

徐州市 2023 年初中学业水平考试数学试题

注意事项

1. 本试卷共 6 页，考试时间 120 分钟.
 2. 答题前，请将姓名、文化考试证号用 0.5 毫米黑色字迹签字笔填写在本卷和答题卡的指定位置.
 3. 答案全部涂、写在答题卡上，写在本卷上无效. 考试结束后，将本卷和答题卡一并交回.
- 一、选择题（本大题共有 8 小题，在每小题所给出的四个选项中，只有一项符合题意，请将正确选项前的字母代号填涂在答题卡相应位置）

1. 下列事件中的必然事件是（ ）

- | | |
|-------------|---------------------|
| A. 地球绕着太阳转 | B. 射击运动员射击一次，命中靶心 |
| C. 天空出现三个太阳 | D. 经过有交通信号灯的路口，遇到红灯 |

【答案】A

【解析】

【分析】根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念，可得答案.

【详解】解：A、地球绕着太阳转是必然事件，故 A 正确；

B、射击运动员射击一次，命中靶心是随机事件，故 B 错误；

C、天空出现三个太阳是不可能事件，故 C 错误；

D、经过有交通信号灯的路口，遇到红灯是随机事件，故 D 错误；

故选：A.

【点睛】本题考查的是必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下，一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件，不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

2. 下列图案是中心对称图形但不是轴对称图形的是（ ）

- | | | | |
|--|--|--|--|
| A.  | B.  | C.  | D.  |
|--|--|--|--|

【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形：一个图形如果沿一条直线折叠，直线两旁部分能够完全重合的图形；中心对称图形：一个图形绕某个点旋转 180 度后能与原图完全重合的图形；由此问题可求解.

【详解】解：A、是中心对称图形但不是轴对称图形，故符合题意；

B、是轴对称图形，但不是中心对称图形，故不符合题意；

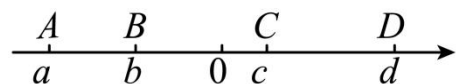
C、既是轴对称图形也是中心对称图形，故不符合题意；

D、既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查轴对称图形与中心对称图形的识别，熟练掌握轴对称图形与中心对称图形的概念是解题的关键.

3. 如图，数轴上点 A, B, C, D 分别对应实数 a, b, c, d ，下列各式的值最小的是（ ）



A. $|a|$

B. $|b|$

C. $|c|$

D. $|d|$

【答案】C

【解析】

【分析】根据数轴可直接进行求解.

【详解】解：由数轴可知点 C 离原点最近，所以在 $|a|$ 、 $|b|$ 、 $|c|$ 、 $|d|$ 中最小的是 $|c|$ ；

故选 C.

【点睛】本题主要考查数轴上实数的表示、有理数的大小比较及绝对值，熟练掌握数轴上有理数的表示、有理数的大小比较及绝对值是解题的关键.

4. 下列运算正确的是（ ）

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $a^4 \div a^2 = a^2$

C. $(a^3)^2 = a^5$

D. $2a^2 + 3a^2 = 5a^4$

【答案】B

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘除法、幂的乘方及合并同类项可进行求解.

【详解】解：A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，原计算错误，故不符合题意；

B、 $a^4 \div a^2 = a^2$ ，原计算正确，故符合题意；

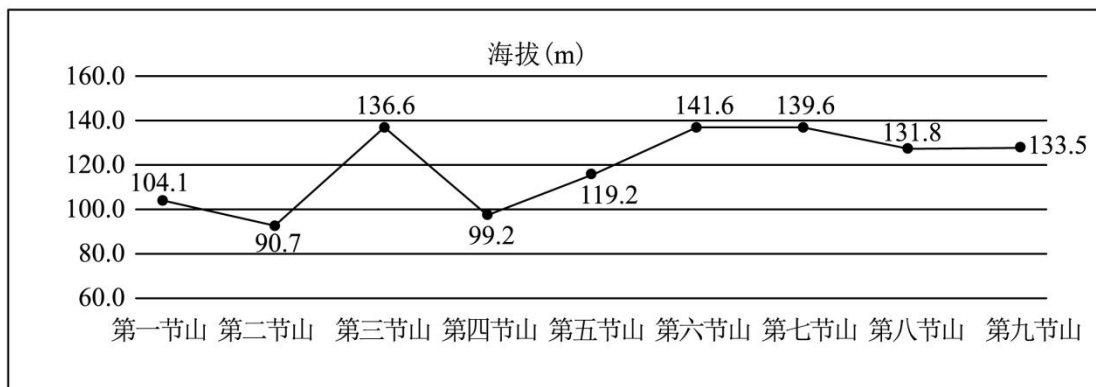
C、 $(a^3)^2 = a^6$ ，原计算错误，故不符合题意；

D、 $2a^2 + 3a^2 = 5a^2$ ，原计算错误，故不符合题意；

故选 B.

【点睛】本题主要考查同底数幂的乘除法、幂的乘方及合并同类项，熟练掌握同底数幂的除法、幂的乘方及同底数幂的乘法是解题的关键.

5. 徐州云龙山共九节，蜿蜒起伏，形似游龙，每节山的海拔如图所示.



其中，海拔为中位数的是 ()

- A. 第五节山 B. 第六节山 C. 第八节山 D. 第九节山

【答案】C

【解析】

【分析】根据折线统计图把数据按从小到大排列，然后根据中位数可进行求解.

【详解】解：由折线统计图可按从小到大排列为 90.7、99.2、104.1、119.2、131.8、133.5、136.6、139.6、141.6，所以海拔为中位数的是第 5 个数据，即为第八节山；

故选 C.

【点睛】本题主要考查折线统计图及中位数，熟练掌握中位数的求法是解题的关键.

6. $\sqrt{2023}$ 的值介于 ()

- A. 25 与 30 之间 B. 30 与 35 之间 C. 35 与 40 之间 D. 40 与 45 之间

【答案】D

【解析】

【分析】直接利用二次根式的性质得出 $\sqrt{2023}$ 的取值范围进而得出答案.

【详解】解： $\because 1600 < 2023 < 2025$.

$$\therefore \sqrt{1600} < \sqrt{2023} < \sqrt{2025} \text{ 即 } 40 < \sqrt{2023} < 45,$$

$\therefore \sqrt{2023}$ 的值介于 40 与 45 之间.

故选 D.

【点睛】本题主要考查了估算无理数的大小，正确估算无理数的取值范围是解题关键.

7. 在平面直角坐标系中，将二次函数 $y = (x+1)^2 + 3$ 的图象向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得抛物线对应的函数表达式为 ()

- A. $y = (x+3)^2 + 2$ B. $y = (x-1)^2 + 2$ C. $y = (x-1)^2 + 4$ D. $y = (x+3)^2 + 4$

【答案】B

【解析】

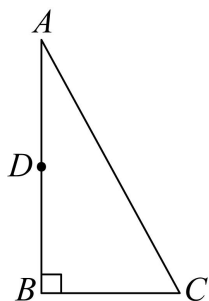
【分析】根据二次函数图象的平移“左加右减，上加下减”可进行求解.

【详解】解：由二次函数 $y = (x+1)^2 + 3$ 的图象向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得抛物线对应的函数表达式为 $y = (x-1)^2 + 2$ ；

故选 B.

【点睛】本题主要考查二次函数图象的平移，熟练掌握二次函数图象的平移是解题的关键.

8. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 2$, D 为 AB 的中点. 若点 E 在边 AC 上，且 $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$ ，则 AE 的长为 ()



- A. 1 B. 2 C. 1 或 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1 或 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意易得 $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = 4$ ，然后根据题意可进行求解.【详解】解： $\because \angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $BC = 2$,

$$\therefore AB = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3}, AC = 2BC = 4,$$

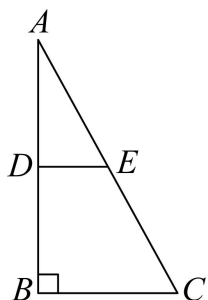
$\because$ 点 D 为 AB 的中点,

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC},$$

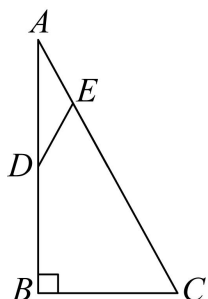
$$\therefore DE = 1,$$

①当点 E 为 AC 的中点时，如图，



$$\therefore AE = \frac{1}{2} AC = 2,$$

②当点 E 为 AC 的四等分点时，如图所示：



$$\therefore AE = 1,$$

综上所述： $AE = 1$ 或 2 ；

故选 D.

【点睛】 本题主要考查含 30° 直角三角形的性质及三角形中位线，熟练掌握含 30° 直角三角形的性质及三角形中位线是解题的关键.

二、填空题 (本大题共有 10 小题，不需要写出解答过程，请将答案直接填写在答题卡相应位置)

9. 若一个三角形的边长均为整数，且两边长分别为 3 和 5，则第三边的长可以为_____ (写出一个即可).

【答案】 4

【解析】

【分析】 根据三角形三边关系可进行求解.

【详解】 解： 设第三边的长为 x ， 则有 $5 - 3 < x < 5 + 3$ ， 即 $2 < x < 8$ ，

$\therefore$ 该三角形的边长均为整数，

$\therefore$ 第三边的长可以为 3、4、5、6、7，

故答案为 4 (答案不唯一).

【点睛】 本题主要考查三角形三边关系，熟练掌握三角形三边关系是解题的关键.

10. “五一”假期我市共接待游客约 4370000 人次，将 4370000 用科学记数法表示为_____.

【答案】 4.37×10^6

【解析】

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值大于或等于 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负整数．

【详解】解：将 4370000 用科学记数法表示为 4.37×10^6 ；

故答案为 4.37×10^6 ．

【点睛】本题主要考查科学记数法，熟练掌握科学记数法是解题的关键．

11. 若代数式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，则 x 的取值范围是 _____．

【答案】 $x \geq 3$

【解析】

【分析】根据 $\sqrt{x-3}$ 有意义得出 $x-3 \geq 0$ ，再求出答案即可．

【详解】解：∵代数式 $\sqrt{x-3}$ 有意义，

∴ $x-3 \geq 0$ ，

解得： $x \geq 3$ ，

故答案为： $x \geq 3$ ．

【点睛】本题考查了二次根式有意义的条件，能根据 $\sqrt{x-3}$ 有意义得出 $x-3 \geq 0$ 是解此题的关键．

12. 正五边形的一个外角的大小为_____度．

【答案】 72

【解析】

【分析】根据多边形的外角和是 360° ，依此即可求解．

【详解】解：正五边形的一个外角的度数为： $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ ，

故答案为： 72．

【点睛】本题考查了多边形的内角与外角，正确理解多边形的外角和为 360° 是解题的关键．

13. 关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个相等的实数根，则 m 的值是_____．

【答案】 4

【解析】

【分析】根据一元二次方程根与判别式的关系可得， $\Delta = 4^2 - 4m = 0$ ，求解即可．

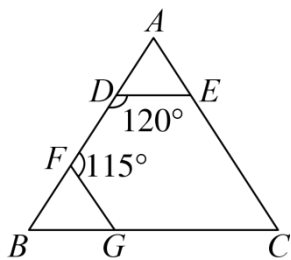
【详解】解：关于 x 的方程 $x^2 - 4x + m = 0$ 有两个相等的实数根，

则 $\Delta = 4^2 - 4m = 0$ ，解得 $m = 4$ ，

故答案为：4

【点睛】此题考查了一元二次方程根与判别式的关系，解题的关键是熟练掌握一元二次方程根与判别式的关系．

14. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，若 $DE \parallel BC, FG \parallel AC, \angle BDE = 120^\circ, \angle DFG = 115^\circ$ ，则 $\angle C =$ _____°.



【答案】55°

【解析】

【分析】先由邻补角求得 $\angle ADE = 60^\circ$ ， $\angle BFG = 65^\circ$ ，进而由平行线的性质求得 $\angle B = \angle ADE = 60^\circ$ ， $\angle A = \angle BFG = 65^\circ$ ，最后利用三角形的内角和定理即可得解．

【详解】解： $\because \angle BDE = 120^\circ, \angle DFG = 115^\circ$ ， $\angle BDE + \angle ADE = 180^\circ$ ， $\angle DFG + \angle BFG = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ADE = 60^\circ$ ， $\angle BFG = 65^\circ$ ，

$\because DE \parallel BC, FG \parallel AC$ ，

$\therefore \angle B = \angle ADE = 60^\circ$ ， $\angle A = \angle BFG = 65^\circ$ ，

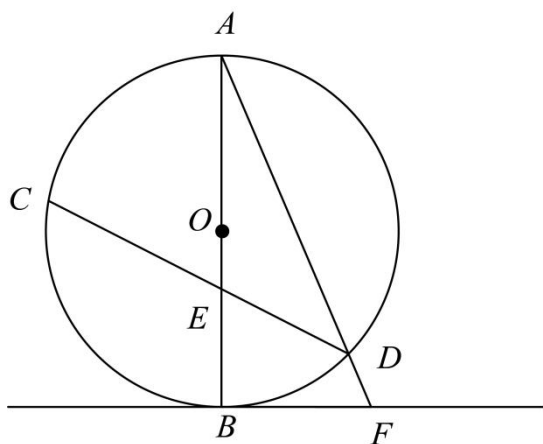
$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle C = 180^\circ - 65^\circ - 60^\circ = 55^\circ$ ，

故答案为：55°．

【点睛】本题主要考查了邻补角，平行线的性质以及三角形的内角和定理，熟练掌握平行线的性质是解题的关键．

15. 如图，在 $\odot O$ 中，直径 AB 与弦 CD 交于点 E ， $\widehat{AC} = 2\widehat{BD}$ ．连接 AD ，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 F ．若 $\angle AFB = 68^\circ$ ，则 $\angle DEB =$ _____°.

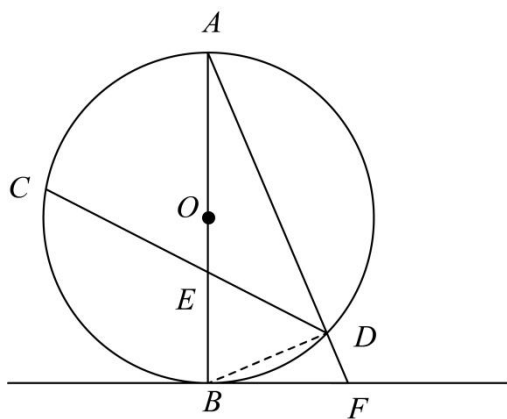


【答案】 66

【解析】

【分析】 连接 BD ，则有 $\angle ADB = 90^\circ$ ，然后可得 $\angle A = 22^\circ$, $\angle ABD = 68^\circ$ ，则 $\angle ADE = 44^\circ$ ，进而问题可求解.

【详解】 解：连接 BD ，如图所示：



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，且 BF 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle ADB = \angle ABF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AFB = 68^\circ$ ，

$\therefore \angle A = 22^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = 68^\circ$ ，

$\because \widehat{AC} = 2\widehat{BD}$ ，

$\therefore \angle ADC = 2\angle A = 44^\circ$ ，

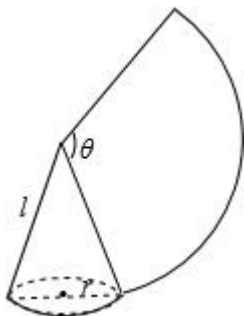
$\therefore \angle CDB = 90^\circ - \angle ADC = 46^\circ$ ，

$\therefore \angle DEB = 180^\circ - \angle CDB - \angle ABD = 66^\circ$ ；

故答案为：66.

【点睛】本题主要考查切线的性质、圆周角、弧之间的关系，熟练掌握切线的性质、圆周角、弧之间的关系是解题的关键.

16. 如图，沿一条母线将圆锥侧面剪开并展平，得到一个扇形，若圆锥母线 $l=6$ ，扇形的圆心角 $\theta=120^\circ$ ，则该圆锥的底面圆的半径 r 长为_____.



【答案】2

【解析】

【分析】结合题意，根据弧长公式，可求得圆锥的底面圆周长. 再根据圆的周长的公式即可求得底面圆的半径长.

【详解】 $\because$ 母线 l 长为 6，扇形的圆心角 $\theta=120^\circ$ ，

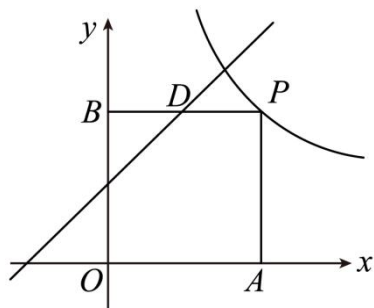
$$\therefore \text{圆锥的底面圆周长} = \frac{120\pi \times 6}{180} = 4\pi,$$

$$\therefore \text{圆锥的底面圆半径 } r = \frac{4\pi}{2\pi} = 2.$$

故答案为：2.

【点睛】本题考查圆锥的侧面展开图的相关计算，弧长公式等知识. 掌握圆锥侧面展开图的弧长等于圆锥底面圆的周长是求解本题的关键.

17. 如图，点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上， $PA \perp x$ 轴于点 A ， $PB \perp y$ 轴于点 B ， $PA = PB$. 一次函数 $y = x + 1$ 与 PB 交于点 D ，若 D 为 PB 的中点，则 k 的值为_____.



【答案】4

【解析】

【分析】根据题意可设点 P 的坐标为 $(2m, 2m)$ ，则 $D(m, 2m)$ ，把 $D(m, 2m)$ 代入一次函数解析式中求出 m

的值进而求出点 P 的坐标，再求出 k 的值即可.

【详解】解： $\because PA \perp x$ 轴于点 $A, PB \perp y$ 轴于点 $B, PA = PB$,

$\therefore$ 点 P 的横纵坐标相同,

$\therefore$ 可设点 P 的坐标为 $(2m, 2m)$,

$\because D$ 为 PB 的中点,

$\therefore D(m, 2m)$,

$\because D(m, 2m)$ 在直线 $y = x + 1$ 上,

$\therefore m + 1 = 2m$,

$\therefore m = 1$,

$\therefore P(2, 2)$,

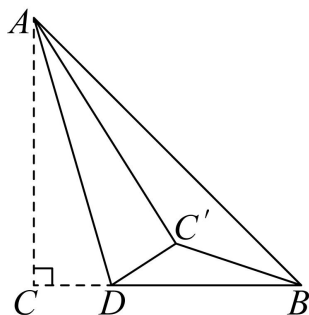
$\because$ 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象上,

$\therefore k = 2 \times 2 = 4$,

故答案为: 4.

【点睛】 本题主要考查了一次函数与反比例函数综合，正确求出点 P 的坐标是解题的关键.

18. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ, CA = CB = 3$ ，点 D 在边 BC 上. 将 $\triangle ACD$ 沿 AD 折叠，使点 C 落在点 C' 处，连接 BC' ，则 BC' 的最小值为_____.



【答案】 $3\sqrt{2} - 3$

【解析】

【分析】 由折叠性质可知 $AC = AC' = 3$ ，然后根据三角不等关系可进行求解.

【详解】解： $\because \angle C = 90^\circ, CA = CB = 3$,

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}$,

由折叠的性质可知 $AC = AC' = 3$,

$\therefore BC' \geq AB - AC'$,

∴当 A、C'、B 三点在同一条直线时，BC' 取最小值，最小值即为 $BC' = AB - AC' = 3\sqrt{2} - 3$ ；

故答案为 $3\sqrt{2} - 3$ 。

【点睛】本题主要考查勾股定理、折叠的性质及三角不等关系，熟练掌握勾股定理、折叠的性质及三角不等关系是解题的关键。

三、解答题（本大题共有 10 小题，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

19. 计算：

$$(1) \quad |-2023| + \pi^0 - \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} + \sqrt{16} ;$$

$$(2) \quad \left(1 + \frac{1}{m}\right) \div \frac{m^2 - 1}{m}.$$

【答案】(1) 2022

$$(2) \quad \frac{1}{m-1}$$

【解析】

【分析】(1) 根据零次幂、负指数幂及算术平方根可进行求解；

(2) 根据分式的运算可进行求解。

【小问 1 详解】

解：原式 = $2023 + 1 - 6 + 4$

= 2022；

【小问 2 详解】

$$\text{解：原式} = \frac{m+1}{m} \times \frac{m}{(m+1)(m-1)}$$

$$= \frac{1}{m-1}.$$

【点睛】本题主要考查零次幂、负指数幂、分式的运算及算术平方根，熟练掌握各个运算是解题的关键。

$$20. \quad (1) \text{ 解方程组 } \begin{cases} x = 4y + 1 \\ 2x - 5y = 8 \end{cases}$$

$$(2) \text{ 解不等式组 } \begin{cases} 4x - 5 \leq 3 \\ \frac{x-1}{3} < \frac{2x+1}{5} \end{cases}$$

【答案】(1) $\begin{cases} x=9 \\ y=2 \end{cases}$; (2) $-8 < x \leq 2$

【解析】

【分析】(1) 利用代入法解二元一次方程组即可；

(2) 求出每个不等式的解集，取每个不等式解集的公共部分即可.

【详解】解：(1) $\begin{cases} x=4y+1 \text{①} \\ 2x-5y=8 \text{②} \end{cases}$

把①代入②得， $2(4y+1)-5y=8$,

解得 $y=2$,

把 $y=2$ 代入①得， $x=4 \times 2 + 1 = 9$,

$\therefore \begin{cases} x=9 \\ y=2 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} 4x-5 \leq 3 \text{①} \\ \frac{x-1}{3} < \frac{2x+1}{5} \text{②} \end{cases}$

解不等式①得， $x \leq 2$,

解不等式②得， $x > -8$,

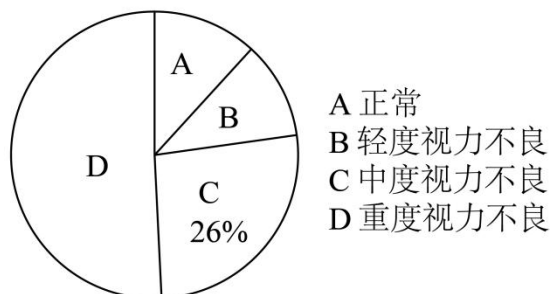
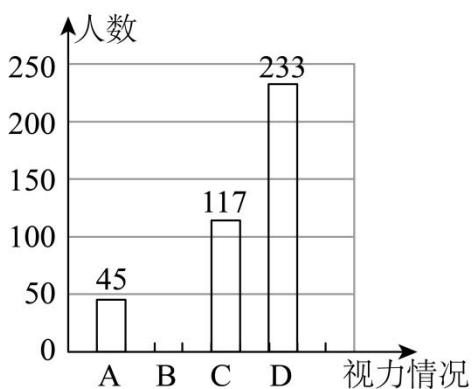
$\therefore$ 不等式组的解集是 $-8 < x \leq 2$.

【点睛】此题考查了二元一次方程组的解法和一元一次不等式组的解法，熟练掌握相关解法是解题的关键.

21. 为了解某地区九年级学生的视力情况，从该地区九年级学生中抽查了部分学生，根据调查结果，绘制了如下两幅不完整的统计图.

视力情况条形统计图

视力情况扇形统计图



根据以上信息，解决下列问题：

(1) 此次调查的样本容量为_____；

- (2) 扇形统计图中 A 对应圆心角的度数为_____°；
- (3) 请补全条形统计图；
- (4) 若该地区九年级学生共有 25000 人，请估计其中视力正常的人数。

【答案】(1) 450 (2) 36°

(3) 见解析 (4) 2500 人

【解析】

【分析】(1) 根据 C 的人数是 117 人，所占的比例是 26%，据此即可求得此次调查的样本容量；

(2) 用 A 类学生数除以 450，再乘以 360° 即可得解；

(3) 利用总人数减去 A、C、D 三类的人数即可求得 B 的人数，从而补全直方图；

(4) 利用总人数 25000 乘以对应的百分比即可求得。

【小问 1 详解】

解： $117 \div 26\% = 450$ ，

答：此次调查的样本容量为是 450，

故答案为 450。

【小问 2 详解】

解： $\frac{45}{450} \times 360^\circ = 36^\circ$ ，

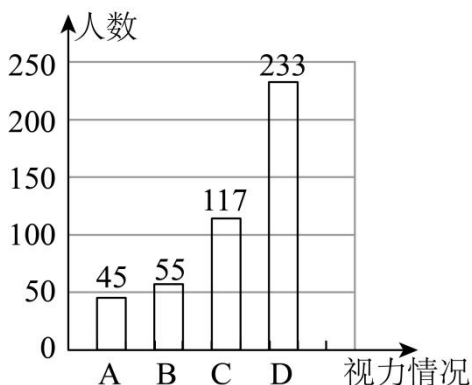
故答案为 36° ；

【小问 3 详解】

解： $450 - 45 - 117 - 233 = 55$

补全图形如下：

视力情况条形统计图



【小问 4 详解】

解： $25000 \times \frac{45}{450} = 2500$ (人)

答：九年级学生共有 25000 人，请估计其中视力正常的人数共有 2500 人。

【点睛】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的

信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

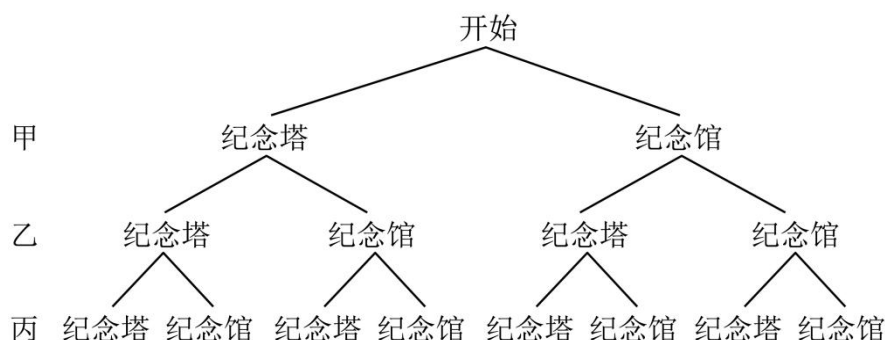
22. 甲、乙、丙三人到淮海战役烈士纪念塔园林游览, 若每人分别从纪念塔、纪念馆这两个景点中选择一个参观, 且选择每个景点的机会相等, 则三人选择相同景点的概率为多少?

【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】

【分析】 根据树状图可进行求解概率.

【详解】 解: 由题意可得如下树状图:



$\therefore$ 甲、乙、丙三人分别从纪念塔、纪念馆这两个景点中选择一个参观, 则共有 8 种情况, 其中三人选择相

同景点参观共有 2 种, 所以三人选择相同景点的概率为 $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

【点睛】 本题主要考查概率, 熟练掌握利用树状图求解概率是解题的关键.

23. 随着 2022 年底城东快速路的全线通车, 徐州主城区与东区之间的交通得以有效改善, 如图某人乘车从徐州东站至戏马台景区, 可沿甲路线或乙路线前往. 已知甲、乙两条路线的长度均为 12km, 甲路线的平均速度为乙路线的 $\frac{3}{2}$ 倍, 甲路线的行驶时间比乙路线少 10min, 求甲路线的行驶时间.



【答案】 甲路线的行驶时间为 20min.

【解析】

【分析】 设甲路线的行驶时间为 x min, 则乙路线的行驶事件为 $(x+10)$ min, 根据“甲路线的平均速度为乙路线的 $\frac{3}{2}$ 倍”列分式方程求解即可.

【详解】解：甲路线的行驶时间为 $x\text{min}$ ，则乙路线的行驶事件为 $(x+10)\text{min}$ ，由题意可得，

$$\frac{12}{x} = \frac{3}{2} \times \frac{12}{x+10},$$

解得 $x = 20$ ，

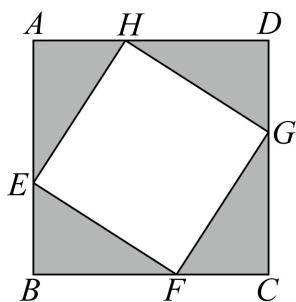
经检验 $x = 20$ 是原方程的解，

$\therefore$ 甲路线的行驶时间为 20min ，

答：甲路线的行驶时间为 20min 。

【点睛】本题考查分式方程的应用，解题的关键是明确题意，找出等量关系列出相应的分式方程。

24. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为 4，将它剪去 4 个全等的直角三角形，得到四边形 $EFGH$ 。设 AE 的长为 x ，四边形 $EFGH$ 的面积为 y 。



- (1) 求 y 关于 x 的函数表达式；
- (2) 当 AE 取何值时，四边形 $EFGH$ 的面积为 10？
- (3) 四边形 $EFGH$ 的面积是否存在最小值？若存在，求出最小值；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $y = 2x^2 - 8x + 16 (0 \leq x \leq 4)$

- (2) 当 AE 取 1 或 3 时，四边形 $EFGH$ 的面积为 10；
- (3) 存在，最小值为 8。

【解析】

【分析】(1) 先证出四边形 $EFGH$ 为正方形，用未知数 x 表示其任一边长，根据正方形面积公式即可解决问题；

- (2) 代入 y 值，解一元二次方程即可；
- (3) 把二次函数配方化为顶点式，结合其性质即可求出最小值。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 在正方形纸片 $ABCD$ 上剪去 4 个全等的直角三角形，

$$\therefore \angle AHE = \angle DGH, \angle DGH + \angle DHG = 90^\circ, HG = HE,$$

$$\therefore \angle EHG = 180^\circ - \angle AHE - \angle DHG,$$

$\angle EHG = 90^\circ$ ，四边形 $EFGH$ 为正方形，

在 $\triangle AEH$ 中， $AE = x$ ， $AH = BE = AB - AE = 4 - x$ ， $\angle A = 90^\circ$ ，

$$\therefore HE^2 = AE^2 + AH^2 = x^2 + (4-x)^2 = 2x^2 - 8x + 16,$$

$\therefore$ 正方形 $EFGH$ 的面积 $y = HE^2 = 2x^2 - 8x + 16$ ；

$\because AE, AH$ 不能为负，

$$\therefore 0 \leq x \leq 4,$$

故 y 关于 x 的函数表达式为 $y = 2x^2 - 8x + 16 (0 \leq x \leq 4)$

【小问 2 详解】

解：令 $y = 10$ ，得 $2x^2 - 8x + 16 = 10$ ，

整理，得 $x^2 - 4x + 3 = 0$ ，

解得 $x_1 = 1$ ， $x_2 = 3$ ，

故当 AE 取 1 或 3 时，四边形 $EFGH$ 的面积为 10；

【小问 3 详解】

解：存在．

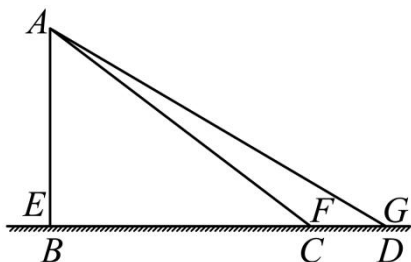
正方形 $EFGH$ 的面积 $y = 2x^2 - 8x + 16 = 2(x-2)^2 + 8 (0 \leq x \leq 4)$ ；

$\therefore$ 当 $x = 2$ 时， y 有最小值 8，即四边形 $EFGH$ 的面积最小为 8．

【点睛】本题考查二次函数的应用．解题的关键是找准数量关系，对于第三问，只需把二次函数表达式配方化为顶点式，即可求解．

25. 徐州电视塔为我市的标志性建筑之一，如图，为了测量其高度，小明在云龙公园的点 C 处，用测角仪测得塔顶 A 的仰角 $\angle AFE = 36^\circ$ ，他在平地上沿正对电视塔的方向后退至点 D 处，测得塔顶 A 的仰角 $\angle AGE = 30^\circ$ ．若测角仪距地面的高度 $FC = GD = 1.6\text{m}$ ， $CD = 70\text{m}$ ，求电视塔的高度 AB （精确到 0.1m）．（参考数据：

$\sin 36^\circ \approx 0.59, \cos 36^\circ \approx 0.81, \tan 36^\circ \approx 0.73, \sin 30^\circ = 0.50, \cos 30^\circ \approx 0.87, \tan 30^\circ \approx 0.58$ ）



【答案】199.2m

【解析】

【分析】先证四边形 $BCFE$ 是矩形，四边形 $FCDG$ 是平行四边形，得 $FG = CD = 70\text{m}$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 和 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中，解直角三角形以及由 $CD = 70\text{m}$ 构造方程求解即可得解.

【详解】解： $\because EG \perp AB$ ， $AB \perp BD$ ， $FC \perp BD$ ， $DG \perp BD$ ，

$\therefore$ 四边形 $BCFE$ 是矩形， $\angle AEF = \angle BCF = \angle BDG = 90^\circ$ ，

$\therefore BE = CF = DG = 1.6\text{m}$ ， $EF = BC$ ， $FC \parallel DG$ ，

$\therefore$ 四边形 $FCDG$ 是平行四边形，

$\therefore FG = CD = 70\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $\angle AEF = 90^\circ$ ， $\frac{AE}{EF} = \tan \angle AFE = \tan 36^\circ$ ，

$\therefore EF = \frac{AE}{\tan 36^\circ}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEG$ 中， $\angle AEG = 90^\circ$ ， $\frac{AE}{EG} = \tan \angle AGE = \tan 30^\circ$ ，

$\therefore EG = \frac{AE}{\tan 30^\circ}$ ，

$\therefore FG = EG - EF = \frac{AE}{\tan 30^\circ} - \frac{AE}{\tan 36^\circ} = 70$ ，

$\therefore AE \times \left(\frac{1}{0.58} - \frac{1}{0.73} \right) = 70$ ，

解得 $AE = 197.6\text{m}$ ，

$\therefore$ 电视塔的高度 $AB = AE + BE = 197.6 + 1.6 = 199.2\text{m}$.

【点睛】本题考查解直角三角形的应用仰角俯角问题，坡度坡角问题等知识，解题的关键是熟练解直角三角形，属于中考常考题型.

26. 两汉文化看徐州，桐桐在徐州博物馆“天工汉玉”展厅参观时了解到：玉璧，玉环为我国的传统玉器，通常为正中带圆孔的扇圆型器物，据《尔雅·释器》记载：“肉倍好，谓之璧；肉好若一，谓之环。”如图1，“肉”指边（阴影部分），“好”指孔，其比例关系见图示，以考古发现看，这两种玉器的“肉”与“好”未必符合该比例关系.

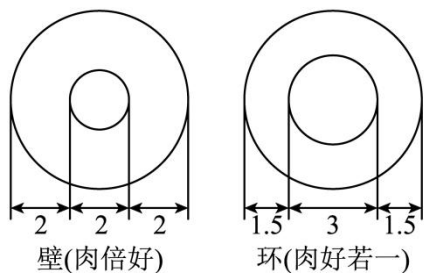
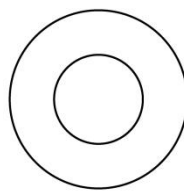


图1



雷纹玉环



主视图

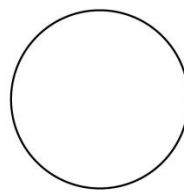


图3

(1) 若图1中两个大圆的直径相等，则璧与环的“肉”的面积之比为_____；

(2) 利用圆规与无刻度的直尺，解决下列问题（保留作图痕迹，不写作法）.

①图 2 为徐州狮子山楚王墓出土的“雷纹玉环”及其主视图，试判断该件玉器的比例关系是否符合“肉好若一”？

②图 3 表示一件圆形玉坯，若将其加工成玉璧，且比例关系符合“肉倍好”，请画出内孔.

【答案】(1) 32:27

(2) ①符合，图见详解；②图见详解

【解析】

【分析】(1) 根据圆环面积可进行求解；

(2) ①先确定该圆环的圆心，然后利用圆规确定其比例关系即可；②先确定好圆的圆心，然后根据平行线所截线段成比例可进行作图.

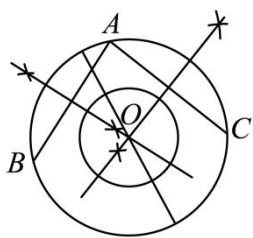
【小问 1 详解】

解：由图 1 可知：璧的“肉”的面积为 $\pi \times (3^2 - 1^2) = 8\pi$ ；环的“肉”的面积为 $\pi \times (3^2 - 1.5^2) = 6.75\pi$ ，
 $\therefore$ 它们的面积之比为 $8\pi : 6.75\pi = 32 : 27$ ；

故答案为 32:27；

【小问 2 详解】

解：①在该圆环任意画两条相交的线，且交点在外圆的圆上，且与外圆的交点分别为 A 、 B 、 C ，则分别以 A 、 B 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AB$ 长为半径画弧，交于两点，连接这两点，同理可画出线段 AC 的垂直平分线，线段 AB 、 AC 的垂直平分线的交点即为圆心 O ，过圆心 O 画一条直径，以 O 为圆心，内圆半径为半径画弧，看是否满足“肉好若一”的比例关系即可



主视图

由作图可知满足比例关系为 1:2:1 的关系；

②按照①中作出圆的圆心 O ，过圆心画一条直径 AB ，过点 A 作一条射线，然后以 A 为圆心，适当长为半径画弧，把射线三等分，交点分别为 C 、 D 、 E ，连接 BE ，然后分别过点 C 、 D 作 BE 的平行线，交 AB 于点 F 、 G ，进而以 FG 为直径画圆，则问题得解；如图所示：

作 $AE \perp BC$ 于点 E ，作 $DF \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 F ，则 $\angle AEB = \angle CFD = 90^\circ$ ，

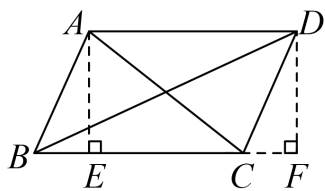


图2

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，若 $AB = a, BC = b$ ，

$\therefore AB = DC = a, AD \parallel BC, AD = BC = b$ ，

$\because AE \perp BC, DF \perp BC$ ，

$\therefore AE = DF$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle DCF \text{ (HL)}$ ，

$\therefore BE = CF$ ，

$\therefore AC^2 + BD^2 = AE^2 + CE^2 + BF^2 + DF^2$

$= (AB^2 - BE^2) + (BC - BE)^2 + (BC + CF)^2 + DF^2$

$= AB^2 - BE^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE + BE^2 + BC^2 + 2BC \cdot BE + BE^2 + AE^2$

$= AB^2 + BC^2 + BC^2 + BE^2 + AE^2$

$= AB^2 + BC^2 + BC^2 + AB^2$

$= 2(AB^2 + BC^2)$

$= 2(a^2 + b^2)$ ；

拓展提升：延长 BO 到点 C ，使 $OD = BO$ ，

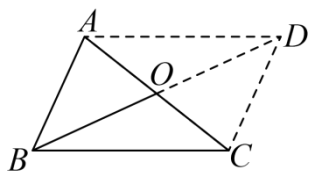


图3

$\because BO$ 为 $\triangle ABC$ 的一条中线，

$\therefore OA = CO$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AB = a, BC = b, AC = c$ 。

∴ 由【探究发现】可知， $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ ，

$$\therefore c^2 + (2BO)^2 = 2(a^2 + b^2),$$

$$\therefore c^2 + 4BO^2 = 2(a^2 + b^2),$$

$$\therefore BO^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4};$$

尝试应用：∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形， $AB = 8, BC = 12$ ，

$$\therefore AB = CD = 8, BC = AD = 12, \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

设 $AP = x$ ，则 $PD = AD - AP = 12 - x$ ，

$$\therefore PB^2 + PC^2 = AP^2 + AB^2 + PD^2 + CD^2 = x^2 + 8^2 + (12 - x)^2 + 8^2$$

$$= 2x^2 - 24x + 272 = 2(x - 6)^2 + 200,$$

$$\because 2 > 0,$$

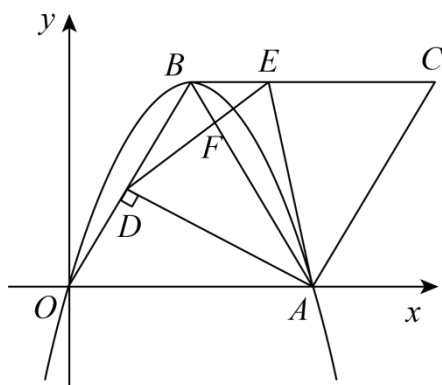
∴ 抛物线开口向上，

∴ 当 $x = 6$ 时， $PB^2 + PC^2$ 的最小值是 200

故答案为：200

【点睛】此题考查了二次函数的应用、勾股定理、平行四边形的判定和性质、矩形的性质等知识，熟练掌握勾股定理和数形结合是解题的关键.

28. 如图，在平面直角坐标系中，二次函数 $y = -\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$ 的图象与 x 轴分别交于点 O, A ，顶点为 B . 连接 OB, AB ，将线段 AB 绕点 A 按顺时针方向旋转 60° 得到线段 AC ，连接 BC . 点 D, E 分别在线段 OB, BC 上，连接 AD, DE, EA ， DE 与 AB 交于点 F ， $\angle DEA = 60^\circ$.



(1) 求点 A, B 的坐标;

(2) 随着点 E 在线段 BC 上运动.

① $\angle EDA$ 的大小是否发生变化? 请说明理由;

② 线段 BF 的长度是否存在最大值? 若存在, 求出最大值; 若不存在, 请说明理由;

(3) 当线段 DE 的中点在该二次函数的图象的对称轴上时, $\triangle BDE$ 的面积为_____.

【答案】(1) $A(2,0)$, $B(1,\sqrt{3})$;

(2) ① $\angle EDA$ 的大小不变, 理由见解析; ② 线段 BF 的长度存在最大值为 $\frac{1}{2}$;

(3) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

【解析】

【分析】(1) $y=0$ 得 $-\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x = 0$, 解方程即可求得 A 的坐标, 把 $y = -\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$ 化为顶点式即可求得点 B 的坐标;

(2) ① 在 AB 上取点 M , 使得 $BM = BE$, 连接 EM , 证明 $\triangle AED$ 是等边三角形即可得出结论; ② 由 $BM = AB - AM = 2 - AM$, 得当 AM 最小时, BF 的长最大, 即当 $DE \perp AB$ 时, BF 的长最大, 进而解直角三角形即可求解;

(3) 设 DE 的中点为点 M , 连接 AM , 过点 D 作 $DH \perp BN$ 于点 H , 证四边形 $OACB$ 是菱形, 得 $BC \parallel OA$, 进而证明 $\triangle MBE \cong \triangle MHD$ 得 $DH = BE$, 再证 $\triangle BME \sim \triangle NAM$, 得 $\frac{AN}{BM} = \frac{MN}{BE} = \frac{AM}{ME}$ 即 $\frac{1}{BM} = \frac{MN}{BE} = \sqrt{3}$, 结合三角形的面积公式即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because y = -\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x = -\sqrt{3}(x-1)^2 + \sqrt{3}$,

$\therefore$ 顶点为 $B(1,\sqrt{3})$,

令 $y=0$, $-\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x = 0$,

解得 $x=0$ 或 $x=2$,

$\therefore A(2,0)$;

【小问 2 详解】

解: ① $\angle EDA$ 的大小不变, 理由如下:

在 AB 上取点 M , 使得 $BM = BE$, 连接 EM ,

$\therefore \triangle AED$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ADE = 60^\circ$, 即 $\angle ADE$ 的大小不变;

②, $\because BF = AB - AF = 2 - AF$,

$\therefore$ 当 AF 最小时, BF 的长最大, 即当 $DE \perp AB$ 时, BF 的长最大,

$\because \triangle DAE$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle DAF = \frac{1}{2} \angle DAE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD = 60^\circ - \angle DAF = 30^\circ,$$

$\therefore AD \perp OB$,

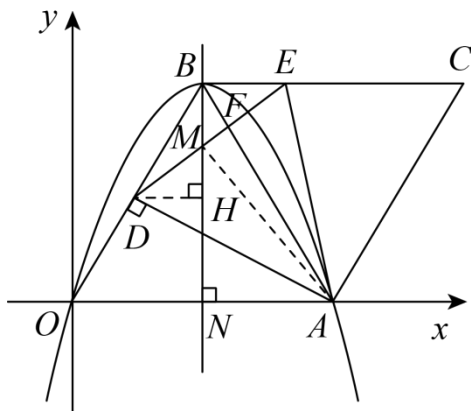
$$\therefore AD = OA \times \cos \angle OAD = 2 \times \cos 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\therefore AF = AD \times \cos \angle DAF = 2 \times \cos 30^\circ = \frac{3}{2},$$

$$\therefore BF = AB - AF = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 即线段 } BF \text{ 的长度存在最大值为 } \frac{1}{2};$$

【小问 3 详解】

解: 设 DE 的中点为点 M , 连接 AM , 过点 D 作 $DH \perp BN$ 于点 H ,



$$\because OA = OB = AC = BC = 2,$$

$\therefore$ 四边形 $OACB$ 是菱形,

$$\therefore BC \parallel OA,$$

$$\because DH \perp BN, AN \perp BN,$$

$$\therefore DH \parallel BC \parallel OA,$$

$$\therefore \angle MBE = \angle MHD, \angle MEB = \angle MDH,$$

$\because DE$ 的中点为点 M ,

$$\therefore MD = ME,$$

$$\therefore \triangle MBE \cong \triangle MHD,$$

$$\therefore DH = BE,$$

$$\therefore \angle ANM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MBE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \angle ANM, \quad \angle NMA + \angle NAM = 90^\circ,$$

$\therefore DE$ 的中点为点 M , $\triangle DAE$ 是等边三角形,

$$\therefore AM \perp DE,$$

$$\therefore \angle AME = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BME + \angle NMA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BME = \angle NAM,$$

$$\therefore \triangle BME \sim \triangle NAM,$$

$$\therefore \frac{AN}{BM} = \frac{MN}{BE} = \frac{AM}{ME} \text{ 即 } \frac{1}{BM} = \frac{MN}{BE} = \sqrt{3},$$

$$\therefore BM = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore MN = BN - BM = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore DH = BE = \frac{MN}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BDM} + S_{\triangle BEM} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{9},$$

故答案为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

【点睛】 本题主要考查了二次函数的图像及性质，菱形的判定及性质，全等三角形的判定及性质，相似三角形的判定及性质，等边三角形的判定及性质以及解直角三角形，题目综合性较强，熟练掌握各知识点是解题的关键.

