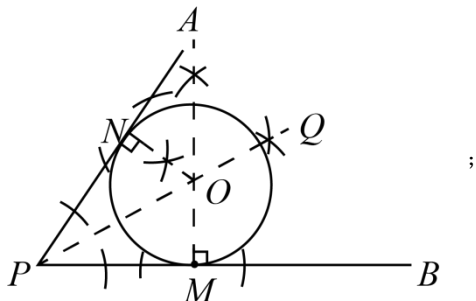
【分析】(1) 先作 $\angle APB$ 的平分线 PQ ，再过 M 点作 PB 的垂线交 PQ 于点 O ，接着过 O 点作 $ON \perp PA$ 于 N 点，然后以 O 点为圆心， OM 为半径作圆，则 $\odot O$ 满足条件；

(2) 先利用切线的性质得到 $OM \perp PB$ ， $ON \perp PN$ ，根据切线长定理得到 $\angle MPO = \angle NPO = 30^\circ$ ，则

$\angle MON = 120^\circ$, 再利用含 30° 度角的直角三角形三边的关系计算出 $OM = \sqrt{3}$, 然后根据扇形的面积公式, 利用 $\odot O$ 的劣弧 $\widehat{MN}$ 与 PM 、 PN 所围成图形的面积 $= S_{\text{四边形} PMON} - S_{\text{扇形} MON}$ 进行计算.

【小问 1 详解】

解: 如图, $\odot O$ 为所作;



【小问 2 详解】

解: $\because PM$ 和 PN 为 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OM \perp PB, \quad ON \perp PN, \quad \angle MPO = \angle NPO = \frac{1}{2} \angle APB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OMP = \angle ONP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MON = 180^\circ - \angle APB = 120^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle POM$ 中, $\angle MPO = 30^\circ$,

$$\therefore OM = PM \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 3 = \sqrt{3},$$

$\therefore \odot O$ 的劣弧 $\widehat{MN}$ 与 PM 、 PN 所围成图形的面积

$$= S_{\text{四边形}PMON} - S_{\text{扇形}MON}$$

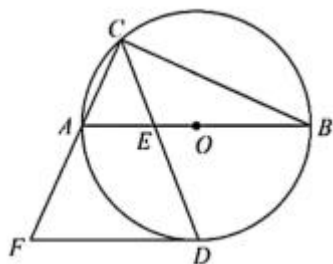
$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} - \frac{120 \times \pi \times (\sqrt{3})^2}{360}$$

$$= 3\sqrt{3} - \pi .$$

故答案为: $3\sqrt{3}-\pi$.

【点睛】本题考查了作图-复杂作图：解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作，也考查了切线的判定与性质、扇形的面积计算。

25. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, CD 与 AB 相交于点 E . 过点 D 的线 $DF \parallel AB$, 交 CA 的延长线于点 F , $CF = CD$.



- (1) 求 $\angle F$ 的度数；
 (2) 若 $DE \cdot DC = 8$ ，求 $\odot O$ 的半径.

【答案】(1) 67.5°

(2) 2

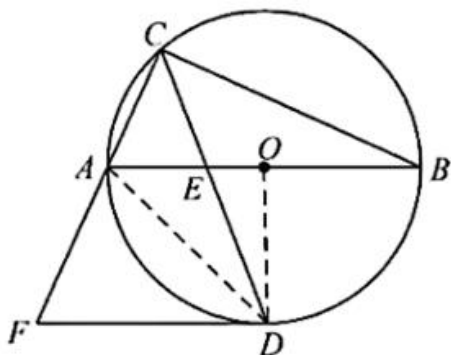
【解析】

【分析】(1) 连接 OD ，根据 FD 为 $\odot O$ 的切线，则 $\angle ODF = 90^\circ$ ，由 $DF \parallel AB$ ，则 $\angle AOD = 90^\circ$ ，根据圆周角定理可得 $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 45^\circ$ ，又 $CF = CD$ ，根据等边对等角以及三角形内角和定理即可求解；

(2) 证明 $\triangle DAE \sim \triangle DCA$ ，根据相似三角形的性质，代入数据即可求解.

【小问 1 详解】

如图，连接 OD .



$\because FD$ 为 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle ODF = 90^\circ$.

$\because DF \parallel AB$,

$\therefore \angle AOD = 90^\circ$.

$\because \widehat{AD} = \widehat{AD}$,

$\therefore \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 45^\circ$.

$\because CF = CD$,

$$\therefore \angle F = \frac{1}{2} \times (180 - \angle ACD) = 67.5^\circ.$$

【小问2详解】

如图，连接 AD ，

$$\because AO = OD, \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD = 45^\circ.$$

$$\because \angle ACD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle EAD, \text{ 且 } \angle ADE = \angle CDA,$$

$$\therefore \triangle DAE \sim \triangle DCA,$$

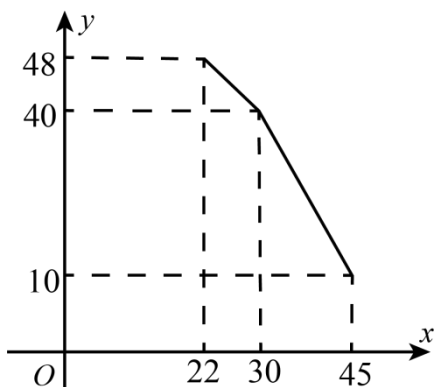
$$\therefore \frac{DE}{DA} = \frac{DA}{DC}, \text{ 即 } DA^2 = DE \cdot DC = 8,$$

$$\therefore DA = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore OA = OD = \frac{\sqrt{2}}{2} AD = 2, \text{ 即半径为 } 2.$$

【点睛】本题考查了切线的性质，圆周角定理，等边对等角，三角形内角和定理，相似三角形的性质与判定等知识。正确作出辅助线是解题关键。

26. 某景区旅游商店以 20 元/kg 的价格采购一款旅游食品加工后出售，销售价格不低于 22 元/g，不高于 45 元/g，经市场调查发现每天的销售量 $y(\text{kg})$ 与销售价格 x (元/g) 之间的函数关系如图所示。



(1) 求 y 关于 x 的函数表达式：

(2) 当销售价格定为多少时，该商店销售这款食品每天获得的销售利润最大？最大销售利润是多少？【销售利润 = (销售价格 - 采购价格) × 销售量】

【答案】(1) $y = \begin{cases} -x + 70 & (22 \leq x \leq 30) \\ -2x + 100 & (30 < x \leq 45) \end{cases}$

(2) 销售价格为 35 元/kg 时，利润最大为 450

【解析】

【分析】(1) 分 $22 \leq x \leq 30$ 时, 当 $30 < x \leq 45$ 时, 分别待定系数法求解析式即可求解;

(2) 设利润为 w , 根据题意当 $22 \leq x \leq 30$ 时, 得出 $w = -(x-45)^2 + 625$, 当 $30 < x \leq 45$ 时,

$$w = -2(x-35)^2 + 450,$$

进而根据分 $22 \leq x \leq 30$ 时, 当 $30 < x \leq 45$ 时, 分别求得最大值, 即可求解.

【小问 1 详解】

当 $22 \leq x \leq 30$ 时, 设 y 关于 x 的函数表达式为 $y = kx + b$, 将点 $(22, 48), (30, 40)$ 代入得,

$$\therefore \begin{cases} 22k + b = 48 \\ 30k + b = 40 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = 70 \end{cases}$$

$$\therefore y = -x + 70 \quad (22 \leq x \leq 30),$$

当 $30 < x \leq 45$ 时, 设 y 关于 x 的函数表达式为 $y = k_1x + b_1$, 将点 $(30, 40), (45, 10)$ 代入得,

$$\begin{cases} 45k_1 + b_1 = 10 \\ 30k_1 + b_1 = 40 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = -2 \\ b_1 = 100 \end{cases}$$

$$\therefore y = -2x + 100 \quad (30 < x \leq 45),$$

$$y = \begin{cases} -x + 70 & (22 \leq x \leq 30) \\ -2x + 100 & (30 < x \leq 45) \end{cases}$$

【小问 2 详解】

设利润为 w

$$\text{当 } 22 \leq x \leq 30 \text{ 时, } w = (x-20)(-x+70) = -x^2 + 90x - 1400 = -(x-45)^2 + 625$$

$\therefore$ 在 $22 \leq x \leq 30$ 范围内, w 随着 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 30$ 时, w 取得最大值为 400;

$$\text{当 } 30 < x \leq 45 \text{ 时, } w = (x-20)(-2x+100) = -2x^2 + 140x - 2000 = -2(x-35)^2 + 450$$

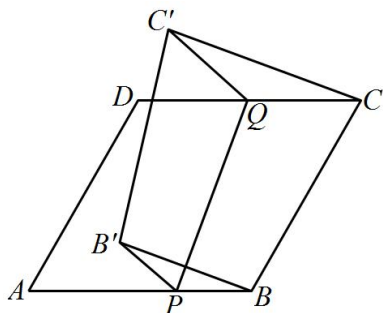
$\therefore$ 当 $x = 35$ 时, w 取得最大值为 450

$$\therefore 450 > 400,$$

∴当销售价格为35元/kg时，利润最大为450.

【点睛】本题考查了一次函数的应用，二次函数的应用，根据题意列出函数关系式是解题的关键.

27. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为4的菱形， $\angle A = 60^\circ$ ，点 Q 为 CD 的中点， P 为线段 AB 上的动点，现将四边形 $PBCQ$ 沿 PQ 翻折得到四边形 $PB'C'Q$.



(1) 当 $\angle QPB = 45^\circ$ 时，求四边形 $BB'C'C$ 的面积；

(2) 当点 P 在线段 AB 上移动时，设 $BP = x$ ，四边形 $BB'C'C$ 的面积为 S ，求 S 关于 x 的函数表达式.

【答案】(1) $4\sqrt{3} + 8$

$$(2) S = \frac{32\sqrt{3}x}{x^2 + 12} + 4\sqrt{3}$$

【解析】

【分析】(1) 连接 BD 、 BQ ，根据菱形的性质以及已知条件可得 $\triangle BDC$ 为等边三角形，根据 $\angle QPB = 45^\circ$ ，可得 $\triangle PBQ$ 为等腰直角三角形，则 $PB = 2\sqrt{3}$ ， $PQ = 2\sqrt{6}$ ，根据翻折的性质，可得 $\angle BPB' = 90^\circ$ ， $PB = PB'$ ，则 $BB' = 2\sqrt{6}$ ， $PE = \sqrt{6}$ ；同理 $CQ = 2$ ， $CC' = 2\sqrt{2}$ ， $QF = \sqrt{2}$ ；进而根据

$S_{\text{四边形}BB'C'C} = 2S_{\text{梯形}PBCQ} - S_{\triangle PBB'} + S_{\triangle CQC'}$ ，即可求解；

(2) 等积法求得 $BE = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + 12}}$ ，则 $QE = \frac{12}{\sqrt{x^2 + 12}}$ ，根据三角形的面积公式可得 $S_{\triangle QEB} = \frac{12\sqrt{3}x}{x^2 + 12}$ ，证

明 $\triangle BEQ \sim \triangle QFC$ ，根据相似三角形的性质，得出 $S_{\triangle QFC} = \frac{4\sqrt{3}x}{x^2 + 12}$ ，根据 $S = 2(S_{\triangle QEB} + S_{\triangle BQC} + S_{\triangle QFC})$ 即

可求解.

【小问1详解】

如图，连接 BD 、 BQ ，

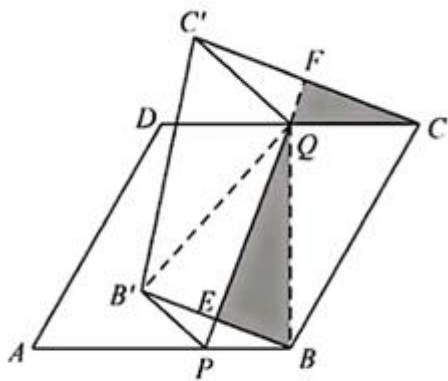


图 2

$$\because PB = x, \quad BQ = 2\sqrt{3}, \quad \angle PBQ = 90^\circ,$$

$$\therefore PQ = \sqrt{x^2 + 12}.$$

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{2}PQ \times BE = \frac{1}{2}PB \times BQ$$

$$\therefore BE = \frac{BQ \times PB}{PQ} = \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + 12}},$$

$$\therefore QE = \frac{12}{\sqrt{x^2 + 12}},$$

$$\therefore S_{\triangle QEB} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{12}{\sqrt{x^2 + 12}} = \frac{12\sqrt{3}x}{x^2 + 12}.$$

$$\because \angle BEQ = \angle BQC = \angle QFC = 90^\circ, \text{ 则 } \angle EQB = 90^\circ - \angle CQF = \angle FCQ,$$

$$\therefore \triangle BEQ \sim \triangle QFC,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle QFC}}{S_{\triangle BEQ}} = \left(\frac{CQ}{QB}\right)^2 = \left(\frac{2}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle QFC} = \frac{4\sqrt{3}x}{x^2 + 12}.$$

$$\therefore S_{\triangle BQC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S = 2(S_{\triangle QEB} + S_{\triangle BQC} + S_{\triangle QFC}) = 2\left(\frac{12\sqrt{3}x}{x^2 + 12} + 2\sqrt{3} + \frac{4\sqrt{3}x}{x^2 + 12}\right) = \frac{32\sqrt{3}x}{x^2 + 12} + 4\sqrt{3}.$$

【点睛】 本题考查了菱形与折叠问题，勾股定理，折叠的性质，相似三角形的性质与判定，熟练掌握菱形

的性质以及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

28. 已知二次函数 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 的图像与 y 轴交于点 A ，且经过点 $B(4, \sqrt{2})$ 和点 $C(-1, \sqrt{2})$.

(1) 请直接写出 b ， c 的值；

(2) 直线 BC 交 y 轴于点 D ，点 E 是二次函数 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 图像上位于直线 AB 下方的动点，过

点 E 作直线 AB 的垂线，垂足为 F .

①求 EF 的最大值；

②若 $\triangle AEF$ 中有一个内角是 $\angle ABC$ 的两倍，求点 E 的横坐标.

【答案】(1) $b = -3$ ， $c = -2$

(2) ① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ；② 2 或 $\frac{17}{5}$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求解析式即可求解；

(2) ①过点 E 作 y 轴平行线分别交 AB 、 BD 于 G 、 H . 令 $x = 0$ ，求得 $A(0, -\sqrt{2})$ ，勾股定理求得 AB ，得出 $\cos \angle ABD = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，则 $\cos \angle FEG = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，进而可得 $EF = \frac{\sqrt{6}}{3} EG$ ，求得直线 AB 的解析式为

$y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}$ ，设 $E\left(m, \frac{\sqrt{2}}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}m - \sqrt{2}\right)$ ，则 $G\left(m, \frac{\sqrt{2}}{2}m - \sqrt{2}\right)$ ，进而表示出 EG ，最后根据二次函数的性质即可求解.

②根据已知 $\tan \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，令 $AC = \sqrt{2}$ ， $AB = 2$ ，在 BC 上取点 D ，使得 $AD = BD$ ，得出

$\tan(2\angle ABC) = 2\sqrt{2}$ ，然后根据 $\tan \angle MFA = \tan \angle CBA = \tan \angle FEN = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，设 $AM = \sqrt{2}a$ ，

$MF = 2a$. 进而分两种情况讨论，i 当 $\angle FAE = 2\angle ABC$ 时， $\tan \angle FAE = 2\sqrt{2}$ ，则相似比为 $1:2\sqrt{2}$ ，得出 $E(6a, -\sqrt{2} - 3\sqrt{2}a)$ 代入抛物线解析式，即可求解；ii 当 $\angle FEA = 2\angle ABC$ 时， $\tan \angle FEA = 2\sqrt{2}$ ，

同理可得 $E\left(\frac{5}{2}a, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ ，代入抛物线解析式即可求解.

【小问 1 详解】

∵ 二次函数 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 + bx + c)$ 的图像与 y 轴交于点 A ，且经过点 $B(4, \sqrt{2})$ 和点 $C(-1, \sqrt{2})$

$$\therefore \begin{cases} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(4^2 + 4b + c) \\ \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - b + c) \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$

$$\therefore b = -3, c = -2, y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - 3x - 2);$$

【小问 2 详解】

①如图 1，过点 E 作 y 轴平行线分别交 AB 、 BD 于 G 、 H 。

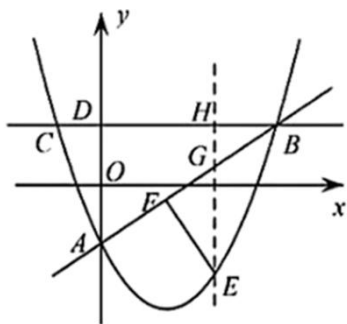


图 1

$$\therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x^2 - 3x - 2),$$

当 $x = 0$ 时， $y = -\sqrt{2}$ ，

$$\therefore A(0, -\sqrt{2}),$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{2}, BD = 4,$$

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 2\sqrt{6},$$

$$\therefore \cos \angle ABD = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\therefore \angle GFE = \angle GHB = 90^\circ, \angle FGE = \angle HGB,$$

$$\therefore \angle FEG = \angle ABD,$$

$$\therefore \cos \angle FEG = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore \frac{EF}{EG} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore EF = \frac{\sqrt{6}}{3} EG.$$

$$\because A(0, -\sqrt{2}), B(4, \sqrt{2})$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + d$

$$\therefore \begin{cases} d = -\sqrt{2} \\ 4k + d = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 解析式为 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \sqrt{2}.$$

$$\text{设 } E\left(m, \frac{\sqrt{2}}{2}m^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}m - \sqrt{2}\right),$$

$$\therefore G\left(m, \frac{\sqrt{2}}{2}m - \sqrt{2}\right),$$

$$\therefore EG = -\frac{\sqrt{2}}{2}m^2 + 2\sqrt{2}m = -\frac{\sqrt{2}}{2}(m-2)^2 + 2\sqrt{2},$$

$$\therefore \text{当 } m = 2 \text{ 时, } EG \text{ 取得最大值为 } 2\sqrt{2},$$

$$\therefore EF \text{ 的最大值为 } \frac{\sqrt{6}}{3} \times 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\textcircled{2} \text{如图 2, 已知 } \tan \angle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 令 } AC = \sqrt{2}, \text{ 则 } BC = 2,$$

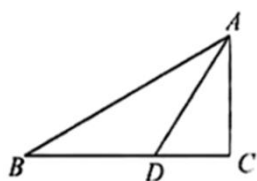


图 2

在 BC 上取点 D ，使得 $AD = BD$ ，

$$\therefore \angle ADC = 2\angle ABC,$$

设 $CD = x$ ，则 $AD = BD = 2 - x$ ，

$$\text{则 } x^2 + (\sqrt{2})^2 = (2 - x)^2,$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan \angle ADC = \frac{AC}{CD} = 2\sqrt{2}, \text{ 即 } \tan(2\angle ABC) = 2\sqrt{2}.$$

如图 3 构造 $\triangle AMF \sim \triangle FNE$ ，且 $MN \parallel x$ 轴，相似比为 $AF : EF$ ，

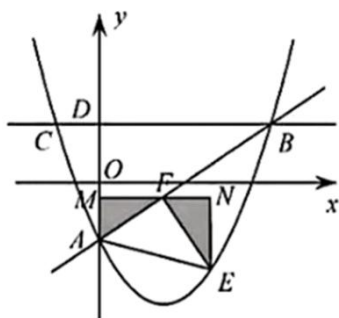


图 3

$$\text{又 } \because \tan \angle MFA = \tan \angle CBA = \tan \angle FEN = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

设 $AM = \sqrt{2}a$ ，则 $MF = 2a$ 。

分类讨论：i 当 $\angle FAE = 2\angle ABC$ 时，则 $\tan \angle FAE = \frac{EF}{AF} = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle AMF$ 与 FNE 的相似比为 $1:2\sqrt{2}$ ，

$$\therefore FN = 2\sqrt{2}AM = 4a, \quad NE = 2\sqrt{2}MF = 4\sqrt{2}a,$$

$$\therefore E(6a, -\sqrt{2} - 3\sqrt{2}a),$$

代入抛物线求得 $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $a_2 = 0$ (舍)。

$\therefore E$ 点横坐标为 $6a = 2$ 。

ii 当 $\angle FEA = 2\angle ABC$ 时, 则 $\tan \angle FEA = \frac{AF}{EF} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore$ 相似比为 $2\sqrt{2}:1$,

$$\therefore FN = \frac{AM}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a, \quad NE = \frac{MF}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

$$\therefore E\left(\frac{5}{2}a, -\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

代入抛物线求得 $a_1 = \frac{34}{25}$, $a_2 = 0$ (舍).

$$\therefore E \text{ 点横坐标为 } \frac{5}{2}a = \frac{17}{5}.$$

综上所述, 点 E 的横坐标为 2 或 $\frac{17}{5}$.

【点睛】 本题考查了二次函数的综合问题, 待定系数法求二次函数解析式, 线段长的最值问题, 相似三角形的性质与判定, 正切的定义. 利用分类讨论的思想并熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

