

扬州市 2023 年初中毕业、升学统一考试数学试题

说明：

1. 本试卷共 6 页，包含选择题（第 1 题~第 8 题，共 8 题）、非选择题（第 9 题~第 28 题，共 20 题）两部分。本卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡相应的位置上，同时务必在试卷的装订线内将本人的姓名、准考证号、毕业学校填写好，在试卷第一面的右下角写好座位号。
3. 所有的试题都必须在专用的“答题卡”上作答，选择题用 2B 铅笔作答，非选择题在指定位置用 0.5 毫米的黑色笔作答。在试卷或草稿纸上答题无效。
4. 如有作图需要，请用 2B 铅笔作答，并请加黑加粗，描写清楚。

一、选择题（本大题共有 8 小题，每小题 3 分，共 24 分。在每小题所给出的四个选项中，恰有一项是符合题目要求的，请将该选项的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. -3 的绝对值是（ ）

- A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. ± 3

【答案】A

【解析】

【分析】根据绝对值的概念，可得 -3 的绝对值就是数轴上表示 -3 的点与原点的距离。进而得到答案。

【详解】解： -3 的绝对值是 3，

故选：A.

【点睛】本题考查绝对值的定义，正确理解绝对值的定义是解题的关键。

2. 若 $(\quad) \cdot 2a^2b = 2a^3b$ ，则括号内应填的单项式是（ ）

- A. a B. $2a$ C. ab D. $2ab$

【答案】A

【解析】

【分析】将已知条件中的乘法运算可以转化为单项式除以单项式进行计算即可解答。

【详解】解： $\because (\quad) \cdot 2a^2b = 2a^3b$ ，

$$\therefore (\quad) = 2a^3b \div 2a^2b = a.$$

故选：A.

【点睛】本题主要考查了整式除法的应用，弄清被除式、除式和商之间的关系是解题的关键。

3. 空气的成分（除去水汽、杂质等）是：氮气约占 78%，氧气约占 21%，其他微量气体约占 1%。要反映上述信息，宜采用的统计图是()

- A. 条形统计图 B. 折线统计图 C. 扇形统计图 D. 频数分布直方图

【答案】C

【解析】

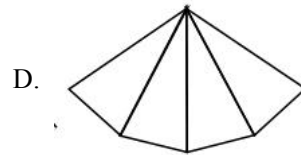
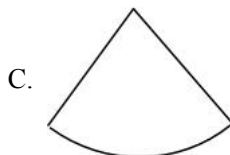
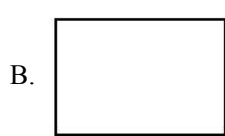
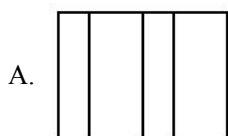
【分析】在扇形统计图中将总体看做一个圆，用各个扇形表示各部分，能清楚的表示出各部分所占总体的百分比。

【详解】根据题意，将空气（除去水汽、杂质等）看做总体，用各个扇形表示空气的成分（除去水汽、杂质等）中每一种成分所占空气的百分比，由此可以选择扇形统计图。

故选 C.

【点睛】本题考查了统计图的选取，扇形统计图的特点及优点，熟练掌握各种统计图的特点及优点是解题的关键。

4. 下列图形中是棱锥的侧面展开图的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】由棱锥的侧面展开图的特征可知答案。

【详解】棱锥的侧面是三角形。

故选：D.

【点睛】本题考查了几何体的展开图，熟记常见立体图形的侧面展开图和侧面的特征是解决此类问题的关键。

5. 已知 $a = \sqrt{5}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系是()

- A. $b > a > c$ B. $a > c > b$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

【答案】C

【解析】

【分析】由 $2 = \sqrt{4}$, $\sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5}$, 进行判断即可。

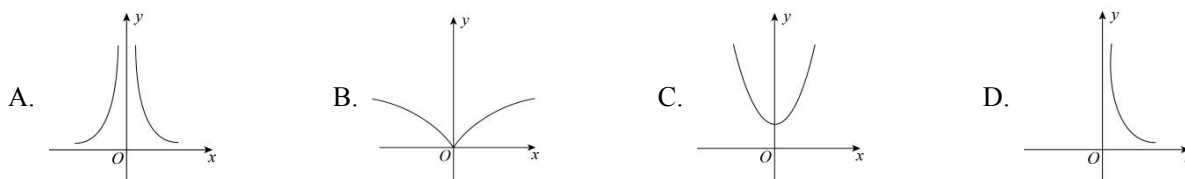
【详解】解： $\because 2 = \sqrt{4}$, $\sqrt{3} < \sqrt{4} < \sqrt{5}$,

$\therefore a > b > c$,

故选：C.

【点睛】本题考查了实数的大小比较，算术平方根. 解题的关键在于对知识的熟练掌握.

6. 函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的大致图像是()



【答案】A

【解析】

【分析】根据函数自变量的取值范围排除错误选项.

【详解】解：函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 自变量 x 的取值范围为 $x \neq 0$.

对于 B、C，函数图像可以取到 $x = 0$ 的点，不符合题意；

对于 D，函数图像只有 $x > 0$ 的部分，没有 $x < 0$ 的部分，不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题考查了根据函数表达式选函数图像，解题的关键是根据函数表达式分析出图像的特点，进而对错误选项进行排除.

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 4$ ，若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则满足条件的 BC 长可以是()

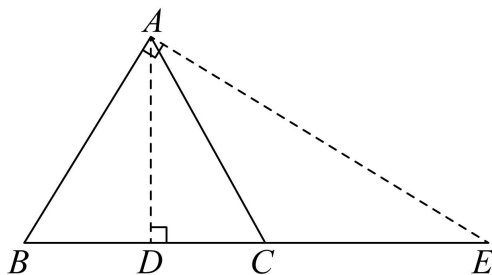
- A. 1 B. 2 C. 6 D. 8

【答案】C

【解析】

【分析】如图，作 $AD \perp BD$ ， $AE \perp AB$ ，则 $\angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle BAE = 90^\circ$ ， $BD = AB \cdot \cos \angle B = 2$ ， $BE = \frac{AB}{\cos \angle B} = 8$ ，由 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，可得 $BD < BC < BE$ ，即 $2 < BC < 8$ ，然后作答即可.

【详解】解：如图，作 $AD \perp BD$ ， $AE \perp AB$ ，



$\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ， $\angle BAE = 90^\circ$ ，

$\therefore BD = AB \cdot \cos \angle B = 2$ ， $BE = \frac{AB}{\cos \angle B} = 8$ ，

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore BD < BC < BE$, 即 $2 < BC < 8$,

$\therefore$ 满足条件的 BC 长可以是 6,

故选: C.

【点睛】 本题考查了余弦, 锐角三角形. 解题的关键在于确定 BC 的取值范围.

8. 已知二次函数 $y = ax^2 - 2x + \frac{1}{2}$ (a 为常数, 且 $a > 0$), 下列结论:

①函数图像一定经过第一、二、四象限; ②函数图像一定不经过第三象限; ③当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; ④当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大. 其中所有正确结论的序号是()

A. ①②

B. ②③

C. ②

D. ③④

【答案】 B

【解析】

【分析】 根据二次函数的图象与性质进行逐一分析即可.

【详解】 解: $\because$ 抛物线对称轴为 $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} > 0$, $c = \frac{1}{2} > 0$,

$\therefore$ 二次函数图象必经过第一、二象限,

又 $\because \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 2a$,

$\because a > 0$,

$\therefore 4 - 2a < 4$,

当 $4 - 2a < 0$ 时, 抛物线与 x 轴无交点, 二次函数图象只经过第一、二象限,

当 $0 < 4 - 2a < 4$ 时, 抛物线与 x 轴有两个交点, 二次函数图象经过第一、二、四象限,

故①错误; ②正确;

$\because$ 抛物线对称轴为 $-\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} > 0$, $a > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上,

$\therefore$ 当 $x < \frac{1}{a}$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故③正确;

$\therefore$ 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故④错误,

故选: B.

【点睛】 本题考查二次函数的图象与性质, 熟练掌握二次函数图象与各项系数符号之间的关系是解题的关键.

二、填空题 (本大题共有 10 小题, 每小题 3 分, 共 30 分. 不需写出解答过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上)

9. 扬州市大力推进城市绿化发展, 2022 年新增城市绿地面积约 2345000 平方米, 数据 2345000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 2.345×10^6

【解析】

【分析】 2345000 用科学记数法表示成 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $a = 2.345$, $n = 6$, 代入可得结果.

【详解】 解: 2345000 的绝对值大于 10 表示成 $a \times 10^n$ 的形式,

$$\because a = 2.345, \quad n = 7 - 1 = 6,$$

$$\therefore 2345000 \text{ 表示成 } 2.345 \times 10^6,$$

故答案为: 2.345×10^6 .

【点睛】 本题考查了科学记数法. 解题的关键在于确定 a 、 n 的值.

10. 分解因式: $xy^2 - 4x =$ _____.

【答案】 $x(y+2)(y-2)$

【解析】

【分析】 先提公因式再利用平方差公式分解因式即可.

【详解】 解: $xy^2 - 4x$

$$= x(y^2 - 4)$$

$$= x(y+2)(y-2)$$

故答案为: $x(y+2)(y-2)$.

【点睛】 本题考查利用提公因式、平方差公式分解因式等知识, 是重要考点, 难度较易, 掌握相关知识是解题关键.

11. 如果一个多边形每一个外角都是 60° , 那么这个多边形的边数为_____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 根据题意知道这个多边形每一个外角都是 60° , 所以确定这是一个正多边形, 根据多边形的外角和等于 360° , 就可求出这个多边形的边数.

【详解】 因为这个多边形每一个外角都是 60° , 所以这个多边形是一个正多边形,

设正多边形的边数为 n ,

根据正多边形外角和: $60^\circ n = 360^\circ$,

得: $n = 6$

故答案为: 6.

【点睛】本题考查了多边形外角和, 熟练掌握多边形外角和等于 360° 是解题的关键, 注意正多边形的每一个外角都相等.

12. 某种绿豆在相同条件下发芽试验的结果如下:

每批粒数 n	2	5	10	50	100	500	1000	1500	2000	3000
发芽的频数 m	2	4	9	44	92	463	928	1396	1866	2794
发芽的频率 $\frac{m}{n}$ (精确到 0.001)	1.000	0.800	0.900	0.880	0.920	0.926	0.928	0.931	0.933	0.931

这种绿豆发芽的概率的估计值为_____ (精确到 0.01).

【答案】0.93

【解析】

【分析】根据题意, 用频率估计概率即可.

【详解】解: 由图表可知, 绿豆发芽的概率的估计值 0.93,

故答案为: 0.93.

【点睛】本题考查了利用频率估计概率. 解题的关键在于明确: 大量重复试验时, 事件发生的频率在某个固定位置左右摆动, 并且摆动的幅度越来越小, 根据频率稳定性定理, 可以用频率的集中趋势来估计概率, 这个固定的近似值就是这个事件的概率.

13. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

【答案】 $k < 1$.

【解析】

【分析】由方程有两个不等实数根可得出关于 k 的一元一次不等式, 解不等式即可得出结论.

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times k > 0,$$

解得: $k < 1$,

故答案为 $k < 1$.

【点睛】本题考查了根的判别式以及解一元一次不等式，解题的关键是得出关于 k 的一元一次不等式。熟知“在一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 中，若方程有两个不相等的实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ”是解答本题的关键。

14. 用半径为 24cm ，面积为 $120\pi\text{cm}^2$ 的扇形纸片，围成一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆的半径为 _____ cm 。

【答案】 5

【解析】

【分析】应为圆锥侧面母线的长就是侧面展开扇形的半径，利用圆锥侧面面积公式： $S = \pi r l$ ，就可以求出圆锥的底面圆的半径。

【详解】解：设圆锥底面圆的半径为 r ， $l = 24$ ，

由扇形的面积： $S = \pi \cdot r \cdot l = 120\pi$ ，

得： $r = 5$

故答案为：5

【点睛】本题考查了圆锥侧面面积的相关计算，熟练掌握圆锥侧面面积的计算公式是解题的关键，注意用扇形围成的圆锥，扇形的半径就是圆锥的母线。

15. 某气球内充满了一定质量的气体，在温度不变的条件下，气球内气体的压强 $p(\text{Pa})$ 是气球体积 $V(\text{m}^3)$ 的反比例函数，且当 $V = 3\text{m}^3$ 时， $p = 8000\text{Pa}$ 。当气球内的气体压强大于 40000Pa 时，气球将爆炸，为确保气球不爆炸，气球的体积应不小于 _____ m^3 。

【答案】 0.6

【解析】

【分析】待定系数法求出反比例函数的解析式，根据反比例函数的性质进行求解即可。

【详解】解：设 $p = \frac{k}{V}$ ，

$\because V = 3\text{m}^3$ 时， $p = 8000\text{Pa}$ ，

$\therefore k = pV = 24000$ ，

$\therefore p = \frac{24000}{V}$ ，

$\because k = 24000 > 0$ ，

$\therefore V > 0$ 时， p 随着 V 的增大而减小，

当 $p = 40000\text{Pa}$ 时， $V = 0.6\text{m}^3$ ，

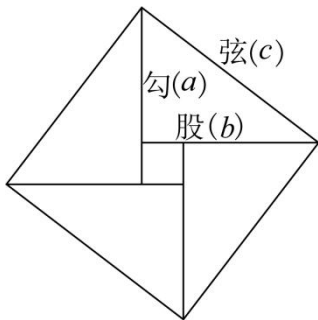
$\therefore$ 当 $V \geq 0.6\text{m}^3$ 时, $p \leq 40000\text{Pa}$,

即: 为确保气球不爆炸, 气球的体积应不小于 0.6m^3 ;

故答案为: 0.6.

【点睛】 本题考查反比例函数的实际应用, 正确的求出反比例函数的解析式, 利用反比例函数的性质, 进行求解, 是解题的关键.

16. 我国汉代数学家赵爽证明勾股定理时创制了一幅“勾股圆方图”, 后人称之为“赵爽弦图”, 它是由 4 个全等的直角三角形和一个小正方形组成. 如图, 直角三角形的直角边长为 a 、 b , 斜边长为 c , 若 $b-a=4$, $c=20$, 则每个直角三角形的面积为_____.



【答案】 96

【解析】

【分析】 由题意知, $a^2 + b^2 = c^2$, 由 $b-a=4$, $c=20$, 可得 $a^2 + (a+4)^2 = 20^2$, 计算求出满足要求的 a , 然后求 b , 根据每个直角三角形的面积为 $\frac{1}{2}ab$, 计算求解即可.

【详解】 解: 由题意知, $a^2 + b^2 = c^2$,

$$\therefore b-a=4, \quad c=20,$$

$$\therefore a^2 + (a+4)^2 = 20^2,$$

解得 $a=12$, $a=-16$ (舍去),

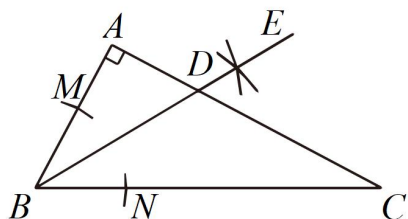
$$\therefore b=16,$$

$$\therefore \text{每个直角三角形的面积为 } \frac{1}{2}ab = 96,$$

故答案为: 96.

【点睛】 本题考查了勾股定理. 解题的关键在于对勾股定理的熟练掌握与灵活运用.

17. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 8$, $AC = 15$, 以点 B 为圆心, 适当长为半径画弧, 分别交 BA 、 BC 于点 M 、 N , 再分别以点 M 、 N 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧, 两弧交于点 E , 作射线 BE 交 AC 于点 D , 则线段 AD 的长为_____.

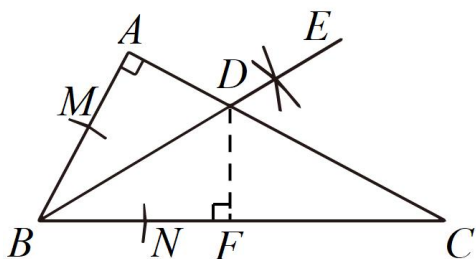


【答案】 $\frac{24}{5}$

【解析】

【分析】利用角平分线的性质构造辅助线，将 $\triangle ABC$ 的面积分解成 $\triangle ABD$ 的面积和 $\triangle BCD$ 面积和，转化成以 AD 为未知数的方程求出 AD 。

【详解】如图：过点 D 作 $DF \perp BC$ 于点 F ，



$$\therefore \angle BFD = \angle CDF = 90^\circ,$$

由题意得： BD 平分 $\angle ABC$ ，

$$\therefore \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore AD = DF, BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} AD \times AB + \frac{1}{2} DF \times BC = 60,$$

$$\therefore \frac{1}{2} AD \times AB + \frac{1}{2} DF \times BC = \frac{1}{2} AD \times (AB + BC) = 60,$$

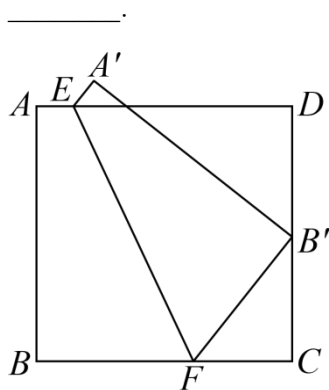
$$\therefore \frac{1}{2} AD \times (AB + BC) = 25 \quad \frac{1}{2} AD = 60,$$

$$\therefore AD = \frac{24}{5};$$

故答案为： $\frac{24}{5}$ 。

【点睛】本题考查了勾股定理、角平分线的性质、直角三角形面积，重点掌握勾股定理的运用，直角三角形的面积转换是解题的关键。

18. 如图，已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，点 E 、 F 分别在边 AD 、 BC 上，将正方形沿着 EF 翻折，点 B 恰好落在 CD 边上的点 B' 处，如果四边形 $ABFE$ 与四边形 $EFCD$ 的面积比为 3 : 5，那么线段 FC 的长为



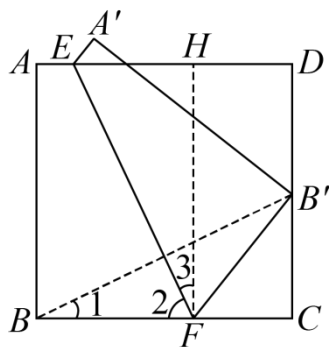
【答案】 $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】连接 BB' ，过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ，设 $CF = x$ ，则 $DH = x$ ，则 $BF = 1 - x$ ，根据已知条件，分别表示出 AE, EH, HD ，证明 $\triangle EHF \cong \triangle B'CB$ (ASA)，得出 $EH = B'C = \frac{5}{4} - 2x$ ，在 $\text{Rt}\triangle B'FC$ 中，

$B'F^2 = B'C^2 + CF^2$ ，勾股定理建立方程，解方程即可求解。

【详解】解：如图所示，连接 BB' ，过点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H ，



$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 1，四边形 $ABFE$ 与四边形 $EFCD$ 的面积比为 3 : 5，

$$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = \frac{3}{8} \times 1 = \frac{3}{8},$$

设 $CF = x$ ，则 $DH = x$ ，则 $BF = 1 - x$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABFE} = \frac{1}{2}(AE + BF) \times AB = \frac{3}{8}$$

$$\text{即 } \frac{1}{2}(AE + 1 - x) \times 1 = \frac{3}{8}$$

$$\therefore AE = x - \frac{1}{4}$$

$$\therefore DE = 1 - AE = \frac{5}{4} - x,$$

$$\therefore EH = ED - HD = \frac{5}{4} - x - x = \frac{5}{4} - 2x,$$

$\therefore$ 折叠，

$$\therefore BB' \perp EF,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle BGF = 90^\circ,$$

$$\because \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\text{又 } FH = BC = 1, \angle EHF = \angle C$$

$$\therefore \triangle EHF \cong \triangle B'CB \text{ (ASA)},$$

$$\therefore EH = B'C = \frac{5}{4} - 2x$$

$$\text{在 Rt}\triangle B'FC \text{ 中, } B'F^2 = B'C^2 + CF^2$$

$$\text{即 } (1-x)^2 = x^2 + \left(\frac{5}{4} - 2x\right)^2$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{8},$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{8}.$$

【点睛】本题考查了正方形的性质，折叠的性质，勾股定理，全等三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

三、解答题 (本大题共有 10 小题，共 96 分. 请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

19. 计算:

$$(1) (2 - \sqrt{3})^0 - \sqrt{12} + \tan 60^\circ;$$

$$(2) \frac{a-b}{a+b} \div (b-a).$$

$$\text{【答案】 (1) } 1 - \sqrt{3}$$

$$(2) -\frac{1}{a+b}$$

【解析】

【分析】(1) 先算零指数幂，算术平方根，特殊角的三角函数值，再进行加减运算即可；

(2) 除法变乘法，再进行计算即可.

【小问 1 详解】

$$\text{解: 原式} = 1 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 1 - \sqrt{3};$$

【小问 2 详解】

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{-1}{a-b} \\ &= -\frac{1}{a+b}.\end{aligned}$$

【点睛】本题考查特殊角的三角函数值的混合运算，分式的除法运算．熟练掌握相关运算法则，熟记特殊角的三角函数值，是解题的关键．

$$20. \text{解不等式组} \begin{cases} 2(x-1)+1 > -3, \\ x-1 \leq \frac{1+x}{3}, \end{cases} \text{ 并把它解集在数轴上表示出来.}$$

【答案】 $-1 < x \leq 2$ ，数轴表示见解析．

【解析】

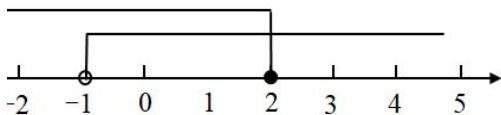
【分析】分别求出每一个不等式的解集，根据口诀：同大取大、同小取小、大小小大中间找、大大小小找不到确定不等式组的解集．

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} 2(x-1)+1 > -3 \text{ ①} \\ x-1 \leq \frac{1+x}{3} \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得 $x > -1$ ，

解不等式②，得： $x \leq 2$ ，

把不等式①和②的解集在数轴上表示出来：



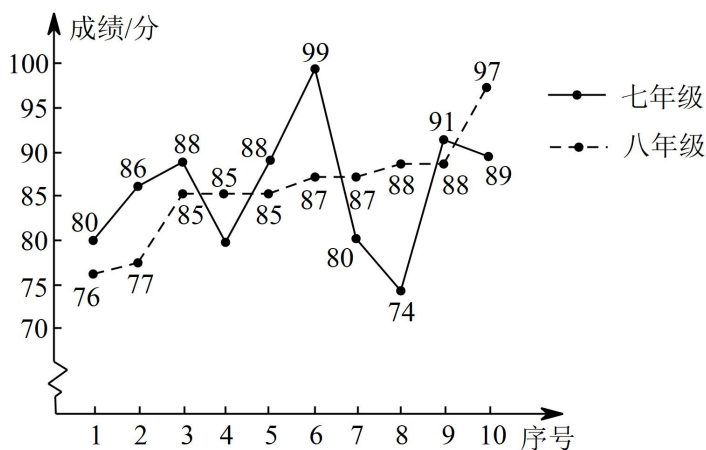
则不等式组的解集为：

$$-1 < x \leq 2.$$

【点睛】本题考查的是解一元一次不等式组，在数轴上表示不等式的解集，正确求出每一个不等式解集是基础，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键．

21. 某校为了普及环保知识，从七、八两个年级中各选出 10 名学生参加环保知识竞赛（满分 100 分），并对成绩进行整理分析，得到如下信息：

学生环保知识竞赛成绩折线统计图



	平均数	众数	中位数
七年级参赛学生成绩	85.5	m	87
八年级参赛学生成绩	85.5	85	n

根据以上信息，回答下列问题：

- 填空： $m =$ _____, $n =$ _____;
- 七、八年级参赛学生成绩的方差分别记为 S_1^2 、 S_2^2 ，请判断 S_1^2 _____ S_2^2 (填 “>” “<” 或 “=”)；
- 从平均数和中位数的角度分析哪个年级参赛学生的成绩较好.

【答案】 (1) 80,86

(2) >

(3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 找到七年级学生的 10 个数据中出现次数最多的即为 m 的值，将八年级的 10 个数据进行排序，第 5 和第 6 个数据的平均数即为 n 的值；

(2) 根据折线统计图得到七年级的数据波动较大，根据方差的意义，进行判断即可；

(3) 利用平均数和中位数作决策即可.

【小问 1 详解】

解：七年级的 10 个数据中，出现次数最多的是：80，

$$\therefore m = 80;$$

将八年级的 10 个数据进行排序：76, 77, 85, 85, 85, 87, 87, 88, 88, 97；

$$\therefore n = \frac{1}{2}(85 + 87) = 86;$$

故答案为：80, 86；

【小问 2 详解】

由折线统计图可知：七年级的成绩波动程度较大，

$\therefore$ 方差越小，数据越稳定，

$$\therefore S_1^2 > S_2^2;$$

故答案为：>.

【小问 3 详解】

七年级和八年级的平均成绩相同，但是七年级的中位数比八年级的大，所以七年级参赛学生的成绩较好.

【点睛】本题考查数据的分析. 熟练掌握众数，中位数的确定方法，利用中位数作决策，是解题的关键.

22. 扬州是个好地方，有着丰富的旅游资源. 某天甲、乙两人来扬州旅游，两人分别从 A, B, C 三个景点中随机选择一个景点游览.

(1) 甲选择 A 景点的概率为_____；

(2) 请用画树状图或列表的方法，求甲、乙两人中至少有一人选择 C 景点的概率.

【答案】(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{5}{9}$

【解析】

【分析】(1) 利用概率计算公式求解即可；

(2) 利用树状图或列表的方法，分析甲、乙至少一人选择 C 的基本事件的个数，除以总的基本事件个数即可.

【小问 1 详解】

解： $\because$ 共有 3 个景点可供选择，且选择每种景点是随机的，

$$\therefore \text{甲选择 A 景点的概率为 } \frac{1}{3}.$$

【小问 2 详解】

解：根据题意，列表如下：

	A	B	C
A	(A, A)	(A, B)	(A, C)
B	(B, A)	(B, B)	(B, C)
C	(C, A)	(C, B)	(C, C)

由表格可知，共有9种等可能的结果，其中甲、乙至少有一人选择C景点共有5种等可能的结果，

$\therefore$ 甲、乙至少有一人选择C景点的概率为 $\frac{5}{9}$.

【点睛】本题考查了简单的概率计算，树状图法或列表法求解概率，熟练掌握相关计算方法是解题的关键.

23. 甲、乙两名学生到离校2.4km的“人民公园”参加志愿者活动，甲同学步行，乙同学骑自行车，骑自行车速度是步行速度的4倍，甲出发30min后乙同学出发，两名同学同时到达，求乙同学骑自行车的速度.

【答案】14.4 km/h

【解析】

【分析】根据甲、乙同学步行和骑自行车的速度之间的数量关系设未知数，再根据所走时间之间的数量关系列方程即可.

【详解】解：设甲同学步行的速度为 x km/h，则乙同学骑自行车速度为 $4x$ km/h，

$\because 30 \text{ min} = \frac{1}{2} \text{ h}$ ，由题意得，

$$\frac{2.4}{x} - \frac{2.4}{4x} = \frac{1}{2},$$

解得 $x = 3.6$ ，

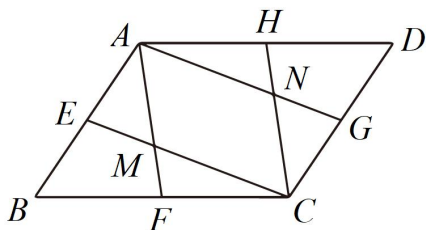
经检验， $x = 3.6$ 是分式方程的解，也符合实际.

$\therefore 4x = 3.6 \times 4 = 14.4$ ，

答：乙同学骑自行车的速度为14.4 km/h .

【点睛】本题考查了分式方程的实际应用，解决问题时需注意时间单位的统一，同时解分式方程需检验.

24. 如图，点E、F、G、H分别是 $ABCD$ 各边的中点，连接AF、CE相交于点M，连接AG、CH相交于点N.



- (1) 求证：四边形 $AMCN$ 是平行四边形；
 (2) 若 $\square AMCN$ 的面积为 4，求 $ABCD$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) 12

【解析】

【分析】(1) 根据平行四边形的性质，线段的中点平分线段，推出四边形 $AECG$ ，四边形 $AFCH$ 均为平行四边形，进而得到： $AM \parallel CN, AN \parallel CM$ ，即可得证；

(2) 连接 HG, AC, EF ，推出 $\frac{S_{\triangle ANH}}{S_{\triangle ANC}} = \frac{HN}{CN} = \frac{1}{2}$ ， $\frac{S_{\triangle FMC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{1}{2}$ ，进而得到

$$S_{\triangle ANH} + S_{\triangle FMC} = \frac{1}{2}(S_{\triangle ANC} + S_{\triangle AMC}) = \frac{1}{2}S_{\square AMCN} = 2, \text{ 求出 } S_{\square AFCH} = S_{\triangle ANH} + S_{\triangle FMC} + S_{\square AMCN} = 2 + 4 = 6,$$

再根据 $S_{\square ABCD} = 2S_{\square AFCH}$ ，即可得解.

【小问 1 详解】

证明： $\because ABCD$ ，

$$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC, AB = CD, AD = BC,$$

$\because$ 点 E, F, G, H 分别是 $ABCD$ 各边的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = CG, AE \parallel CG,$$

$\therefore$ 四边形 $AECG$ 为平行四边形，

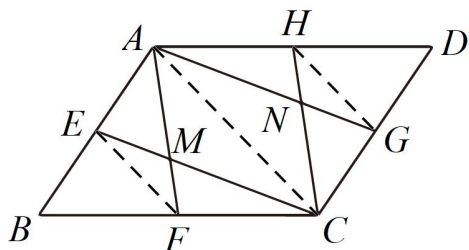
同理可得：四边形 $AFCH$ 为平行四边形，

$$\therefore AM \parallel CN, AN \parallel CM,$$

$\therefore$ 四边形 $AMCN$ 是平行四边形；

【小问 2 详解】

解：连接 HG, AC, EF ，



$\because H, G$ 为 AD, CD 的中点，

$$\therefore HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore \triangle HNG \sim \triangle CNA,$$

$$\therefore \frac{HN}{CN} = \frac{HG}{AC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ANH}}{S_{\triangle ANC}} = \frac{HN}{CN} = \frac{1}{2},$$

$$\text{同理可得: } \frac{S_{\triangle FMC}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore S_{\triangle ANH} + S_{\triangle FMC} = \frac{1}{2}(S_{\triangle ANC} + S_{\triangle AMC}) = \frac{1}{2}S_{\square AMCN} = 2,$$

$$\therefore S_{\square AFCH} = S_{\triangle ANH} + S_{\triangle FMC} + S_{\square AMCN} = 2 + 4 = 6,$$

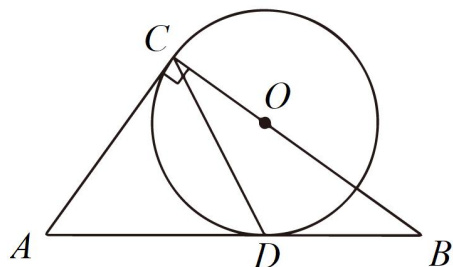
$$\therefore AH = \frac{1}{2}AD,$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = 2S_{\square AFCH} = 12.$$

【点睛】本题考查平行四边形的判定和性质，三角形的中位线定理，相似三角形的判定和性质，熟练掌握平行四边形的性质，以及三角形的中位线定理，证明三角形相似，是解题的关键。

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，点 D 是 AB 上一点，且 $\angle BCD = \frac{1}{2}\angle A$ ，点 O 在 BC 上，以点 O

为圆心的圆经过 C 、 D 两点。



(1) 试判断直线 AB 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

(2) 若 $\sin B = \frac{3}{5}$ ， $\odot O$ 的半径为 3，求 AC 的长。

【答案】(1) 直线 AB 与 $\odot O$ 相切，理由见解析

(2) 6

【解析】

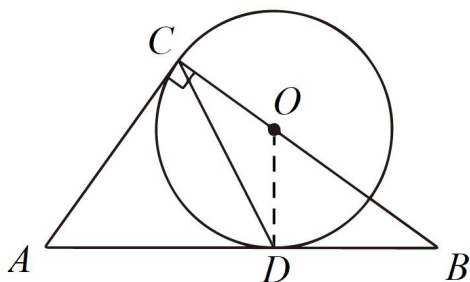
【分析】(1) 连接 OD ，根据圆周角定理，得到 $\angle BOD = 2\angle BCD = \angle A$ ，进而得到 $\angle B + \angle A = \angle B + \angle BOD = 90^\circ$ ，即可得出 AB 与 $\odot O$ 相切；

(2) 解直角三角形 ODB ，求出 OB 的长，进而求出 BC 的长，再解直角三角形 ACB ，求出 AC 的长即可。

【小问 1 详解】

解：直线 AB 与 $\odot O$ 相切，理由如下：

连接 OD ，则： $\angle BOD = 2\angle BCD$ ，



$$\therefore \angle BCD = \frac{1}{2} \angle A, \text{ 即: } 2\angle BCD = \angle A,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle A,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle B + \angle BOD = \angle B + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODB = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp AB,$$

$\therefore OD$ 为 $\odot O$ 的半径,

$\therefore$ 直线 AB 与 $\odot O$ 相切;

【小问 2 详解】

解： $\because \angle ODB = 90^\circ$, $\sin B = \frac{3}{5}$, $\odot O$ 的半径为 3,

$$\therefore OD = OC = 3, \sin B = \frac{OD}{OB} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore OB = 5,$$

$$\therefore BC = OB + OC = 8,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5},$$

设： $AC = 3x$, $AB = 5x$,

$$\text{则: } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4x = 8,$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore AC = 3x = 6.$$

【点睛】本题考查切线的判定，解直角三角形．熟练掌握切线的判定方法，正弦的定义，是解题的关键．

26. 近年来，市民交通安全意识逐步增强，头盔需求量增大．某商店购进甲、乙两种头盔，已知购买甲种头盔 20 只，乙种头盔 30 只，共花费 2920 元，甲种头盔的单价比乙种头盔的单价高 11 元．

(1) 甲、乙两种头盔的单价各是多少元？

(2) 商店决定再次购进甲、乙两种头盔共 40 只，正好赶上厂家进行促销活动，促销方式如下：甲种头盔按单价的八折出售，乙种头盔每只降价 6 元出售．如果此次购买甲种头盔的数量不低于乙种头盔数量的一半，那么应购买多少只甲种头盔，使此次购买头盔的总费用最小？最小费用是多少元？

【答案】(1) 甲、乙两种头盔的单价各是 65 元， 54 元．

(2) 购 14 只甲种头盔，此次购买头盔的总费用最小，最小费用为 1976 元．

【解析】

【分析】(1) 设购买乙种头盔的单价为 x 元，则甲种头盔的单价为 $(x+11)$ 元，根据题意，得 $20(x+11)+30x=2920$ ，求解；

(2) 设购 m 只甲种头盔，此次购买头盔的总费用最小，设总费用为 w ，则 $m \geq \frac{1}{2}(40-m)$ ，解得 $m \geq 13\frac{1}{3}$ ，故最小整数解为 $m=14$ ， $w=4m+1920$ ，根据一次函数增减性，求得最小值 $=4 \times 14+1920=1976$ ．

【小问 1 详解】

解：设购买乙种头盔的单价为 x 元，则甲种头盔的单价为 $(x+11)$ 元，根据题意，得 $20(x+11)+30x=2920$

解得， $x=54$ ，

$x+11=65$ ，

答：甲、乙两种头盔的单价各是 65 元， 54 元．

【小问 2 详解】

解：设购 m 只甲种头盔，此次购买头盔的总费用最小，设总费用为 w ，

则 $m \geq \frac{1}{2}(40-m)$ ，解得 $m \geq 13\frac{1}{3}$ ，故最小整数解为 $m=14$ ，

$w=0.8 \times 65m+(54-6)(40-m)=4m+1920$ ，

$\because 4>0$ ，则 w 随 m 的增大而增大，

$\therefore m=14$ 时， w 取最小值，最小值 $=4 \times 14+1920=1976$ ．

答：购 14 只甲种头盔，此次购买头盔的总费用最小，最小费用为 1976 元．

【点睛】本题考查一元一次方程的应用，一次函数的性质，一次函数的应用、一元一次不等式的应用；根

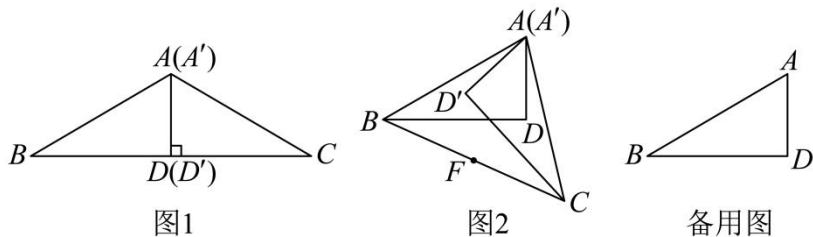
据题意列出函数解析式，确定自变量取值范围是解题的关键.

27. 【问题情境】

在综合实践活动课上，李老师让同桌两位同学用相同的两块含 30° 的三角板开展数学探究活动，两块三角板分别记作 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$, $\angle ADB = \angle A'D'C = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 30^\circ$ ，设 $AB = 2$.

【操作探究】

如图 1，先将 $\triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$ 的边 AD 、 $A'D'$ 重合，再将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 按顺时针方向旋转，旋转角为 α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$)，旋转过程中 $\triangle ADB$ 保持不动，连接 BC .



- (1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时， $BC =$ _____；当 $BC = 2\sqrt{2}$ 时， $\alpha =$ _____°；
- (2) 当 $\alpha = 90^\circ$ 时，画出图形，并求两块三角板重叠部分图形的面积；
- (3) 如图 2，取 BC 的中点 F ，将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 旋转一周，点 F 的运动路径长为_____.

【答案】(1) 2; 30 或 210

(2) 画图见解析; 1 (3) 2π

【解析】

【分析】(1) 当 $\alpha = 60^\circ$ 时， $A'C$ 与 AD 重合，证明 $\triangle ABC$ 为等边三角形，得出 $BC = AB = 2$ ；当 $BC = 2\sqrt{2}$ 时，根据勾股定理逆定理得出 $\angle BAC = 90^\circ$ ，两种情况讨论：当 AC 在 AB 下方时，当 AC 在 AB 上方时，分别画出图形，求出结果即可；

(2) 证明四边形 $ADED'$ 是正方形，得出 $AD = DE = D'E = 1$ ，求出 $BE = BD - DE = \sqrt{3} - 1$ ，得出 $EF = BE \times \tan \angle ABD = (\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，求出 $DG = AD \times \tan \angle DAG = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，根据 $S_{\text{四边形}AGEF} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle ADG}$ 求出两块三角板重叠部分图形的面积即可；

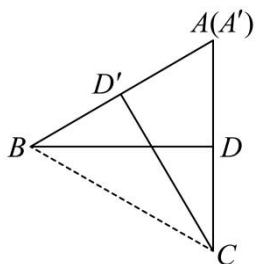
(3) 根据等腰三角形的性质，得出 $AF \perp BC$ ，即 $\angle AFB = 90^\circ$ ，确定将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 旋转一周，点 F 在以 AB 为直径的圆上运动，求出圆的周长即可.

【小问 1 详解】

解： $\because \triangle ADB$ 和 $\triangle A'D'C$ 中 $\angle ADB = \angle A'D'C = 90^\circ$, $\angle B = \angle C = 30^\circ$,

$$\therefore \angle BAD = \angle CA'D' = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ,$$

$\therefore$ 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $A'C$ 与 AD 重合, 如图所示: 连接 BC ,



$$\because AB = AC = 2, \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形,

$$\therefore BC = AB = 2;$$

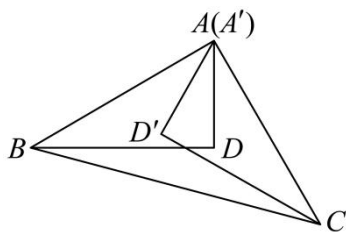
当 $BC = 2\sqrt{2}$ 时,

$$\because AB^2 + AC^2 = 2^2 + 2^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2 = BC^2,$$

$\therefore$ 当 $BC = 2\sqrt{2}$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形, $\angle BAC = 90^\circ$,

$$\therefore AB \perp AC,$$

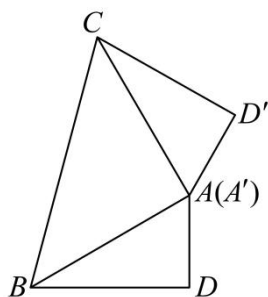
当 AC 在 AB 下方时, 如图所示:



$$\because \angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \text{此时 } \alpha = \angle DAD' = \angle CAD' - \angle DAC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ;$$

当 AC 在 AB 上方时, 如图所示:



$$\because \angle DAB = \angle D'AC = 60^\circ,$$

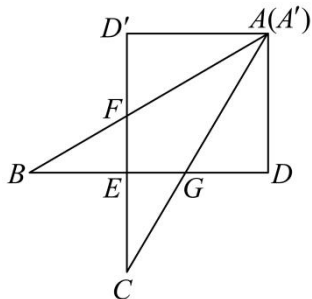
$$\therefore \text{此时 } \alpha = \angle DAB + \angle BAC + \angle D'AC = 210^\circ;$$

综上分析可知，当 $BC = 2\sqrt{2}$ 时， $\alpha = 30^\circ$ 或 210° ；

故答案为：2；30 或 210.

【小问 2 详解】

解：当 $\alpha = 90^\circ$ 时，如图所示：



$$\because AB = AC = 2,$$

$$\therefore AD = AD' = \frac{1}{2} AB = 1,$$

$$\therefore BD = CD' = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\because \angle DAD' = \alpha = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle ADB = \angle AD'C = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } ADED' \text{ 是矩形},$$

$$\because AD = AD',$$

$$\therefore \text{四边形 } ADED' \text{ 是正方形},$$

$$\therefore AD = DE = D'E = 1,$$

$$\therefore BE = BD - DE = \sqrt{3} - 1,$$

$$\therefore EF = BE \times \tan \angle ABD = (\sqrt{3} - 1) \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle DAG = \angle DAD' - \angle CAD' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore DG = AD \times \tan \angle DAG = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore S_{\text{四边形} AGEF} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BEF} - S_{\triangle ADG}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} - \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) (\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 1,$$

即两块三角板重叠部分图形的面积为 1.

【小问 3 详解】

解: $\because AB = AC$, F 为 BC 的中点,

$\therefore AF \perp BC$,

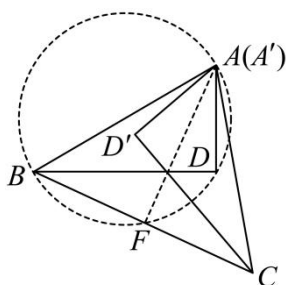
$\therefore \angle AFB = 90^\circ$,

$\therefore$ 将 $\triangle A'D'C$ 绕着点 A 旋转一周, 点 F 在以 AB 为直径的圆上运动,

$\therefore AB = 2$

$\therefore$ 点 F 运动的路径长为 2π .

故答案为: 2π .



【点睛】本题主要考查了正方形的判定和性质, 解直角三角形, 旋转的性质, 确

定圆的条件, 等腰三角形的性质, 等边三角形的判定和性质, 解题的关键是画出相应的图形, 数形结合, 并注意分类讨论.

28. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 A 在 y 轴正半轴上.

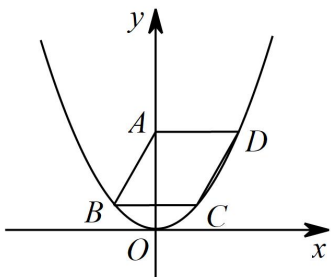


图1

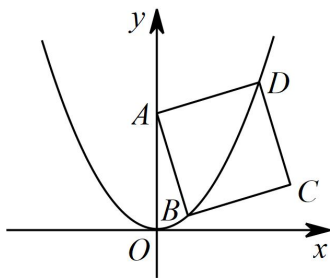


图2

(1) 如果四个点 $(0,0)$ 、 $(0,2)$ 、 $(1,1)$ 、 $(-1,1)$ 中恰有三个点在二次函数 $y = ax^2$ (a 为常数, 且 $a \neq 0$) 的图象上.

① $a =$ _____;

②如图 1, 已知菱形 $ABCD$ 的顶点 B 、 C 、 D 在该二次函数的图象上, 且 $AD \perp y$ 轴, 求菱形的边长;

③如图 2, 已知正方形 $ABCD$ 的顶点 B 、 D 在该二次函数的图象上, 点 B 、 D 在 y 轴的同侧, 且点 B 在点 D 的左侧, 设点 B 、 D 的横坐标分别为 m 、 n , 试探究 $n - m$ 是否为定值. 如果是, 求出这个值; 如果不是,

请说明理由.

(2) 已知正方形 $ABCD$ 的顶点 B 、 D 在二次函数 $y = ax^2$ (a 为常数, 且 $a > 0$) 的图象上, 点 B 在点 D 的左侧, 设点 B 、 D 的横坐标分别为 m 、 n , 直接写出 m 、 n 满足的等量关系式.

【答案】(1) ①1; ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ③是, 值为 1

(2) $a(n-m) = 1$ 或 $m+n = 0$

【解析】

【分析】(1) ①当 $x = 0$, $y = 0$, 可知 $(0, 2)$ 不在二次函数图象上, 将 $(1, 1)$ 代入 $y = ax^2$, 求解 a 值即可;

②由①知, 二次函数解析式为 $y = x^2$, 设菱形的边长为 p , 则 $AD = p$, $D(p, p^2)$, 由菱形的性质得,

$BC = p$, $BC \parallel AD$, 则 $BC \perp y$ 轴, $C\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2}{4}\right)$, 根据 $CD^2 = AD^2$, 即 $\left(p - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(p^2 - \frac{p^2}{4}\right)^2 = p^2$,

计算求出满足要求的解即可; ③如图 2, 连接 AC 、 BD 交点为 E , 过 B 作 $MN \perp y$ 轴于 M , 过 C 作

$CN \perp MN$ 于 N , 由正方形的性质可知, E 为 AC 、 BD 的中点, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 则

$\angle ABM = \angle BCN$, 证明 $\triangle AMB \cong \triangle BNC$ (AAS), 则 $AM = BN$, $BM = CN$, 由题意知, $B(m, m^2)$,

$D(n, n^2)$, $m > 0$, $n > 0$, 则 $E\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m^2+n^2}{2}\right)$, $M(0, m^2)$, 设 $A(0, q)$, 则 $C(m+n, m^2+n^2-q)$,

$N(m+n, m^2)$, $AM = q - m^2$, $BN = n$, $BM = m$, $CN = n^2 - q$, 则 $q - m^2 = n$, $m = n^2 - q$, 即

$n^2 - m - m^2 = n$, 计算求解即可 1;

(2) 由题意知, 分①当 B, D 在 y 轴右侧时, ②当 B, D 在 y 轴左侧时, ③当 B 在 y 轴左侧, D 在 y 轴右侧时, 三种情况求解; ①当 B, D 在 y 轴右侧时, $y = ax^2$, 同理 (1) ③, $AM = BN$, $BM = CN$, 由题意知,

$B(m, am^2)$, $D(n, an^2)$, $m > 0$, $n > 0$, 则 $E\left(\frac{m+n}{2}, \frac{a(m^2+n^2)}{2}\right)$, $M(0, am^2)$, 设 $A(0, q)$, 则

$C(m+n, a(m^2+n^2)-q)$, $N(m+n, am^2)$, $AM = q - am^2$, $BN = n$, $BM = m$, $CN = an^2 - q$, 则

$q - am^2 = n$, $m = an^2 - q$, 即 $an^2 - m - am^2 = n$, 解得 $a(n-m) = 1$; ②当 B, D 在 y 轴左侧时, 求解过

程同 (2) ①; ③当 B 在 y 轴左侧, D 在 y 轴右侧时, 且 BD 不垂直于 y 轴时, 同理可求 $a(n-m) = 1$, 当 B

在 y 轴左侧, D 在 y 轴右侧时, 且 BD 垂直于 y 轴时, 由正方形、二次函数的性质可得, $m+n = 0$.

【小问 1 详解】

①解：当 $x=0$ ， $y=0$ ，

$\therefore (0,2)$ 不在二次函数图象上，

将 $(1,1)$ 代入 $y=ax^2$ ，解得 $a=1$ ，

故答案为：1；

②解：由①知，二次函数解析式为 $y=x^2$ ，

设菱形的边长为 p ，则 $AD=p$ ， $D(p, p^2)$ ，

由菱形的性质得， $BC=p$ ， $BC \parallel AD$ ，

$\therefore BC \perp y$ 轴，

$\therefore C\left(\frac{p}{2}, \frac{p^2}{4}\right)$ ，

$\because CD^2 = AD^2$ ，

$\therefore \left(p - \frac{p}{2}\right)^2 + \left(p^2 - \frac{p^2}{4}\right)^2 = p^2$ ，

解得 $p=0$ （舍去）， $p=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ （舍去）， $p=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore$ 菱形的边长为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ；

③解：如图2，连接 AC 、 BD 交点为 E ，过 B 作 $MN \perp y$ 轴于 M ，过 C 作 $CN \perp MN$ 于 N ，

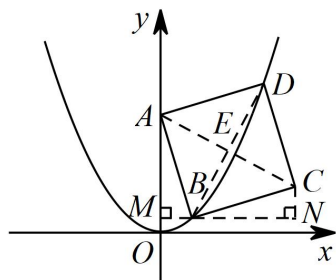


图2

由正方形的性质可知， E 为 AC 、 BD 的中点， $AB=BC$ ， $\angle ABC=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABM + \angle CBN = 90^\circ = \angle CBN + \angle BCN$ ，

$\therefore \angle ABM = \angle BCN$ ，

$\because \angle ABM = \angle BCN$ ， $\angle AMB = \angle BNC = 90^\circ$ ， $AB = BC$ ，

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle BNC \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AM = BN, \quad BM = CN,$$

由题意知, $B(m, m^2)$, $D(n, n^2)$, $m > 0$, $n > 0$, 则 $E\left(\frac{m+n}{2}, \frac{m^2+n^2}{2}\right)$, $M(0, m^2)$,

设 $A(0, q)$, 则 $C(m+n, m^2+n^2-q)$, $N(m+n, m^2)$,

$$\therefore AM = q - m^2, \quad BN = n, \quad BM = m, \quad CN = n^2 - q,$$

$$\therefore q - m^2 = n, \quad m = n^2 - q,$$

$$\therefore n^2 - m - m^2 = n,$$

$\therefore$ 点 B 、 D 在 y 轴的同侧, 且点 B 在点 D 的左侧,

$$\therefore m + n \neq 0,$$

$$\therefore n - m = 1,$$

$\therefore n - m$ 是定值, 值为 1;

【小问 2 详解】

解: 由题意知, 分①当 B, D 在 y 轴右侧时, ②当 B, D 在 y 轴左侧时, ③当 B 在 y 轴左侧, D 在 y 轴右侧时, 三种情况求解;

①当 B, D 在 y 轴右侧时,

$$\therefore y = ax^2,$$

同理 (1) ③, $AM = BN$, $BM = CN$,

由题意知, $B(m, am^2)$, $D(n, an^2)$, $m > 0$, $n > 0$, 则 $E\left(\frac{m+n}{2}, \frac{a(m^2+n^2)}{2}\right)$, $M(0, am^2)$,

设 $A(0, q)$, 则 $C(m+n, a(m^2+n^2)-q)$, $N(m+n, am^2)$,

$$\therefore AM = q - am^2, \quad BN = n, \quad BM = m, \quad CN = an^2 - q,$$

$$\therefore q - am^2 = n, \quad m = an^2 - q,$$

$$\therefore an^2 - m - am^2 = n,$$

化简得 $(an - am - 1)(m + n) = 0$,

$$\therefore m + n \neq 0$$

$$\therefore a(n - m) = 1;$$

②当 B, D 在 y 轴左侧时,

同理可求 $a(n-m)=1$;

③当 B 在 y 轴左侧, D 在 y 轴右侧时, 且 BD 不垂直于 y 轴时,

同理可求 $a(n-m)=1$,

当 B 在 y 轴左侧, D 在 y 轴右侧时, 且 BD 垂直于 y 轴时,

由正方形、二次函数的性质可得, $m+n=0$;

综上所述, $a(n-m)=1$ 或 $m+n=0$.

【点睛】 本题考查了二次函数解析式, 二次函数的图象与性质, 二次函数与几何综合, 正方形、菱形的性质, 全等三角形的判定与性质. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

