

2023 年广西初中学业水平考试

数 学

(全卷满分 120 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上.
2. 考生作答时, 请在答题卡上作答 (答题注意事项见答题卡), 在本试卷、草稿纸上作答无效.
3. 不能使用计算器.
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分. 在每小题给出的四个选项中只有一项是符合要求的, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.)

1. 若零下 2 摄氏度记为 -2°C , 则零上 2 摄氏度记为 ()

A. -2°C B. 0°C C. $+2^{\circ}\text{C}$ D. $+4^{\circ}\text{C}$

【答案】C

【解析】

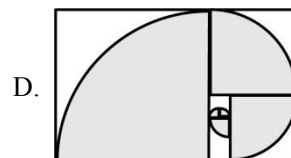
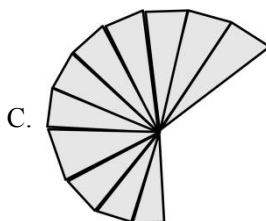
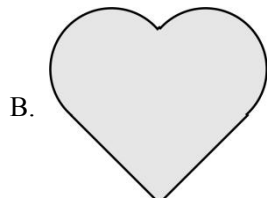
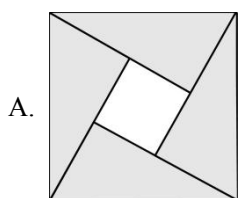
【分析】根据正负数的实际意义可进行求解.

【详解】解: 由题意可知零上 2 摄氏度记为 $+2^{\circ}\text{C}$;

故选 C.

【点睛】本题主要考查正负数的意义, 熟练掌握正负数的意义是解题的关键.

2. 下列数学经典图形中, 是中心对称图形的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】根据中心对称图形的概念: 一个图形如果绕某个点旋转 180° 后能与原图形完全重合的图形; 由此问题可求解.

【详解】解: 选项中符合中心对称图形的只有 A 选项;

故选 A.

【点睛】本题主要考查中心对称图形的识别, 熟练掌握中心对称图形的概念是解题的关键.

3. 若分式 $\frac{1}{x+1}$ 有意义, 则 x 的取值范围是 ()

A. $x \neq -1$

B. $x \neq 0$

C. $x \neq 1$

D. $x \neq 2$

【答案】A

【解析】

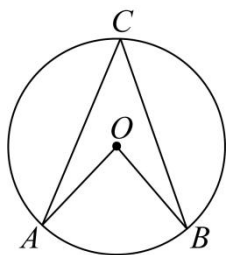
【分析】根据分式有意义的条件可进行求解.

【详解】解：由题意得： $x+1 \neq 0$,

$$\therefore x \neq -1;$$

故选 A.

【点睛】本题主要考查分式有意义的条件，熟练掌握分式有意义的条件是解题的关键.

4. 如图，点 A 、 B 、 C 在 $\odot O$ 上， $\angle C = 40^\circ$ ，则 $\angle AOB$ 的度数是 ()

A. 50°

B. 60°

C. 70°

D. 80°

【答案】D

【解析】

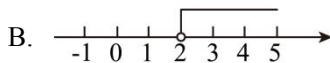
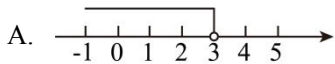
【分析】根据圆周角定理的含义可得答案.

【详解】解： $\because \angle C = 40^\circ$,

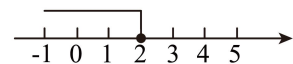
$$\therefore \angle AOB = 2\angle C = 80^\circ,$$

故选：D.

【点睛】本题考查的是圆周角定理的应用，熟记圆周角定理是解题的关键.

5. $x \leq 2$ 在数轴上表示正确的是 ()

C.

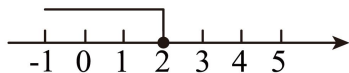


【答案】C

【解析】

【分析】在数轴上表示不等式的解集，需要确定“边界点”：若边界点是不等式的解，则用实心圆点，若边界点不是不等式的解，则用空心圆圈；确定“方向”：对边界点 a 而言， $x > a$ 或 $x \geq a$ 向右画， $x < a$ 或 $x \leq a$ 向左画.

【详解】解： $x \leq 2$ 在数轴上表示为：



故选：C.

【点睛】本题考查了在数轴上表示不等式的解集，熟知表示的方法是解题的关键.

6. 甲、乙、丙、丁四名同学参加立定跳远训练，他们成绩的平均数相同，方差如下： $S_{\text{甲}}^2 = 2.1$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 3.5$ ， $S_{\text{丙}}^2 = 9$ ， $S_{\text{丁}}^2 = 0.7$ ，则成绩最稳定的是（ ）

- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【答案】D

【解析】

【分析】根据方差可进行求解.

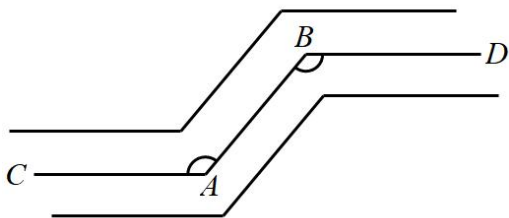
【详解】解：由题意得： $S_{\text{丁}}^2 < S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{乙}}^2 < S_{\text{丙}}^2$ ；

$\therefore$ 成绩最稳定的是丁；

故选 D.

【点睛】本题主要考查方差，熟练掌握方差是解题的关键.

7. 如图，一条公路两次转弯后又回到与原来相同的方向，如果 $\angle A = 130^\circ$ ，那么 $\angle B$ 的度数是（ ）



- A. 160° B. 150° C. 140° D. 130°

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意得到 $AC \parallel BD$ ，即可得到 $\angle B = \angle A = 130^\circ$.

【详解】解： $\because$ 公路两次转弯后又回到与原来相同的方向，

$\therefore AC \parallel BD$ ，

$\therefore \angle B = \angle A = 130^\circ$.

故选：D

【点睛】本题考查了平行线的性质“两直线平行，内错角相等”，熟知平行线的性质定理，根据题意得到 $AC \parallel BD$ 是解题关键.

8. 下列计算正确的是 ()

A. $a^3 + a^4 = a^7$ B. $a^3 \cdot a^4 = a^7$ C. $a^4 \div a^3 = a^7$ D. $(a^3)^4 = a^7$

【答案】B

【解析】

【分析】根据合并同类项，同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方进行计算即可.

【详解】A. $a^3 + a^4 \neq a^7$ ，故该选项不符合题意；

B. $a^3 \cdot a^4 = a^7$ ，故该选项符合题意；

C. $a^4 \div a^3 = a \neq a^7$ ，故该选项不符合题意；

D. $(a^3)^4 = a^{12} \neq a^7$ ，故该选项不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题考查了合并同类项，同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，熟练掌握以上运算法则是解题的关键.

9. 将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 3 个单位，再向上平移 4 个单位，得到的抛物线是 ()

A. $y = (x-3)^2 + 4$ B. $y = (x+3)^2 + 4$

C. $y = (x+3)^2 - 4$ D. $y = (x-3)^2 - 4$

【答案】A

【解析】

【分析】根据“左加右减，上加下减”的法则进行解答即可.

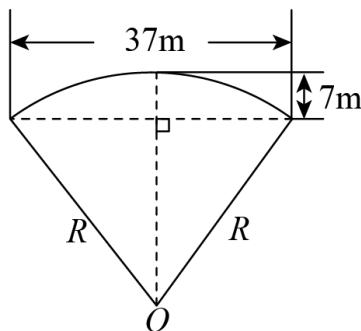
【详解】解：将抛物线 $y = x^2$ 向右平移 3 个单位，再向上平移 4 个单位，得到的抛物线的函数表达式为：

$$y = (x-3)^2 + 4.$$

故选：A.

【点睛】本题考查了二次函数图象的平移，熟知二次函数图象平移的法则是解答此题的关键.

10. 赵州桥是当今世界上建造最早，保存最完整的中国古代单孔敞肩石拱桥.如图，主桥拱呈圆弧形，跨度约为 37m，拱高约为 7m，则赵州桥主桥拱半径 R 约为 ()



- A. 20m B. 28m C. 35m D. 40m

【答案】B

【解析】

【分析】由题意可知， $AB = 37\text{m}$ ， $CD = 7\text{m}$ ，主桥拱半径 R ，根据垂径定理，得到 $AD = \frac{37}{2}\text{m}$ ，再利用勾股定理列方程求解，即可得到答案.

【详解】解：如图，由题意可知， $AB = 37\text{m}$ ， $CD = 7\text{m}$ ，主桥拱半径 R ，

$$\therefore OD = OC - CD = (R - 7)\text{m},$$

$\because OC$ 是半径，且 $OC \perp AB$ ，

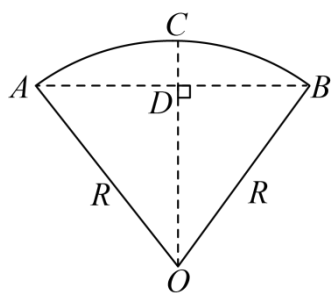
$$\therefore AD = BD = \frac{1}{2}AB = \frac{37}{2}\text{m},$$

在 $\text{Rt} \triangle ADO$ 中， $AD^2 + OD^2 = OA^2$ ，

$$\therefore \left(\frac{37}{2}\right)^2 + (R - 7)^2 = R^2,$$

$$\text{解得：} R = \frac{1565}{56} \approx 28\text{m},$$

故选 B



【点睛】本题考查了垂径定理，勾股定理，利用直角三角形求解是解题关键.

11. 据国家统计局发布的《2022 年国民经济和社会发展统计公报》显示，2020 年和 2022 年全国居民人均可支配收入分别为 3.2 万元和 3.7 万元. 设 2020 年至 2022 年全国居民人均可支配收入的年平均增长率为 x ，依题意可列方程为 ()

- A. $3.2(1-x)^2 = 3.7$ B. $3.2(1+x)^2 = 3.7$

C. $3.7(1-x)^2 = 3.2$

D. $3.7(1+x)^2 = 3.2$

【答案】B

【解析】

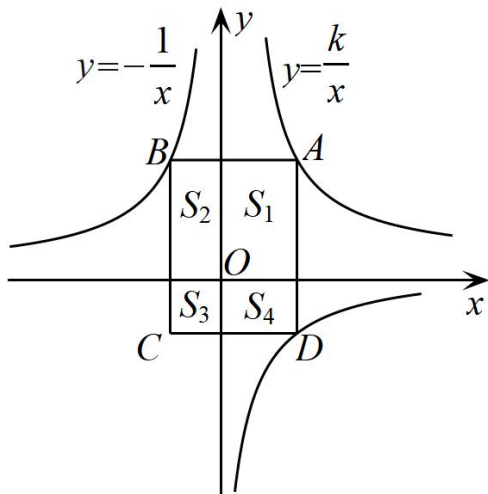
【分析】设 2020 年至 2022 年全国居民人均可支配收入的年平均增长率为 x ，根据题意列出一元二次方程即可.

【详解】设 2020 年至 2022 年全国居民人均可支配收入的年平均增长率为 x ，
根据题意得， $3.2(1+x)^2 = 3.7$.

故选：B.

【点睛】本题考查了一元二次方程的应用，根据题意列出一元二次方程是解题的关键.

12. 如图，过 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上点 A ，分别作 x 轴， y 轴的平行线交 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象于 B, D 两点，以 AB, AD 为邻边的矩形 $ABCD$ 被坐标轴分割成四个小矩形，面积分别记为 S_1, S_2, S_3, S_4 ，若 $S_2 + S_3 + S_4 = \frac{5}{2}$ ，则 k 的值为（ ）



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】C

【解析】

【分析】设 $A(a, b)$ ，则 $B\left(-\frac{1}{b}, b\right)$ ， $D\left(a, -\frac{1}{a}\right)$ ， $C\left(-\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}\right)$ ，根据坐标求得 $S_1 = ab = k$ ， $S_2 = S_4 = 1$ ，
推得 $S_3 = \left(-\frac{1}{b}\right) \times \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2}$ ，即可求得.

【详解】设 $A(a, b)$ ，则 $B\left(-\frac{1}{b}, b\right)$ ， $D\left(a, -\frac{1}{a}\right)$ ， $C\left(-\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}\right)$

$\therefore$ 点 A 在 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象上

$$\text{则 } S_1 = ab = k,$$

同理 $\therefore B, D$ 两点在 $y = -\frac{1}{x}$ 的图象上,

$$\text{则 } S_2 = S_4 = 1$$

$$\text{故 } S_3 = \frac{5}{2} - 1 - 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \therefore S_3 = \left(-\frac{1}{b}\right) \times \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{ab} = \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } ab = 2,$$

$$\therefore k = 2,$$

故选: C.

【点睛】本题考查了反比例函数的性质, 矩形的面积公式等, 熟练掌握反比例函数的性质是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 2 分, 共 12 分.)

13. 化简: $\sqrt{9} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】3

【解析】

【分析】根据算术平方根的概念求解即可.

【详解】解: 因为 $3^2 = 9$,

所以 $\sqrt{9} = 3$.

故答案为: 3.

【点睛】此题主要考查了算术平方根的意义, 关键是确定被开方数是哪个正数的平方.

14. 分解因式: $a^2 + 5a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $a(a+5)$

【解析】

【分析】提取公因式 a 进行分解即可.

【详解】 $a^2 + 5a = a(a+5)$.

故答案是: $a(a+5)$.

【点睛】考查了因式分解-提公因式法: 如果一个多项式的各项有公因式, 可以把这个公因式提出来, 从而

将多项式化成两个因式乘积的形式，这种分解因式的方法叫做提公因式法.

15. 函数 $y = kx + 3$ 的图象经过点 $(2, 5)$ ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 1

【解析】

【分析】把点 $(2, 5)$ 代入函数解析式进行求解即可.

【详解】解：由题意可把点 $(2, 5)$ 代入函数解析式得： $2k + 3 = 5$ ，

解得： $k = 1$ ；

故答案为 1.

【点睛】本题主要考查一次函数的图象与性质，熟练掌握一次函数的图象与性质是解题的关键.

16. 某班开展“梦想未来、青春有我”主题班会，第一小组有 2 位男同学和 3 位女同学，现从中随机抽取 1 位同学分享个人感悟，则抽到男同学的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $\frac{2}{5}$ 或 0.4

【解析】

【分析】根据概率公式，即可解答.

【详解】解：抽到的同学总共有 5 种等可能情况，

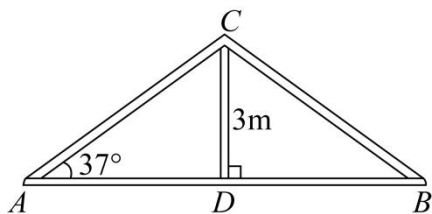
抽到男同学总共有 2 种可能情况，

故抽到男同学的概率是 $\frac{2}{5}$ ，

故答案为： $\frac{2}{5}$.

【点睛】本题考查了根据概率公式求概率，熟知概率公式是解题的关键.

17. 如图，焊接一个钢架，包括底角为 37° 的等腰三角形外框和 3m 高的支柱，则共需钢材约 $\underline{\hspace{2cm}}$ m (结果取整数). (参考数据： $\sin 37^\circ \approx 0.60$ ， $\cos 37^\circ \approx 0.80$ ， $\tan 37^\circ \approx 0.75$)



【答案】 21

【解析】

【分析】根据解直角三角形及等腰三角形的性质可进行求解.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，且 $CD \perp AB$ ，

$$\therefore AD = BD,$$

$$\therefore CD = 3\text{m},$$

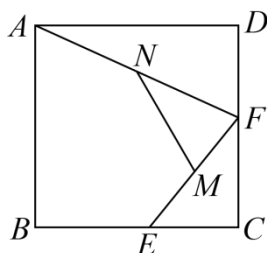
$$\therefore AC = BC = \frac{CD}{\sin 37^\circ} = 5\text{m}, AD = BD = \frac{CD}{\tan 37^\circ} = 4\text{m},$$

$$\therefore \text{共需钢材约为 } 2AC + 2AD + CD = 21\text{m};$$

故答案为 21.

【点睛】 本题主要考查解直角三角形，熟练掌握三角函数是解题的关键.

18. 如图，在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中， E ， F 分别是 BC ， CD 上的动点， M ， N 分别是 EF ， AF 的中点，则 MN 的最大值为_____.



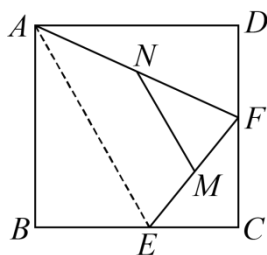
【答案】 $\sqrt{2}$

【解析】

【分析】 首先证明出 MN 是 $\triangle AEF$ 的中位线，得到 $MN = \frac{1}{2}AE$ ，然后由正方形的性质和勾股定理得到

$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + BE^2}$ ，证明出当 BE 最大时， AE 最大，此时 MN 最大，进而得到当点 E 和点 C 重合时， BE 最大，即 BC 的长度，最后代入求解即可.

【详解】 如图所示，连接 AE ，



$\therefore M$ ， N 分别是 EF ， AF 的中点，

$\therefore MN$ 是 $\triangle AEF$ 的中位线，

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AE,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{4 + BE^2},$$

$\therefore$ 当 BE 最大时, AE 最大, 此时 MN 最大,

$\therefore$ 点 E 是 BC 上的动点,

$\therefore$ 当点 E 和点 C 重合时, BE 最大, 即 BC 的长度,

$$\therefore \text{此时 } AE = \sqrt{4 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}AE = \sqrt{2},$$

$\therefore MN$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

故答案为: $\sqrt{2}$.

【点睛】此题考查了正方形的性质, 三角形中位线的性质, 勾股定理等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 72 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

19. 计算: $(-1) \times (-4) + 2^2 \div (7-5)$.

【答案】6

【解析】

【分析】根据有理数的混合运算法则求解即可.

【详解】 $(-1) \times (-4) + 2^2 \div (7-5)$

$$= 4 + 4 \div 2$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6.$$

【点睛】本题主要考查了含乘方的有理数混合计算, 熟知相关计算法则是解题的关键.

20. 解分式方程: $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}$.

【答案】 $x = -1$

【解析】

【分析】去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

【详解】解: $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x}$

去分母得, $2x = x - 1$

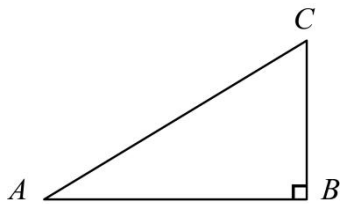
移项, 合并得, $x = -1$

检验: 当 $x = -1$ 时, $x(x-1) = 2 \neq 0$,

所以原分式方程的解为 $x = -1$.

【点睛】此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解，解分式方程一定要注意要验根.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle B = 90^\circ$.



(1) 在斜边 AC 上求作线段 AO ，使 $AO = BC$ ，连接 OB ；

(要求：尺规作图并保留作图痕迹，不写作法，标明字母)

(2) 若 $OB = 2$ ，求 AB 的长.

【答案】(1) 图见详解

(2) $AB = 2\sqrt{3}$

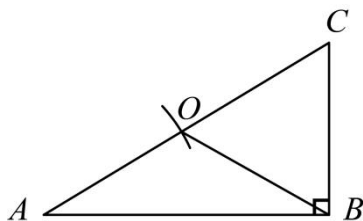
【解析】

【分析】(1) 以 A 为圆心， BC 长为半径画弧，交 AC 于点 O ，则问题可求解；

(2) 根据含 30° 度直角三角形的性质可得 $AC = 2BC$ ，则有 $OC = AO$ ，进而问题可求解.

【小问 1 详解】

解：所作线段 AO 如图所示：



【小问 2 详解】

解： $\because \angle A = 30^\circ$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$\therefore AC = 2BC$ ，

$\because AO = BC$ ，

$\therefore AC = 2AO$ ，

$\therefore OC = AO$ ，即点 O 为 AC 的中点，

$\because OB = 2$ ，

$\therefore AC = 2OB = 4$ ，

$\therefore BC = 2$ ，

$\therefore AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = 2\sqrt{3}$.

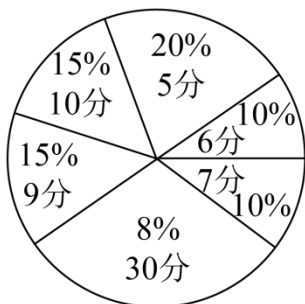
【点睛】本题主要考查含 30 度直角三角形的性质、直角三角形斜边中线定理及勾股定理，熟练掌握含 30 度直角三角形的性质、直角三角形斜边中线定理及勾股定理是解题的关键.

22. 4 月 24 日是中国航天日，为激发青少年崇尚科学、探索未知的热情，航阳中学开展了“航空航天”知识问答系列活动.为了解活动效果，从七、八年级学生的知识问答成绩中，各随机抽取 20 名学生的成绩进行统计分析（6 分及 6 分以上为合格），数据整理如下：

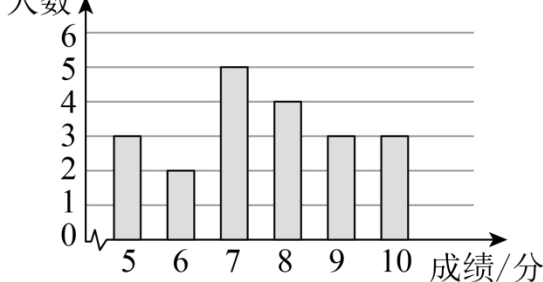
学生成绩统计表

	七年级	八年级
平均数	7.55	7.55
中位数	8	c
众数	a	7
合格率	b	85%

七年级学生成绩统计图



八年级学生成绩统计图



根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 写出统计表中 a , b , c 的值；
- (2) 若该校八年级有 600 名学生，请估计该校八年级学生成绩合格的人数；
- (3) 从中位数和众数中任选其一，说明其在本题中的实际意义.

【答案】(1) $a = 8$, $b = 80\%$, $c = 7.5$

- (2) 510 人
- (3) 用中位数的特征可知七，八年级学生成绩的集中趋势，表示了七，八年级学生成绩数据的中等水平.

【解析】

【分析】(1) 根据中位数，众数的定义求解即可，根据合格率=合格人数÷总人数即可求得；

(2) 根据八年级抽取人数的合格率进行求解即可；

(3) 根据中位数和众数的特征进行说明即可.

【小问 1 详解】

根据八年级的成绩分布可得：5分的有3人，6分的有2人，7分的有5人，8分的有4人，9分的有3人，10分的有3人，

$$\text{故中位数是 } \frac{7+8}{2} = 7.5,$$

根据扇形统计图可得：5分的有 $20 \times 20\% = 4$ 人，6分的有 $20 \times 10\% = 2$ 人，7分的有 $20 \times 10\% = 2$ 人，8分的有 $20 \times 30\% = 6$ 人，9分的有 $20 \times 15\% = 3$ 人，10分的有 $20 \times 15\% = 3$ 人，

故众数是 8，

合格人数为： $2 + 2 + 6 + 3 + 3 = 16$ 人，

$$\text{故合格率为： } \frac{16}{20} = 80\%,$$

故 $a = 8$ ， $b = 80\%$ ， $c = 7.5$ 。

【小问 2 详解】

八年级学生成绩合格的人数为： $600 \times 85\% = 510$ 人，

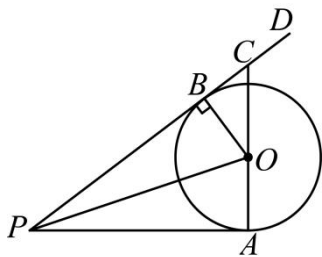
即若该校八年级有 600 名学生，该校八年级学生成绩合格的人数有 510 人。

【小问 3 详解】

根据中位数的特征可知七，八年级学生成绩的集中趋势和七，八年级学生成绩数据的中等水平。

【点睛】本题考查了中位数，众数，合格率，用样本估计总体等，熟练掌握中位数和众数的定义是解题关键。

23. 如图， PO 平分 $\angle APD$ ， PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ，延长 AO 交 PD 于点 C ，过点 O 作 $OB \perp PD$ ，垂足为 B 。



(1) 求证： PB 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\odot O$ 的半径为 4， $OC = 5$ ，求 PA 的长。

【答案】(1) 见解析 (2) $AP = 12$

【解析】

【分析】(1) 首先根据切线的性质得到 $OA \perp PA$ ，然后根据角平分线的性质定理得到 $OA = OB$ 即可证明；

(2) 首先根据勾股定理得到 $BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = 3$ ，然后求得 $AC = OA + OC = 4 + 5 = 9$ ，最后利用

$\tan \angle BCO = \tan \angle ACP$ ，代入求解即可.

【小问 1 详解】

$\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A ,

$\therefore OA \perp PA$,

$\because PO$ 平分 $\angle APD$, $OB \perp PD$,

$\therefore OA = OB$,

$\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线;

【小问 2 详解】

$\because \odot O$ 的半径为 4,

$\therefore OA = OB = 4$,

$\because OB \perp PD$, $OC = 5$,

$\therefore BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = 3$, $AC = OA + OC = 4 + 5 = 9$,

$\because \angle BCO = \angle ACP$,

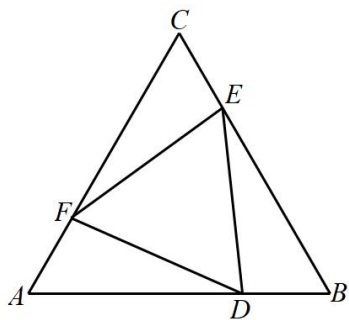
$\therefore \tan \angle BCO = \tan \angle ACP$,

$\therefore \frac{BO}{BC} = \frac{AP}{AC}$, 即 $\frac{4}{3} = \frac{AP}{9}$,

$\therefore AP = 12$.

【点睛】此题考查了圆切线的性质和判定，勾股定理，三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

24. 如图, $\triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形, 点 D, E, F 分别在边 AB, BC, CA 上运动, 满足 $AD = BE = CF$.



(1) 求证: $\triangle ADF \cong \triangle BED$;

(2) 设 AD 的长为 x , $\triangle DEF$ 的面积为 y , 求 y 关于 x 的函数解析式;

(3) 结合 (2) 所得的函数, 描述 $\triangle DEF$ 的面积随 AD 的增大如何变化.

【答案】(1) 见详解 (2) $y = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2 - 3\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$

(3) 当 $2 < x < 4$ 时, $\triangle DEF$ 的面积随 AD 的增大而增大, 当 $0 < x < 2$ 时, $\triangle DEF$ 的面积随 AD 的增大而

减小

【解析】

【分析】(1) 由题意易得 $AF = BD$, $\angle A = \angle B = 60^\circ$, 然后根据“SAS”可进行求证;

(2) 分别过点 C, F 作 $CH \perp AB$, $FG \perp AB$, 垂足分别为点 H, G , 根据题意可得 $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{3}$, $AF = 4 - x$,

然后可得 $FG = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x)$, 由 (1) 易得 $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$, 则有

$$S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BED} = S_{\triangle CFE} = \frac{\sqrt{3}}{4}x(4 - x), \text{ 进而问题可求解;}$$

(3) 由 (2) 和二次函数的性质可进行求解.

【小问 1 详解】

证明: $\because \triangle ABC$ 是边长为 4 的等边三角形,

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ, \quad AB = BC = AC = 4,$$

$$\therefore AD = BE = CF,$$

$$\therefore AF = BD = CE,$$

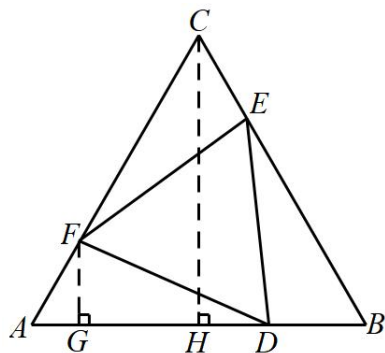
在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases} AF = BD \\ \angle A = \angle B \\ AD = BE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BED (\text{SAS});$$

【小问 2 详解】

解: 分别过点 C, F 作 $CH \perp AB$, $FG \perp AB$, 垂足分别为点 H, G , 如图所示:



在等边 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \angle B = \angle ACB = 60^\circ$, $AB = BC = AC = 4$,

$$\therefore CH = AC \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH = 4\sqrt{3},$$

设 AD 的长为 x , 则 $AD = BE = CF = x$, $AF = 4 - x$,

$$\therefore FG = AF \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}(4 - x),$$

$$\therefore S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} AD \cdot FG = \frac{\sqrt{3}}{4} x(4 - x),$$

同理 (1) 可知 $\triangle ADF \cong \triangle BED \cong \triangle CFE$,

$$\therefore S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BED} = S_{\triangle CFE} = \frac{\sqrt{3}}{4} x(4 - x),$$

$\therefore \triangle DEF$ 的面积为 y ,

$$\therefore y = S_{\triangle ABC} - 3S_{\triangle ADF} = 4\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} x(4 - x) = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 - 3\sqrt{3}x + 4\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

解: 由 (2) 可知: $y = \frac{3\sqrt{3}}{4} x^2 - 3\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$,

$$\therefore a = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 0, \text{ 对称轴为直线 } x = -\frac{-3\sqrt{3}}{2 \times \frac{3\sqrt{3}}{4}} = 2,$$

$\therefore$ 当 $x > 2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x < 2$ 时, y 随 x 的增大而减小;

即当 $2 < x < 4$ 时, $\triangle DEF$ 的面积随 AD 的增大而增大, 当 $0 < x < 2$ 时, $\triangle DEF$ 的面积随 AD 的增大而减小.

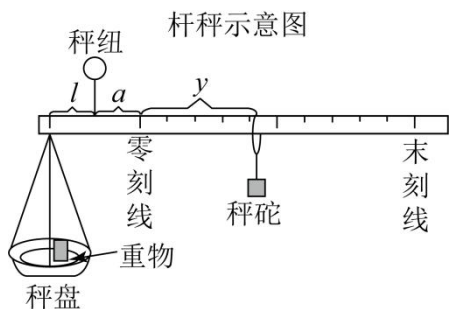
【点睛】本题主要考查锐角三角函数、二次函数的综合及等边三角形的性质, 熟练掌握锐角三角函数、二次函数的综合及等边三角形的性质是解题的关键.

25. 【综合与实践】

有言道: “杆秤一头称起人间生计, 一头称起天地良心”. 某兴趣小组将利用物理学中杠杆原理制作简易杆秤. 小组先设计方案, 然后动手制作, 再结合实际进行调试, 请完成下列方案设计中的任务.

【知识背景】如图, 称重物时, 移动秤砣可使杆秤平衡, 根据杠杆原理推导得: $(m_0 + m) \cdot l = M \cdot (a + y)$.

其中秤盘质量 m_0 克, 重物质量 m 克, 秤砣质量 M 克, 秤纽与秤盘的水平距离为 l 厘米, 秤纽与零刻线的水平距离为 a 厘米, 秤砣与零刻线的水平距离为 y 厘米.



【方案设计】

目标：设计简易杆秤. 设定 $m_0 = 10$, $M = 50$, 最大可称重物质量为 1000 克, 零刻线与末刻线的距离定为 50 厘米.

任务一：确定 l 和 a 的值.

- (1) 当秤盘不放重物, 秤砣在零刻线时, 杆秤平衡, 请列出关于 l , a 的方程;
- (2) 当秤盘放入质量为 1000 克的重物, 秤砣从零刻线移至末刻线时, 杆秤平衡, 请列出关于 l , a 的方程;
- (3) 根据 (1) 和 (2) 所列方程, 求出 l 和 a 的值.

任务二：确定刻线的位置.

- (4) 根据任务一, 求 y 关于 m 的函数解析式;
- (5) 从零刻线开始, 每隔 100 克在秤杆上找到对应刻线, 请写出相邻刻线间的距离.

【答案】(1) $l = 5a$

(2) $101l - 5a = 250$

(3) $l = 2.5, a = 0.5$

(4) $y = \frac{1}{20}m$

(5) 相邻刻线间的距离为 5 厘米

【解析】

【分析】(1) 根据题意可直接进行求解;

(2) 根据题意可直接代值求解;

(3) 由 (1) (2) 可建立二元一次方程组进行求解;

(4) 根据 (3) 可进行求解;

(5) 分别把 $m = 0$, $m = 100$, $m = 200$, $m = 300$, $m = 400$, $m = 500$, $m = 600$, $m = 700$, $m = 800$, $m = 900$, $m = 1000$ 代入求解, 然后问题可求解.

【小问 1 详解】

解：由题意得： $m = 0, y = 0$,

$$\therefore 10l = 50a,$$

$$\therefore l = 5a;$$

【小问 2 详解】

解：由题意得： $m = 1000, y = 50$,

$$\therefore (10 + 1000)l = 50(a + 50),$$

$$\therefore 101l - 5a = 250;$$

【小问 3 详解】

$$\text{解：由 (1) (2) 可得：} \begin{cases} l = 5a \\ 101l - 5a = 250 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} l = 2.5 \\ a = 0.5 \end{cases};$$

【小问 4 详解】

解：由任务一可知： $l = 2.5, a = 0.5$,

$$\therefore 2.5(10 + m) = 50(0.5 + y),$$

$$\therefore y = \frac{1}{20}m;$$

【小问 5 详解】

解：由 (4) 可知 $y = \frac{1}{20}m$,

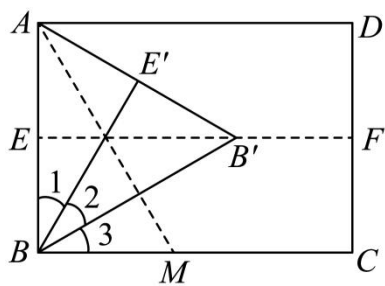
$\therefore$ 当 $m = 0$ 时，则有 $y = 0$ ；当 $m = 100$ 时，则有 $y = 5$ ；当 $m = 200$ 时，则有 $y = 10$ ；当 $m = 300$ 时，则有 $y = 15$ ；当 $m = 400$ 时，则有 $y = 20$ ；当 $m = 500$ 时，则有 $y = 25$ ；当 $m = 600$ 时，则有 $y = 30$ ；当 $m = 700$ 时，则有 $y = 35$ ；当 $m = 800$ 时，则有 $y = 40$ ；当 $m = 900$ 时，则有 $y = 45$ ；当 $m = 1000$ 时，则有 $y = 50$ ；
 $\therefore$ 相邻刻线间的距离为 5 厘米.

【点睛】 本题主要考查一次函数的应用，解题的关键是理解题意.

26. 【探究与证明】

折纸，操作简单，富有数学趣味，我们可以通过折纸开展数学探究，探索数学奥秘.

【动手操作】如图 1，将矩形纸片 $ABCD$ 对折，使 AD 与 BC 重合，展平纸片，得到折痕 EF ；折叠纸片，使点 B 落在 EF 上，并使折痕经过点 A ，得到折痕 AM ，点 B, E 的对应点分别为 B', E' ，展平纸片，连接 AB', BB', BE' .

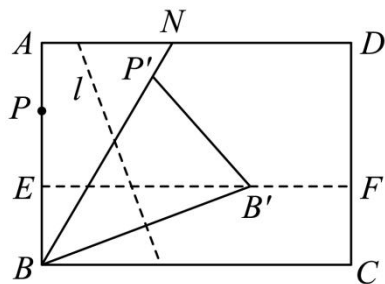


(图1)

请完成:

- (1) 观察图 1 中 $\angle 1$, $\angle 2$ 和 $\angle 3$, 试猜想这三个角的大小关系;
- (2) 证明 (1) 中的猜想;

【类比操作】 如图 2, N 为矩形纸片 $ABCD$ 的边 AD 上的一点, 连接 BN , 在 AB 上取一点 P , 折叠纸片, 使 B, P 两点重合, 展平纸片, 得到折痕 EF ; 折叠纸片, 使点 B, P 分别落在 EF, BN 上, 得到折痕 l , 点 B, P 的对应点分别为 B', P' , 展平纸片, 连接, $P'B'$.



(图2)

请完成:

- (3) 证明 BB' 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线.

【答案】 (1) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$

(2) 见详解 (3) 见详解

【解析】

【分析】 (1) 根据题意可进行求解;

(2) 由折叠的性质可知 $AB' = BB'$, $AB = AB'$, 然后可得 $AB' = BB' = AB$, 则有 $\triangle ABB'$ 是等边三角形, 进而问题可求证;

(3) 连接 PB' , 根据等腰三角形性质证明 $\angle PB'E = \angle BB'E = \frac{1}{2} \angle BB'P$, 根据平行线的性质证明

$\angle BB'E = \angle CBB' = \frac{1}{2} \angle BB'P$, 证明 $\triangle PBB' \cong \triangle P'B'B$ (SAS), 得出 $\angle P'BB' = \angle PB'B$, 即可证明

$$\angle CBB' = \frac{1}{3} \angle CBN.$$

【小问 1 详解】

解: 由题意可知 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$;

【小问 2 详解】

证明: 由折叠的性质可得: $AB' = BB'$, $AB = AB'$, $AE = AE'$, $AE = BE$,

$$\therefore AB' = BB' = AB, \quad AE' = B'E',$$

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形,

$$\because AE' = B'E', \quad \angle ABB' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE' = \angle B'BE' = \frac{1}{2} \angle ABB' = 30^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

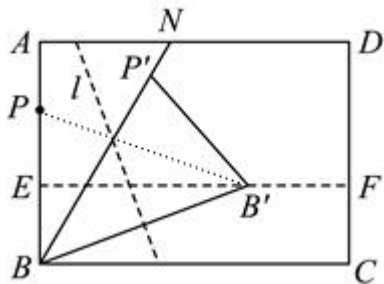
$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3;$$

【小问 3 详解】

证明：连接 PB' ，如图所示：



由折叠的性质可知: $BB' = PB'$, $PB = P'B'$, $\angle PBB' = \angle P'B'B$,

 $\therefore$ 折痕 $B'E \perp AB$, $BB' = PB'$,

$$\therefore \angle PB'E = \angle BB'E = \frac{1}{2} \angle BB'P,$$

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形,

$$\therefore \angle EBC = 90^\circ,$$

$$\therefore CB \perp AB,$$

$$\because B'E \perp AB,$$

$$\therefore B'E \parallel BC,$$

$$\therefore \angle BB'E = \angle CBB' = \frac{1}{2} \angle BB'P,$$

$\therefore$ 在 $\triangle PBB'$ 和 $\triangle P'B'B$ 中,

$$\begin{cases} PB = P'B' \\ \angle PBB' = \angle P'B'B, \\ BB' = B'B \end{cases}$$

$$\therefore \triangle PBB' \cong \triangle P'B'B (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle P'BB' = \angle PB'B,$$

$$\therefore \angle CBB' = \frac{1}{2} \angle NBB',$$

$$\therefore \angle CBB' = \frac{1}{3} \angle CBN,$$

$\therefore BB'$ 是 $\angle NBC$ 的一条三等分线.

【点睛】 本题主要考查折叠的性质、线段垂直平分线的性质、等腰三角形的性质与判定及矩形的性质，三角形全等的判定和性质，作出辅助线，熟练掌握折叠的性质，证明， $\triangle PBB' \cong \triangle P'B'B$ 是解题的关键.

