

新疆维吾尔自治区新疆生产建设兵团 2023 年初中学业水平考试

数学试题卷

考生须知：

1. 本试卷分为试题卷和答题卷两部分，试题卷共 4 页，答题卷共 2 页。
2. 满分 150 分，考试时间 120 分钟。
3. 不得使用计算器。

一、单项选择题（本大题共 9 小题，每小题 4 分，共 36 分。请按答题卷中的要求作答）

1. -5 的绝对值是（ ）

- A. 5 B. -5 C. $-\frac{1}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据负数的绝对值等于它的相反数可得答案。

【详解】解： $|-5|=5$ 。

故选 A。

2. 下列交通标志中是轴对称图形的是（ ）

- A.  B.  C.  D. 

【答案】B

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念逐项分析判断即可，轴对称图形的概念：平面内，一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够完全重合的图形。

【详解】解：选项 A、C、D 均不能找到这样的一条直线，使直线两旁的部分能够完全重合的图形，所以不是轴对称图形；

选项 B 能找到这样的一条直线，使直线两旁的部分能够完全重合，所以是轴对称图形；

故选：B。

【点睛】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合。

3. 我国自主研发的全球最大集装箱船“地中海泰莎”号的甲板面积近似于 4 个标准足球场，可承载 240000 吨的货物，数字 240000 用科学记数法可表示为（ ）

- A. 2.4×10^5 B. 0.24×10^6 C. 2.4×10^6 D. 24×10^4

【答案】A

【解析】

【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数.【详解】解： $240000 = 2.4 \times 10^5$.

故选：A.

【点睛】本题考查了科学记数法，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原来的数，变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 ≥ 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

4. 一次函数 $y = x + 1$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

【答案】D

【解析】

【分析】根据 $k = 1 > 0, b = 1 > 0$ 即可求解.【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = x + 1$ 中 $k = 1 > 0, b = 1 > 0$, $\therefore$ 一次函数 $y = x + 1$ 的图象不经过第四象限,

故选：D.

【点睛】本题考查了一次函数的性质，熟练掌握一次函数的性质是解题的关键.

5. 计算 $4a \cdot 3a^2b \div 2ab$ 的结果是 ()

- A. $6a$ B. $6ab$ C. $6a^2$ D. $6a^2b^2$

【答案】C

【解析】

【分析】先计算单项式乘以单项式，然后根据单项式除以单项式进行计算即可求解.

【详解】解： $4a \cdot 3a^2b \div 2ab$

$$= 12a^3b \div 2ab$$

$$= 6a^2,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了单项式除以单项式，熟练掌握单项式除以单项式的运算法则是解题的关键.

6. 用配方法解一元二次方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ ，配方后得到的方程是（ ）

- A. $(x+6)^2 = 28$ B. $(x-6)^2 = 28$ C. $(x+3)^2 = 1$ D. $(x-3)^2 = 1$

【答案】D

【解析】

【分析】方程两边同时加上一次项系数一半的平方即 $\left(\frac{-6}{2}\right)^2$ 计算即可.

【详解】 $\because x^2 - 6x + 8 = 0$,

$$\therefore x^2 - 6x + 8 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2,$$

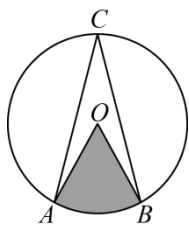
$$\therefore x^2 - 6x + (-3)^2 = 9 - 8,$$

$$\therefore (x-3)^2 = 1,$$

故选 D.

【点睛】本题考查了配方法，熟练掌握配方法的基本步骤是解题的关键.

7. 如图，在 $\odot O$ 中，若 $\angle ACB = 30^\circ$ ， $OA = 6$ ，则扇形 OAB (阴影部分)的面积是()



- A. 12π B. 6π C. 4π D. 2π

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆周角定理求得 $\angle AOB = 60^\circ$ ，然后根据扇形面积公式进行计算即可求解.

【详解】解： $\because \widehat{AB} = \widehat{AB}$ ， $\angle ACB = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ,$$

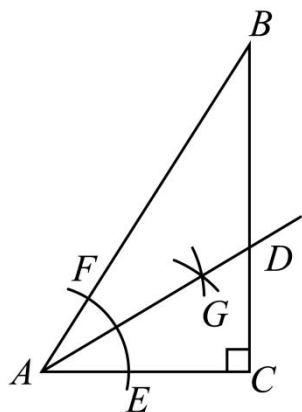
$$\therefore S = \frac{60}{360} \pi \times 6^2 = 6\pi.$$

故选：B.

【点睛】本题考查了圆周角定理，扇形面积公式，熟练掌握扇形面积公式以及圆周角定理是解题的关键.

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，以点 A 为圆心，适当长为半径作弧，交 AB 于点 F，交 AC 于点 E，分别以点 E，

F 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}EF$ 长为半径作弧, 两弧在 $\angle BAC$ 的内部交于点 G , 作射线 AG 交 BC 于点 D . 若 $AC = 3$, $BC = 4$, 则 CD 的长为()

A. $\frac{7}{8}$

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

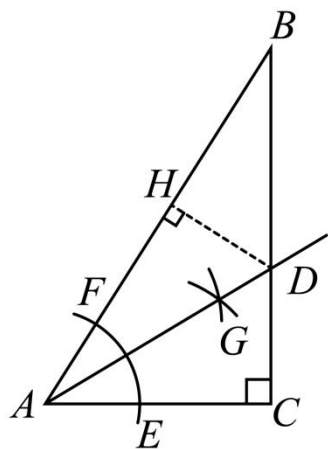
D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H , 勾股定理求得 AB , 根据作图可得 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线, 进而设 $CD = DH = x$, 则 $BD = 4 - x$, 根据 $\sin B = \frac{HD}{BD} = \frac{AC}{AB}$, 代入数据即可求解.

【详解】解: 如图所示, 过点 D 作 $DH \perp AB$ 于点 H ,



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$,

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

根据作图可得 AD 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$$\therefore DC = DH$$

设 $CD = DH = x$, $BD = 4 - x$

$$\therefore \sin B = \frac{HD}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

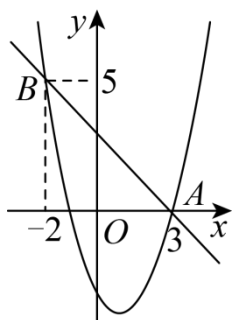
$$\therefore \frac{x}{4-x} = \frac{3}{5}$$

$$\text{解得: } x = \frac{3}{2}$$

故选: C.

【点睛】本题考查了作角平分线，角平分线的性质，正弦的定义，勾股定理解直角三角形，熟练掌握基本作图以及角平分线的性质是解题的关键.

9. 如图，在平面直角坐标系中，直线 $y_1 = mx + n$ 与抛物线 $y_2 = ax^2 + bx - 3$ 相交于点 A, B. 结合图象，判断下列结论: ①当 $-2 < x < 3$ 时, $y_1 > y_2$; ② $x = 3$ 是方程 $ax^2 + bx - 3 = 0$ 的一个解; ③若 $(-1, t_1), (4, t_2)$ 是抛物线上的两点，则 $t_1 < t_2$; ④对于抛物线, $y_2 = ax^2 + bx - 3$, 当 $-2 < x < 3$ 时, y_2 的取值范围是 $0 < y_2 < 5$. 其中正确结论的个数是 ()



A. 4 个

B. 3 个

C. 2 个

D. 1 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据函数图象直接判断①②，根据题意求得解析式，进而得出抛物线与 x 轴的交点坐标，结合图形即可判断③，化为顶点式，求得顶点坐标，进而即可判断④，即可求解.

【详解】解：根据函数图象，可得当 $-2 < x < 3$ 时, $y_1 > y_2$, 故①正确;

$\therefore A(3, 0)$ 在 $y_2 = ax^2 + bx - 3$ 上,

$\therefore x = 3$ 是方程 $ax^2 + bx - 3 = 0$ 的一个解; 故②正确;

$\therefore A(3, 0), B(-2, 5)$ 在抛物线 $y_2 = ax^2 + bx - 3$ 上,

$$\therefore \begin{cases} 9a + 3b - 3 = 0 \\ 4a - 2b - 3 = 5 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$\therefore y_2 = x^2 - 2x - 3$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\text{解得: } x_1 = -1, x_2 = 3$$

$$\therefore \text{当 } x = -1 \text{ 时, } y = 0,$$

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y > 0,$$

$$\therefore \text{若 } (-1, t_1), (4, t_2) \text{ 是抛物线上的两点, 则 } t_1 < t_2; \text{ 故③正确;}$$

$$\therefore y_2 = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4, \text{ 顶点坐标为 } (1, -4),$$

$$\therefore \text{对于抛物线, } y_2 = ax^2 + bx - 3, \text{ 当 } -2 < x < 3 \text{ 时, } y_2 \text{ 的取值范围是 } -4 < y_2 < 5, \text{ 故④错误.}$$

故正确的有 3 个,

故选: B.

【点睛】本题考查了二次函数图象与性质, 待定系数法求二次函数解析式, 求二次函数与坐标轴交点坐标, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请按答题卷中的要求作答)

10. 要使分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义, 则 x 需满足的条件是_____.

【答案】 $x \neq 5$

【解析】

【分析】根据分式有意义的条件即可求解.

【详解】解: $\because$ 分式 $\frac{1}{x-5}$ 有意义,

$$\therefore x - 5 \neq 0$$

$$\therefore x \neq 5,$$

故答案为: $x \neq 5$.

【点睛】本题考查了分式有意义的条件, 熟练掌握分式有意义的条件是解题的关键.

11. 若正多边形的一个内角等于 144° , 则这个正多边形的边数是 _____.

【答案】 10

【解析】

【分析】本题需先根据已知条件设出正多边形的边数, 再根据正多边形的计算公式得出结果即可.

【详解】解: 设这个正多边形是正 n 边形, 根据题意得:

$$(n-2) \times 180^\circ \div n = 144^\circ,$$

解得： $n = 10$.

故答案为： 10.

【点睛】 本题主要考查了正多边形的内角，在解题时要根据正多边形的内角公式列出式子是本题的关键.

12. 在平面直角坐标系中有五个点，分别是 $A(1,2)$ ， $B(-3,4)$ ， $C(-2,-3)$ ， $D(4,3)$ ， $E(2,-3)$ ，从中任选一个点恰好落在第一象限的概率是_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$

【解析】

【分析】 根据第一象限的点的特征，可得共有 2 个点在第一象限，进而根据概率公式即可求解.

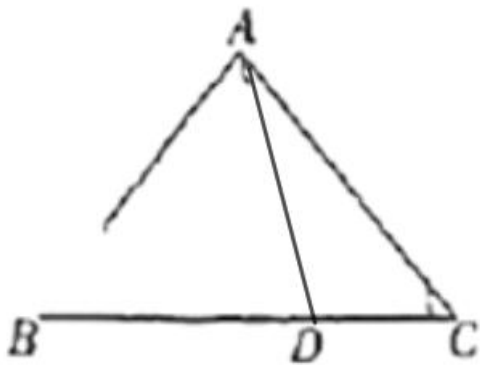
【详解】解：在平面直角坐标系中有五个点，分别是 $A(1,2)$ ， $B(-3,4)$ ， $C(-2,-3)$ ， $D(4,3)$ ， $E(2,-3)$ ，其中 $A(1,2)$ ， $D(4,3)$ ，在第一象限，共 2 个点，

$\therefore$ 从中任选一个点恰好落在第一象限的概率是 $\frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】 本题考查了概率公式求概率，第一象限点的坐标特征，熟练掌握以上知识是解题的关键.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB = AC$ ， $AD = BD$ ， $\angle CAD = 24^\circ$ ，则 $\angle C =$ _____ $^\circ$.



【答案】 52

【解析】

【分析】 根据等边对等角得出 $\angle B = \angle C$ ， $\angle B = \angle BAD$ ，再有三角形内角和定理及等量代换求解即可.

【详解】解： $\because AB = AC$ ， $AD = BD$ ，

$\therefore \angle B = \angle C$ ， $\angle B = \angle BAD$ ，

$\therefore \angle B = \angle C = \angle BAD$ ，

$\because \angle B + \angle C + \angle BAC = 180^\circ$ ，

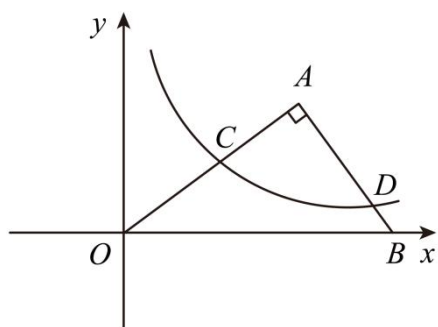
$\therefore \angle B + \angle C + \angle BAD + \angle CAD = 180^\circ$ ，即 $3\angle C + 24^\circ = 180^\circ$ ，

解得： $\angle C = 52^\circ$ ，

故答案为： 52.

【点睛】题目主要考查等边对等角及三角形内角和定理，结合图形，找出各角之间的关系是解题关键.

14. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle OAB$ 为直角三角形， $\angle A = 90^\circ$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ ， $OB = 4$. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过 OA 的中点 C ，交 AB 于点 D ，则 $k =$ _____.



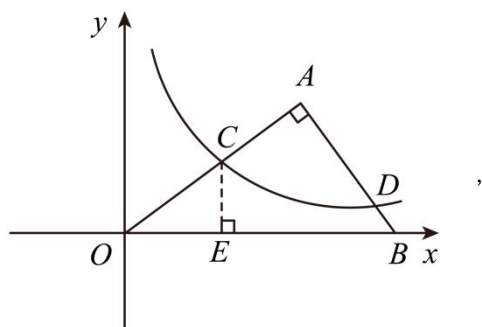
【答案】 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【解析】

【分析】作 $CE \perp OB$ 交 OB 于点 E ，根据题意可得 $OA = OB \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ，由点 C 为 OA 的中点，可得 $OC = \sqrt{3}$ ，在 $\text{Rt}\triangle OCE$ 中，通过解直角三角形可得 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $OE = \frac{3}{2}$ ，从而得到点 $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，

代入函数解析式即可得到答案.

【详解】解：如图，作 $CE \perp OB$ 交 OB 于点 E ，



$\because \angle A = 90^\circ$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ ， $OB = 4$ ，

$\therefore OA = OB \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\because$ 点 C 为 OA 的中点，

$$\therefore OC = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

$$\because CE \perp OB,$$

$$\therefore \angle OEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle COE = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad OE = OC \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

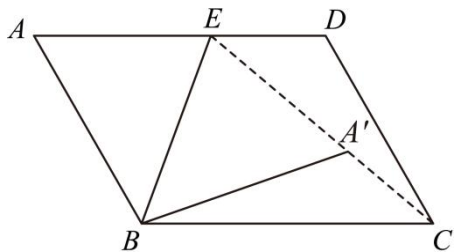
$\because$ 点 C 在反比例函数图象上,

$$\therefore k = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4},$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

【点睛】 本题主要考查了解直角三角形，反比例函数的图象与性质，熟练掌握反比例函数的图象与性质，添加适当的辅助线构造直角三角形，是解题的关键.

15. 如图，在 $ABCD$ 中， $AB=6$ ， $BC=8$ ， $\angle ABC=120^\circ$ ，点 E 是 AD 上一动点，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle A'BE$ ，当点 A' 恰好落在 EC 上时， DE 的长为_____.

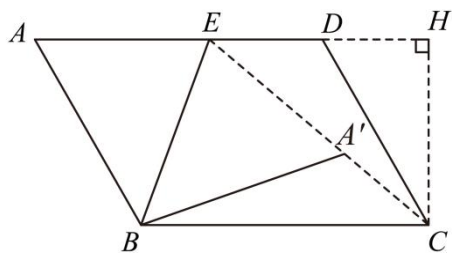


【答案】 $\sqrt{37}-3$ 或 $-3+\sqrt{37}$

【解析】

【分析】 过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ，根据平行四边形的性质以及已知条件得出 $\angle ADC = \angle ABC = 120^\circ$ ， $\angle HDC = 60^\circ$ ，进而求得 DH, HC ，根据折叠的性质得出 $CB = CE$ ，进而在 $Rt\triangle ECH$ 中，勾股定理即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 C 作 $CH \perp AD$ 交 AD 的延长线于点 H ，



$\therefore$ 在 $ABCD$ 中, $AB = 6$, $BC = 8$, $\angle ABC = 120^\circ$,

$\therefore \angle ADC = \angle ABC = 120^\circ$, $\angle HDC = 60^\circ$, $CD = AB = 6$, $AD = CB = 8$,

$\therefore DH = DC \times \cos \angle HDC = \frac{1}{2}DC = 3$,

在 $\text{Rt}\triangle ECH$ 中, $HC = \sqrt{CD^2 - DH^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$

$\therefore$ 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折叠得到 $\triangle A'BE$, 当点 A' 恰好落在 EC 上时,

$\therefore \angle AEB = \angle CEB$

又 $AD \parallel BC$

$\therefore \angle EBC = \angle AEB$

$\therefore \angle EBC = \angle CEB$

$\therefore CE = BC = 8$

设 $ED = x$,

$\therefore EH = x + 3$

在 $\text{Rt}\triangle ECH$ 中, $EC^2 = EH^2 + HC^2$

$\therefore 8^2 = (x + 3)^2 + (3\sqrt{3})^2$

解得: $x = \sqrt{37} - 3$ (负整数)

故答案为: $\sqrt{37} - 3$.

【点睛】 本题考查了折叠的性质, 平行四边形的性质, 解直角三角形, 熟练掌握折叠的性质是解题的关键.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

16. 计算:

$$(1) (-1)^3 + \sqrt{4} - (2 - \sqrt{2})^0;$$

$$(2) (a + 3)(a - 3) - a(a - 2).$$

【答案】 (1) 0

$$(2) 2a - 9$$

【解析】

【分析】(1) 根据有理数的乘方，零指数幂，算术平方根的定义，进行计算即可求解；

(2) 根据平方差公式以及单项式乘以多项式的法则进行计算即可求解.

【小问 1 详解】

解：原式 $= -1 + 2 - 1$

$= 0$ ；

【小问 2 详解】

解：原式 $= a^2 - 9 - a^2 + 2a$

$= 2a - 9$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，整式的乘法，熟练掌握有理数的乘方，零指数幂，算术平方根的定义，平方差公式以及单项式乘以多项式是解题的关键.

17. (1) 解不等式组：
$$\begin{cases} 2x < 16 \text{ ①} \\ 3x > 2x + 3 \text{ ②} \end{cases}$$

(2) 金秋时节，新疆瓜果飘香. 某水果店 A 种水果每千克 5 元， B 种水果每千克 8 元，小明买了 A 、 B 两种水果共 7 千克花了 41 元. A 、 B 两种水果各买了多少千克？

【答案】(1) $3 < x < 8$ ；(2) 购买 A 种水果 5 千克，则购买 B 种水果 2 千克

【解析】

【分析】(1) 先求出各个不等式的解集，然后确定不等式组的解集即可；

(2) 设购买 A 种水果 x 千克，则购买 B 种水果 $(7-x)$ 千克，根据题意列出方程求解即可.

【详解】解：(1)
$$\begin{cases} 2x < 16 \text{ ①} \\ 3x > 2x + 3 \text{ ②} \end{cases}$$

解不等式①得： $x < 8$ ，

解不等式②得： $x > 3$ ，

$\therefore$ 不等式组的解集为： $3 < x < 8$ ；

(2) 设购买 A 种水果 x 千克，则购买 B 种水果 $(7-x)$ 千克，根据题意得：

$$5x + 8(7-x) = 41,$$

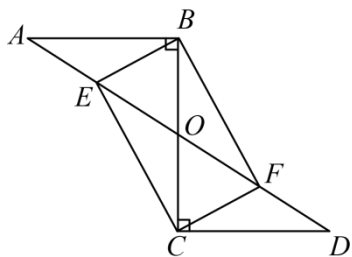
解得： $x = 5$ ，

$$\therefore 7-x = 2,$$

$\therefore$ 购买 A 种水果 5 千克，则购买 B 种水果 2 千克.

【点睛】题目主要考查求不等式组的解集及一元一次方程的应用，理解题意，熟练掌握运算法则及列出方程是解题关键.

18. 如图， AD 和 BC 相交于点 O ， $\angle ABO = \angle DCO = 90^\circ$ ， $OB = OC$. 点 E 、 F 分别是 AO 、 DO 的中点.



(1) 求证： $OE = OF$ ；

(2) 当 $\angle A = 30^\circ$ 时，求证：四边形 $BECF$ 是矩形.

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 直接证明 $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (ASA)，得出 $OA = OD$ ，根据 E 、 F 分别是 AO 、 DO 的中点，即可得证；

(2) 证明四边形 $BECF$ 是平行四边形，进而根据 $\angle A = 30^\circ$ ，推导出 $\triangle BOE$ 是等边三角形，进而可得 $BC = EF$ ，即可证明四边形 $BECF$ 是矩形.

【小问 1 详解】

证明：在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle DOC$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABO = \angle DCO = 90^\circ \\ OB = OC \\ \angle AOB = \angle DOC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOC \text{ (ASA)},$$

$$\therefore OA = OD,$$

又 $\because E$ 、 F 分别是 AO 、 DO 的中点，

$$\therefore OE = OF;$$

【小问 2 详解】

$$\because OB = OC, OF = OE,$$

$$\therefore \text{四边形 } BECF \text{ 是平行四边形, } BC = 2OB, EF = 2OE,$$

$$\because E \text{ 为 } AO \text{ 的中点, } \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore EB = EO = EA,$$

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle BOE$ 是等边三角形,

$$\therefore OB = OE,$$

$$\therefore BC = EF,$$

$\therefore$ 四边形 $BECF$ 是矩形.

【点睛】本题考查了全等三角形的性质与判定，等边三角形的性质与判定，矩形判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

19. 跳绳是某校体育活动的特色项目. 体育组为了了解七年级学生 1 分钟跳绳次数情况，随机抽取 20 名七年级学生进行 1 分钟跳绳测试（单位：次），数据如下：

100 110 114 114 120 122 122 131 144 148
152 155 156 165 165 165 165 174 188 190

对这组数据进行整理和分析，结果如下：

平均数	众数	中位数
145	a	b

请根据以上信息解答下列问题：

- (1) 填空： $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 学校规定 1 分钟跳绳 165 次及以上为优秀，请你估计七年级 240 名学生中，约有多少名学生能达到优秀？
- (3) 某同学 1 分钟跳绳 152 次，请推测该同学的 1 分钟跳绳次数是否超过年级一半的学生？说明理由.

【答案】(1) 165，150

(2) 84

(3) 是，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据众数与中位数的定义进行计算即可求解；

(2) 根据样本估计总体，用跳绳 165 次及以上人数的占比乘以总人数，即可求解；

(3) 根据中位数的定义即可求解；

【小问 1 详解】

解：这组数据中，165 出现了 4 次，出现次数最多

$$\therefore a = 165,$$

这组数据从小到大排列，第 10 个和 11 个数据分别为 148, 152,

$$\therefore b = \frac{148+152}{2} = 150,$$

故答案为：165，150.

【小问 2 详解】

解： $\because$ 跳绳 165 次及以上人数有 7 个，

$$\therefore \text{估计七年级 240 名学生中，有 } 240 \times \frac{7}{20} = 84 \text{ 个优秀，}$$

【小问 3 详解】

解： $\because$ 中位数为 150，

$\therefore$ 某同学 1 分钟跳绳 152 次，可推测该同学的 1 分钟跳绳次数超过年级一半的学生.

【点睛】 本题考查了求中位数，众数，样本估计总体，熟练掌握中位数、众数的定义是解题的关键.

20. 烽燧即烽火台，是古代军情报警的一种措施，史册记载，夜间举火称“烽”，白天放烟称“燧”. 克孜尔尕哈烽燧是古丝绸之路北道上新疆境内时代最早、保存最完好、规模最大的古代烽燧（如图 1）. 某数学兴趣小组利用无人机测量该烽燧的高度，如图 2，无人机飞至距地面高度 31.5 米的 A 处，测得烽燧 BC 的顶部 C 处的俯角为 50° ，测得烽燧 BC 的底部 B 处的俯角为 65° ，试根据提供的数据计算烽燧 BC 的高度.（参数据： $\sin 50^\circ \approx 0.8$ ， $\cos 50^\circ \approx 0.6$ ， $\tan 50^\circ \approx 1.2$ ， $\sin 65^\circ \approx 0.9$ ， $\cos 65^\circ \approx 0.4$ ， $\tan 65^\circ \approx 2.1$ ）



图1

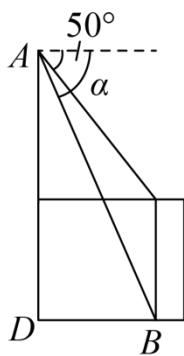


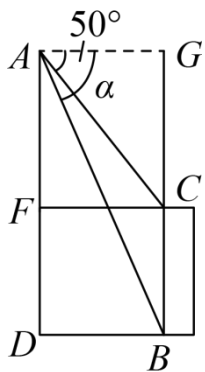
图2

【答案】 13.5 米

【解析】

【分析】 过点 A 作 DB 的平行线交 BC 的延长线于点 G ，过点 C 作 $CF \perp AD$ ，根据题意得出边形 $ADBG$ 为矩形， $\angle ABD = 65^\circ$ ， $AD = 31.5$ ，再由正切函数求解即可.

【详解】 解：过点 A 作 DB 的平行线交 BC 的延长线于点 G ，过点 C 作 $CF \perp AD$ ，如图所示：



根据题意得：四边形 $ADBG$ 为矩形， $\angle ABD = 65^\circ$, $AD = 31.5$,

$$\therefore BD = \frac{AD}{\tan 65^\circ} = \frac{31.5}{2.1},$$

$$\therefore BD = AG = \frac{31.5}{2.1},$$

$$\therefore \tan \angle CAG = \frac{CG}{AG},$$

$$\therefore CG = \tan \angle CAG \cdot AG = \tan 50^\circ \times \frac{31.5}{2.1} = 1.2 \times \frac{31.5}{2.1} = 18 \text{ 米},$$

$$\therefore BC = 31.5 - 18 = 13.5 \text{ 米}.$$

【点睛】题目主要考查解三角形的应用，理解题意，结合图形求解是解题关键.

21. 随着端午节的临近，A，B 两家超市开展促销活动，各自推出不同的购物优惠方案，如下表：

	A 超市	B 超市
优惠方案	所有商品按八折出售	购物金额每满 100 元返 30 元

(1) 当购物金额为 80 元时，选择超市_____（填“A”或“B”）更省钱；

当购物金额为 130 元时，选择超市_____（填“A”或“B”）更省钱；

(2) 若购物金额为 x ($0 \leq x < 200$) 元时，请分别写出它们的实付金额 y (元) 与购物金额 x (元) 之间的函数解析式，并说明促销期间如何选择这两家超市去购物更省钱？

(3) 对于 A 超市的优惠方案，随着购物金额的增大，顾客享受的优惠率不变，均为 20% (注：

优惠率 = $\frac{\text{购物金额} - \text{实付金额}}{\text{购物金额}} \times 100\%$)。若在 B 超市购物，购物金额越大，享受的优惠率一定越大吗？

请举例说明.

【答案】(1) A, B

(2) $y_A = 0.8x$ ($0 \leq x \leq 200$), $y_B = \begin{cases} x & (0 \leq x < 100) \\ x - 30 & (100 \leq x < 200) \end{cases}$, 当 $0 \leq x < 100$ 或 $150 < x < 200$ 时选择 A

超市更省钱，当 $100 \leq x < 150$ 时，选择 B 超市更省钱

(3) 不一定，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 根据题意，分别计算购物金额为 80 和 130 元时，两家超市的费用，比较即可求解；

(2) 根据题意列出函数关系，根据当 $100 \leq x < 200$ 时， $0.8x < x - 30$ ，得出 $150 < x < 200$ 时选择 A 超市更省钱，结合题意，即可求解；

(3) 根据题意以及 (2) 的结论，举出反例即可求解.

【小问 1 详解】

解：购物金额为 80 元时， A 超市费用为 $80 \times 0.8 = 64$ (元)

B 超市费用为 80 元，

$\therefore 64 < 80$ ，

$\therefore$ 当购物金额为 80 元时，选择超市 A 更省钱；

购物金额为 130 元时， A 超市费用为 $130 \times 0.8 = 104$ (元)

B 超市费用为 $130 - 30 = 100$ 元

$\therefore 100 < 104$ ，

$\therefore$ 当购物金额为 130 元时，选择超市 B 更省钱；

故答案为： A, B .

【小问 2 详解】

解：依题意， $y_A = 0.8x (0 \leq x \leq 200)$ ，

$$y_B = \begin{cases} x (0 \leq x < 100) \\ x - 30 (100 \leq x < 200) \end{cases}$$

当 $0 < x < 100$ 时， B 超市没有优惠，故选择 A 超市更省钱，

当 $100 \leq x < 200$ 时， $0.8x < x - 30$

解得： $x > 150$

$\therefore$ 当 $150 < x < 200$ 时，选择 A 超市更省钱，

综上所述， $0 \leq x < 100$ 或 $150 < x < 200$ 时选择 A 超市更省钱，

当 $100 \leq x < 150$ 时，选择 B 超市更省钱，

当 $x = 150$ 时，两家一样，

综上所述，当 $0 \leq x < 100$ 或 $150 < x < 200$ 时选择 A 超市更省钱，当 $100 \leq x < 150$ 时，选择 B 超市更省钱；

【小问 3 详解】

在 B 超市购物，购物金额越大，享受的优惠率不一定越大，

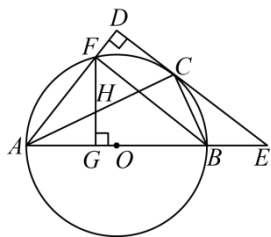
例如：当 B 超市购物 100 元，返 30 元，相当于打 7 折，即优惠率为 $\frac{100-70}{100} \times 100\% = 30\%$ ，

当 B 超市购物 120 元，返 30 元，则优惠率为 $\frac{120-90}{120} \times 100\% = 25\%$ ，

$\therefore$ 在 B 超市购物，购物金额越大，享受的优惠率不一定越大，

【点睛】 本题考查了一次函数的应用，根据题意列出函数关系式是解题的关键.

22. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C, F 是 $\odot O$ 上的点，且 $\angle CBF = \angle BAC$ ，连接 AF ，过点 C 作 AF 的垂线，交 AF 的延长线于点 D ，交 AB 的延长线于点 E ，过点 F 作 $FG \perp AB$ 于点 G ，交 AC 于点 H 。



(1) 求证： CE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\tan E = \frac{3}{4}$ ， $BE = 4$ ，求 FH 的长。

【答案】 (1) 见解析 (2) $\frac{18}{5}$

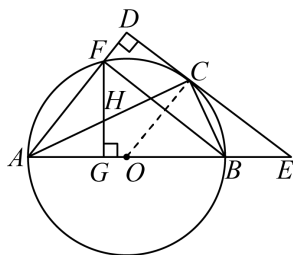
【解析】

【分析】 (1) 连接 OC ，根据 $OC = OA$ ，得出 $\angle OAC = \angle OCA$ ，由 $\widehat{FC} = \widehat{FC}$ ，得出 $\angle FAC = \angle FBC$ ，根据已知条件得出 $\angle FAC = \angle ACO$ ，证明 $OC \parallel AD$ ，结合已知条件可得 $OC \perp DE$ ，即可得证；

(2) 连接 OC ，根据已知条件得出 $\sin E = \frac{OC}{OE} = \frac{3}{5}$ ， $\cos E = \frac{4}{5}$ ，得出 $OC = 6$ ，证明 $\triangle BCE \sim \triangle CAE$ ，得出 $CE = 8$ ， $\tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$ ，进而求得 $AF = \frac{36}{5}$ ， $AG = \frac{3}{5}AF = \frac{108}{25}$ ，根据 $\tan \angle CAB = \tan \angle HAG = \frac{1}{2} = \frac{HG}{AG}$ ，求得 $HG = \frac{1}{2}AG = \frac{54}{25}$ ，进而即可求解。

【小问 1 详解】

证明：如图所示，连接 OC ，



$\because OC = OA$,

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\because \widehat{FC} = \widehat{FC},$$

$$\therefore \angle FAC = \angle FBC$$

$$\because \angle CBF = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle FAC = \angle ACO$$

$$\therefore OC \parallel AD$$

$$\because AD \perp DE$$

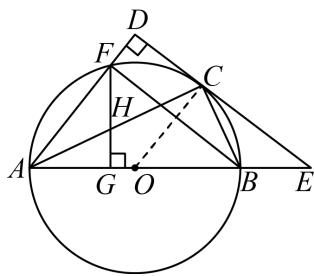
$$\therefore OC \perp DE$$

$$\because OC \text{ 是半径,}$$

$$\therefore CE \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线;}$$

【小问 2 详解】

解：如图所示，连接 OC ，



$$\because \tan E = \frac{OC}{CE} = \frac{3}{4}, \quad BE = 4,$$

$$\text{设 } OC = 3a, \text{ 则 } CE = 4a$$

$$\therefore OE = 5a,$$

$$\therefore \sin E = \frac{OC}{OE} = \frac{3}{5}, \quad \cos E = \frac{4}{5}$$

$$\text{即 } \frac{3}{5} = \frac{OC}{OC+4}$$

$$\text{解得: } OC = 6,$$

$$\because OC \perp DE,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle OCB = 90^\circ$$

$$\because OC = OB$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle BCE + \angle OBC = 90^\circ,$$

$\because AB$ 是直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle CAE,$$

又 $\angle E = \angle E$,

$$\therefore \triangle BCE \sim \triangle CAE,$$

$$\therefore \frac{CE}{AE} = \frac{BE}{CE}, \frac{CB}{CA} = \frac{CE}{AE},$$

$$\therefore CE^2 = BE \times AE,$$

$$\therefore CE^2 = 4 \times (4 + 12) = 64,$$

解得: $CE = 8$,

$$\therefore \frac{CB}{CA} = \frac{CE}{AE} = \frac{8}{12 + 4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2},$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore BF \perp AF,$$

$$\therefore DE \perp AD,$$

$$\therefore DC \parallel FB$$

$$\therefore \angle FBA = \angle E,$$

$$\therefore \tan \angle FBA = \tan \angle E,$$

$$\therefore \frac{AF}{FB} = \frac{OC}{CE} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4},$$

设 $AF = 3k$, 则 $FB = 4k$,

$$\therefore AB = 5k,$$

$$\therefore AB = 12,$$

$$\therefore k = \frac{12}{5},$$

$$\therefore AF = \frac{36}{5},$$

$$\therefore FG \perp AB,$$

$$\therefore \angle AFG = 90^\circ - \angle GFB = \angle FBA = \angle E$$

$$\therefore FG = AF \times \cos E = \frac{4}{5} AF = \frac{4}{5} \times \frac{36}{5} = \frac{144}{25},$$

$$\therefore AG = \frac{3}{5}AF = \frac{108}{25},$$

$$\therefore \tan \angle CAB = \tan \angle HAG = \frac{1}{2} = \frac{HG}{AG},$$

$$\therefore HG = \frac{1}{2}AG = \frac{54}{25},$$

$$\therefore FH = FG - HG = \frac{144}{25} - \frac{54}{25} = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}.$$

【点睛】 本题考查了切线的判定，解直角三角形，相似三角形的性质与判定，熟练掌握以上知识是解题的关键.

23. 【建立模型】(1)如图1，点 B 是线段 CD 上的一点， $AC \perp BC$ ， $AB \perp BE$ ， $ED \perp BD$ ，垂足分别为 C ， B ， D ， $AB = BE$. 求证： $\triangle ACB \cong \triangle BDE$ ；

【类比迁移】(2)如图2，一次函数 $y = 3x + 3$ 的图象与 y 轴交于点 A 、与 x 轴交于点 B ，将线段 AB 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到 BC 、直线 AC 交 x 轴于点 D .

①求点 C 的坐标；

②求直线 AC 的解析式；

【拓展延伸】(3)如图3，抛物线 $y = x^2 - 3x - 4$ 与 x 轴交于 A ， B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于 C 点，已知点 $Q(0, -1)$ ，连接 BQ . 抛物线上是否存在点 M ，使得 $\tan \angle MBQ = \frac{1}{3}$ ，若存在，求出点 M 的横坐标.

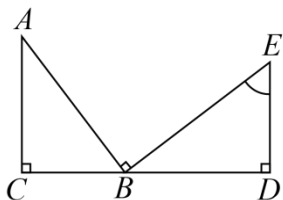


图1

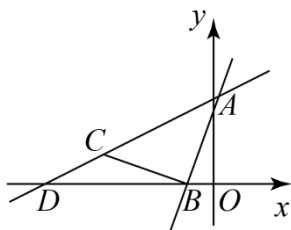


图2

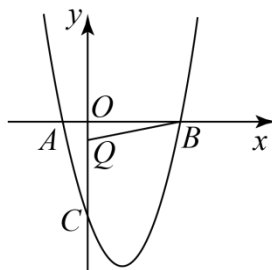


图3

【答案】(1) 见解析； (2) ① $C(-4, 1)$ ； ② 直线 AC 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 3$ ； (3) $-\frac{4}{11}$ 或 $-\frac{14}{13}$

【解析】

【分析】 [建立模型] (1) 根据题意得出 $\angle C = \angle D = \angle ABE = 90^\circ$ ， $\angle A = \angle EBD$ ，证明 $\triangle ACB \cong \triangle BDE$ (AAS)，即可得证；

[类比迁移] (2) ①过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ，同 (1) 的方法，证明 $\triangle CBE \cong \triangle BAO$ ，根据一次函数 $y = 3x + 3$ 的图象与 y 轴交于点 A 、与 x 轴交于点 B ，求得 $A(0, 3)$ ， $B(-1, 0)$ ，进而可得 C 点的坐标；

②由 $A(0,3)$ ，设直线 AC 的解析式为 $y=kx+3$ ，将点 $C(-4,1)$ 代入得直线 AC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+3$ ；

[拓展延伸] (3) 根据解析式求得 $A(-1,0)$ ， $B(4,0)$ ；①当 M 点在 x 轴下方时，如图所示，连接 MB ，过点

Q 作 $QH \perp BM$ 于点 H ，过点 H 作 $DE \perp y$ 轴于点 D ，过点 B 作 $BE \perp DE$ 于点 E ，证明 $\triangle QDH \sim \triangle HEB$ ，

根据 $\tan \angle MBQ = \tan \angle QBH = \frac{1}{3} = \frac{QH}{BH}$ 得出 $\frac{QH}{BH} = \frac{DH}{BE} = \frac{1}{3}$ ，设 $DH = a$ ，则 $BE = 3a$ ，求得点

$H\left(\frac{7}{10}, -\frac{21}{10}\right)$ ，进而求得直线 BM 的解析式，联立抛物线解析式即可求解；②当 M 点在 x 轴的上方时，如

图所示，过点 Q 作 $QG \perp MB$ 于点 G ，过点 G 作 $PF \parallel x$ 轴，交 y 轴于点 F ，过点 B 作 $PB \perp FP$ 于点 P ，

同①的方法即可求解。

【详解】[建立模型] (1) 证明： $\because AC \perp BC$ ， $AB \perp BE$ ， $ED \perp BD$ ，

$$\therefore \angle C = \angle D = \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle A = 90^\circ, \angle ABC + \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A = \angle EBD,$$

$$\text{又} \because AB = BE,$$

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle BDE (\text{AAS});$$

[类比迁移] (2) 如图所示，过点 C 作 $CE \perp x$ 轴于点 E ，

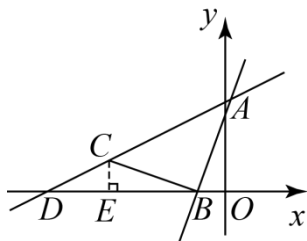


图2

$\therefore$ 将线段 AB 绕点 B 逆时针旋转 90° 得到 BC ，

$$\therefore BA = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{又} \angle AOB = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 90^\circ - \angle CBE = \angle ECB,$$

$$\therefore \triangle CBE \cong \triangle BAO (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = AO, CE = BO,$$

$\therefore$ 一次函数 $y=3x+3$ 的图象与 y 轴交于点 A 、与 x 轴交于点 B ，

当 $x=0$ 时, $y=3$, 即 $A(0,3)$,

当 $y=0$ 时, $x=-1$, 即 $B(-1,0)$,

$$\therefore BE = AO = 3, CE = BO = 1,$$

$$\therefore EO = EB + BO = 3 + 1 = 4,$$

$$\therefore C(-4,1);$$

② $\because A(0,3)$, 设直线 AC 的解析式为 $y=kx+3$,

将 $C(-4,1)$ 代入得: $1 = -4k + 3$

$$\text{解得: } k = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{直线 } AC \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{2}x + 3,$$

(3) $\because$ 抛物线 $y = x^2 - 3x - 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点(点 A 在点 B 的左侧),

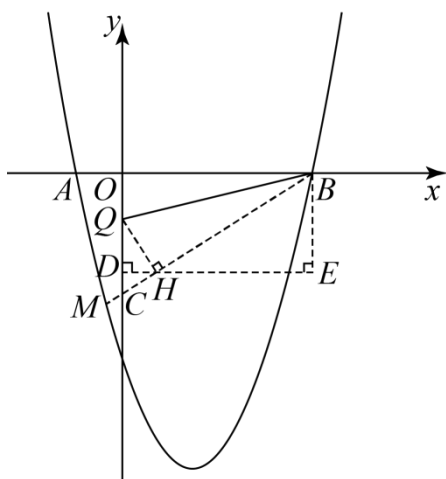
当 $y=0$ 时, $x^2 - 3x - 4 = 0$,

解得: $x_1 = -1, x_2 = 4$,

$$\therefore A(-1,0), B(4,0);$$

① 当 M 点在 x 轴下方时, 如图所示, 连接 MB , 过点 Q 作 $QH \perp BM$ 于点 H , 过点 H 作 $DE \perp y$ 轴于点 D ,

过点 B 作 $BE \perp DE$, 于点 E ,



$$\therefore \angle QDH = \angle E = \angle QHB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DQH = 90^\circ - \angle QHD = \angle BHE,$$

$$\therefore \triangle QDH \sim \triangle HEB,$$

$$\therefore \frac{QH}{BH} = \frac{DH}{BE} = \frac{DQ}{HE},$$

$$\therefore \tan \angle MBQ = \tan \angle QBH = \frac{1}{3} = \frac{QH}{BH},$$

$$\therefore \frac{QH}{BH} = \frac{DH}{BE} = \frac{1}{3},$$

设 $DH = a$, 则 $BE = 3a$,

$$\therefore DE = 4,$$

$$\therefore HE = 4 - a, \quad QD = \frac{4}{3} - \frac{a}{3},$$

$$\therefore OD = BE, \quad Q(0, -1),$$

$$\therefore 1 + \frac{4}{3} - \frac{a}{3} = 3a,$$

$$\text{解得: } a = \frac{7}{10},$$

$$\therefore H\left(\frac{7}{10}, -\frac{21}{10}\right),$$

设直线 BH 的解析式为 $y = k'x + b$,

$$\text{代入 } H\left(\frac{7}{10}, -\frac{21}{10}\right), \quad B(4, 0) \text{ 得: } \begin{cases} \frac{7}{10}k' + b = -\frac{21}{10} \\ 4k' + b = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = -\frac{28}{11} \\ k' = \frac{7}{11} \end{cases},$$

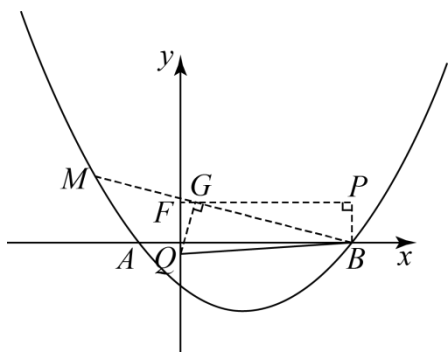
$$\therefore \text{直线 } BM \text{ 解析式为 } y = \frac{7}{11}x - \frac{28}{11},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{7}{11}x - \frac{28}{11} \\ y = x^2 - 3x - 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } x_1 = 4 \text{ (舍去)}, \quad x_2 = -\frac{4}{11};$$

②当 M 点在 x 轴的上方时, 如图所示, 过点 Q 作 $QG \perp MB$ 于点 G , 过点 G 作 $PF \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 F ,

过点 B 作 $PB \perp FP$ 于点 P ,



同理可得 $\triangle FGQ \sim \triangle PBG$,

$$\therefore \frac{FG}{PB} = \frac{FQ}{PG} = \frac{QG}{GB} = \frac{1}{3},$$

设 $FG = b$, 则 $PB = 3b$,

$$\therefore FP = 4,$$

$$\therefore GP = 4 - b, \quad FQ = \frac{4 - b}{3},$$

$$\therefore FQ = PB + 1,$$

$$\therefore \frac{4 - b}{3} = 3b + 1,$$

$$\text{解得: } b = \frac{1}{10},$$

$$\therefore G\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right),$$

设直线 MB 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\text{代入 } G\left(\frac{1}{10}, \frac{3}{10}\right), \quad B(4, 0) \text{ 得: } \begin{cases} \frac{1}{10}m + n = \frac{3}{10} \\ 4m + n = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m = -\frac{1}{13} \\ n = \frac{4}{13} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } MB \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{13}x + \frac{4}{13},$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{13}x + \frac{4}{13} \\ y = x^2 - 3x - 4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } x_1 = 4 \text{ (舍去)}, \quad x_2 = -\frac{14}{13},$$

综上所述， M 的横坐标为 $-\frac{4}{11}$ 或 $-\frac{14}{13}$.

【点睛】 本题考查了二次函数综合运用，待定系数法求一次函数解析式，相似三角形的性质与判定，全等三角形的性质与判定，旋转的性质等知识，熟练掌握以上知识是解题的关键.

