

2023 年深圳市初中学业水平测试（回忆版）

数学学科试卷

一、选择题

1. 如果 $+10^{\circ}\text{C}$ 表示零上 10 度，则零下 8 度表示（ ）

- A. $+8^{\circ}\text{C}$ B. -8°C C. $+10^{\circ}\text{C}$ D. -10°C

【答案】B

【解析】

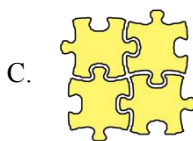
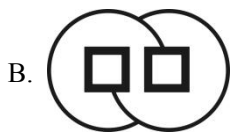
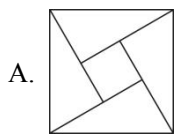
【分析】根据“负数是与正数互为相反意义的量”即可得出答案.

【详解】解：因为 $+10^{\circ}\text{C}$ 表示零上 10 度，
所以零下 8 度表示 “ -8°C ” .

故选 B

【点睛】本题考查正负数的意义，属于基础题，解题的关键在于理解负数的意义.

2. 下列图形中，为轴对称的图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【详解】解：A、不是轴对称图形，故本选项不符合题意；
B、不是轴对称图形，故本选项不符合题意；
C、不是轴对称图形，故本选项不符合题意；
D、是轴对称图形，故本选项符合题意.

故选：D.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形，解决问题的关键是熟练掌握轴对称图形的概念，轴对称图形概念，一个图形沿着一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就是轴对称图形.

3. 深中通道是世界级“桥、岛、隧、水下互通”跨海集群工程，总计用了 320000 万吨钢材，320000 这个数用科学记数法表示为（ ）

- A. 0.32×10^6 B. 3.2×10^5 C. 3.2×10^9 D. 32×10^8

【答案】B

【解析】

【分析】根据科学记数法的表示方法求解即可.

【详解】 $320000 = 3.2 \times 10^5$.

故选：B.

【点睛】本题主要考查科学记数法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 解题关键是正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 下表为五种运动耗氧情况, 其中耗氧量的中位数是 ()

打网球	跳绳	爬楼梯	慢跑	游泳
80L/h	90L/h	105L/h	110L/h	115L/h

A. 80L/h

B. 107.5L/h

C. 105L/h

D. 110L/h

【答案】C

【解析】

【分析】将数据排序后, 中间一个数就是中位数.

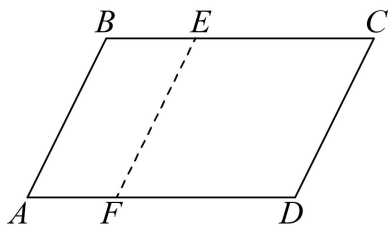
【详解】解: 由表格可知, 处在中间位置的数据为 105L/h,

$\therefore$ 中位数为 105L/h,

故选 C.

【点睛】本题考查中位数. 熟练掌握中位数的确定方法: 将数据进行排序后, 处在中间位置的一个数据或者两个数据的平均数为中位数, 是解题的关键.

5. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $BC = 6$, 将线段 AB 水平向右平移 a 个单位长度得到线段 EF , 若四边形 $ECDF$ 为菱形时, 则 a 的值为 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】首先根据平行四边形的性质得到 $CD = AB = 4$, 然后根据菱形的性质得到 $EC = CD = 4$, 然后求解即可.

【详解】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore CD = AB = 4,$$

$\because$ 四边形 $ECDF$ 为菱形,

$$\therefore EC = CD = 4,$$

$$\therefore BC = 6,$$

$$\therefore BE = BC - CE = 2,$$

$$\therefore a = 2.$$

故选: B.

【点睛】此题考查了平行四边形和菱形的性质, 平移的性质等知识, 解题的关键是熟练掌握以上知识点.

6. 下列运算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$

B. $4ab - ab = 4$

C. $(a+1)^2 = a^2 + 1$

D. $(-a^3)^2 = a^6$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法法则、合并同类项法则、完全平方公式和幂的乘方的运算法则进行计算即可.

【详解】解: $\because a^3 \cdot a^2 = a^5$, 故 A 不符合题意;

$\because 4ab - ab = 3ab$, 故 B 不符合题意;

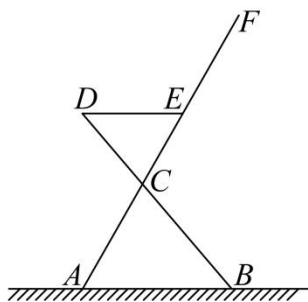
$\because (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, 故 C 不符合题意;

$\because (-a^3)^2 = a^6$, 故 D 符合题意;

故选: D.

【点睛】本题考查同底数幂的乘法法则、合并同类项法则、完全平方公式和幂的乘方的运算法则, 熟练掌握相关法则是解题的关键.

7. 如图为商场某品牌椅子的侧面图, $\angle DEF = 120^\circ$, DE 与地面平行, $\angle ABD = 50^\circ$, 则 $\angle ACB =$ ()



A. 70°

B. 65°

C. 60°

D. 50°

【答案】A

【解析】

【分析】根据平行得到 $\angle ABD = \angle EDC = 50^\circ$ ，再利用外角的性质和对顶角相等，进行求解即可.

【详解】解：由题意，得： $DE \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle ABD = \angle EDC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle DEF = \angle EDC + \angle DCE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 70^\circ;$$

故选 A.

【点睛】本题考查平行线的性质，三角形外角的性质，对顶角. 熟练掌握相关性质，是解题的关键.

8. 某运输公司运输一批货物，已知大货车比小货车每辆多运输 5 吨货物，且大货车运输 75 吨货物所用车辆数与小货车运输 50 吨货物所用车辆数相同，设有大货车每辆运输 x 吨，则所列方程正确的是 ()

A. $\frac{75}{x-5} = \frac{50}{x}$

B. $\frac{75}{x} = \frac{50}{x-5}$

C. $\frac{75}{x+5} = \frac{50}{x}$

D. $\frac{75}{x} = \frac{50}{x+5}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据“大货车运输 75 吨货物所用车辆数与小货车运输 50 吨货物所用车辆数相同”即可列出方程.

【详解】解：设有大货车每辆运输 x 吨，则小货车每辆运输 $(x-5)$ 吨，

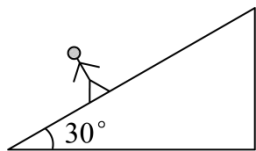
$$\text{则 } \frac{75}{x} = \frac{50}{x-5}.$$

故选 B

【点睛】本题考查分式方程的应用，理解题意准确找到等量关系是解题的关键.

9. 爬坡时坡角与水平面夹角为 α ，则每爬 1m 耗能 $(1.025 - \cos \alpha)$ J，若某人爬了 1000m，该坡角为 30° ，

则他耗能 (参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{2} \approx 1.414$) ()



A. 58J

B. 159J

C. 1025J

D. 1732J

【答案】B

【解析】

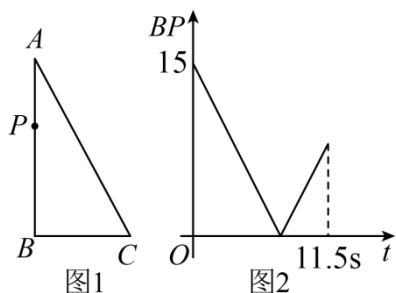
【分析】根据特殊角三角函数值计算求解.

【详解】 $1000(1.025 - \cos \alpha) = 1000(1.025 - \cos 30^\circ) = 1025 - 500\sqrt{3} \approx 1025 - 500 \times 1.732 = 159$

故选：B.

【点睛】本题考查特殊角三角函数值，掌握特殊角三角函数值是解题的关键.

10. 如图 1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，动点 P 从 A 点运动到 B 点再到 C 点后停止，速度为 2 单位/s，其中 BP 长与运动时间 t (单位：s) 的关系如图 2，则 AC 的长为 ()



A. $\frac{15\sqrt{5}}{2}$

B. $\sqrt{427}$

C. 17

D. $5\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据图象可知 $t=0$ 时，点 P 与点 A 重合，得到 $AB=15$ ，进而求出点 P 从点 A 运动到点 B 所需的时间，进而得到点 P 从点 B 运动到点 C 的时间，求出 BC 的长，再利用勾股定理求出 AC 即可.

【详解】解：由图象可知： $t=0$ 时，点 P 与点 A 重合，

$$\therefore AB = 15,$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 从点 } A \text{ 运动到点 } B \text{ 所需的时间为 } 15 \div 2 = 7.5\text{s};$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 从点 } B \text{ 运动到点 } C \text{ 的时间为 } 11.5 - 7.5 = 4\text{s},$$

$$\therefore BC = 2 \times 4 = 8;$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABC \text{ 中: } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 17;$$

故选 C.

【点睛】本题考查动点的函数图象，勾股定理. 从函数图象中有效的获取信息，求出 AB, BC 的长，是解题的关键.

二、填空题

11. 小明从《红星照耀中国》，《红岩》，《长征》，《钢铁是怎样炼成的》四本书中随机挑选一本，其中拿到《红星照耀中国》这本书的概率为_____.

【答案】 $\frac{1}{4}$ 或 0.25

【解析】

【分析】根据概率公式进行计算即可.

【详解】解：随机挑选一本书共有 4 种等可能的结果，其中拿到《红星照耀中国》这本书的结果有 1 种，

$$\therefore P = \frac{1}{4},$$

故答案为： $\frac{1}{4}$.

【点睛】本题考查概率. 熟练掌握概率公式，是解题的关键.

12. 已知实数 a, b ，满足 $a+b=6$ ， $ab=7$ ，则 a^2b+ab^2 的值为_____.

【答案】 42

【解析】

【分析】首先提取公因式，将已知整体代入求出即可.

【详解】 a^2b+ab^2

$$= ab(a+b)$$

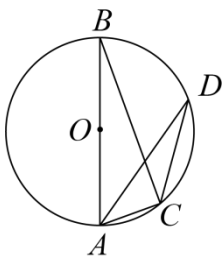
$$= 7 \times 6$$

$$= 42.$$

故答案为： 42.

【点睛】此题考查了求代数式的值，提公因式法因式分解，整体思想的应用，解题的关键是掌握以上知识点.

13. 如图，在 $\odot O$ 中， AB 为直径， C 为圆上一点， $\angle BAC$ 的角平分线与 $\odot O$ 交于点 D ，若 $\angle ADC = 20^\circ$ ，则 $\angle BAD =$ _____ $^\circ$.



【答案】 35

【解析】

【分析】由题意易得 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle ADC = \angle ABC = 20^\circ$ ，则有 $\angle BAC = 70^\circ$ ，然后问题可求解.

【详解】解： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \overline{AC} = \overline{AC}, \angle ADC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle ABC = 20^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 70^\circ,$$

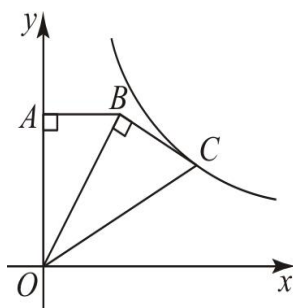
$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ;$$

故答案为 35.

【点睛】本题主要考查圆周角的性质，熟练掌握直径所对圆周角为直角是解题的关键.

14. 如图， $\text{Rt}\triangle OAB$ 与 $\text{Rt}\triangle OBC$ 位于平面直角坐标系中， $\angle AOB = \angle BOC = 30^\circ$ ， $BA \perp OA$ ， $CB \perp OB$ ，若 $AB = \sqrt{3}$ ，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 恰好经过点 C ，则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

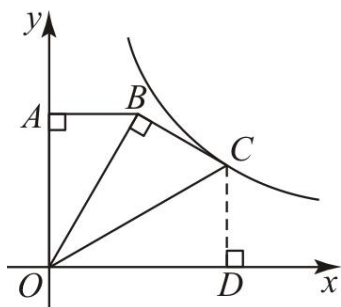


【答案】 $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D ，由题意易得 $OB = 2\sqrt{3}$ ， $BC = 2$ ， $\angle COD = 30^\circ$ ，然后根据含 30° 直角三角形的性质可进行求解.

【详解】解：过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D ，如图所示：



$$\because \angle AOB = \angle BOC = 30^\circ, BA \perp OA, CB \perp OB,$$

$$\therefore AB = \frac{1}{2} OB, BC = \frac{1}{2} OC,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = \sqrt{3},$$

$$\therefore OB = 2AB = 2\sqrt{3},$$

$$\text{在 Rt}\triangle OBC \text{ 中, } OB = \sqrt{OC^2 - BC^2} = \sqrt{3}BC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BC = 2, OC = 4,$$

$$\therefore \angle COD = 30^\circ, \angle CDO = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}OC = 2,$$

$$\therefore OD = \sqrt{3}CD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } C(2\sqrt{3}, 2),$$

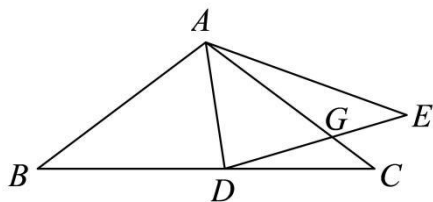
$$\therefore k = 4\sqrt{3},$$

故答案为: $4\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查反比例函数的图象与性质及含 30 度直角三角形的性质，熟练掌握反比例函数的图象与性质及含 30 度直角三角形的性质是解题的关键.

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\tan B = \frac{3}{4}$ ，点 D 为 BC 上一动点，连接 AD ，将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折

得到 $\triangle ADE$ ， DE 交 AC 于点 G ， $GE < DG$ ，且 $AG : CG = 3 : 1$ ，则 $\frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle ADG}} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\frac{49}{75}$

【解析】

【分析】 $AM \perp BD$ 于点 M ， $AN \perp DE$ 于点 N ，则 $AM = AN$ ，过点 G 作 $GP \perp BC$ 于点 P ，设 $AM = 12a$ ，根据 $\tan B = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{4}$ 得出 $BM = 16a$ ，继而求得 $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 20a$ ， $CG = 5a$ ， $AG = 15a$ ，再利用 $\tan C = \tan B = \frac{GP}{CP} = \frac{3}{4}$ ，求得 $GP = 3a$ ， $CP = 4a$ ，利用勾股定理求得 $GN = \sqrt{AG^2 - AN^2} = 9a$ ， $EN = \sqrt{AE^2 - AN^2} = 16a$ ，故 $EG = EN - GN = 7a$ ，

【详解】由折叠的性质可知， DA 是 $\angle BDE$ 的角平分线， $AB = AE$ ，用 HL 证明 $\triangle ADM \cong \triangle ADN$ ，从

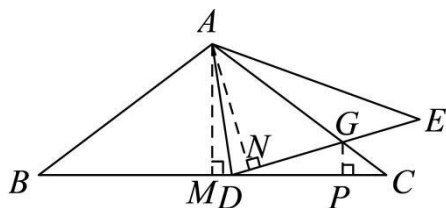
而得到 $DM = DN$ ，设 $DM = DN = x$ ，则 $DG = x + 9a$ ， $DP = 12a - x$ ，利用勾股定理得到

$DP^2 + GP^2 = DG^2$ 即 $(12a - x)^2 + (3a)^2 = (x + 9a)^2$ ，化简得 $x = \frac{12}{7}a$ ，从而得出 $DG = \frac{75}{7}a$ ，利用三角

形的面积公式得到：
$$\frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle ADG}} = \frac{\frac{1}{2}EG \cdot AN}{\frac{1}{2}DG \cdot AN} = \frac{EG}{DG} = \frac{7a}{\frac{75}{7}a} = \frac{49}{75}.$$

作 $AM \perp BD$ 于点 M ， $AN \perp DE$ 于点 N ，则 $AM = AN$ ，

过点 G 作 $GP \perp BC$ 于点 P ，



$\therefore AM \perp BD$ 于点 M ，

$$\therefore \tan B = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{4},$$

设 $AM = 12a$ ，则 $BM = 16a$ ， $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 20a$ ，

又 $\because AB = AC$ ， $AM \perp BD$ ，

$\therefore CM = AM = 12a$ ， $AB = AC = 20a$ ， $\angle B = \angle C$ ，

$\therefore AG : CG = 3 : 1$ ，即 $CG = \frac{1}{4}AC$ ，

$\therefore CG = 5a$ ， $AG = 15a$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PCG$ 中， $CG = 5a$ ， $\tan C = \tan B = \frac{GP}{CP} = \frac{3}{4}$ ，

设 $GP = 3m$ ，则 $CP = 4m$ ， $CG = \sqrt{GP^2 + CP^2} = 5m$

$\therefore m = a$

$\therefore GP = 3a$ ， $CP = 4a$ ，

$\therefore AG = 15a$ ， $AM = AN = 12a$ ， $AN \perp DE$ ，

$\therefore GN = \sqrt{AG^2 - AN^2} = 9a$ ，

$\therefore AB = AE = 20a$ ， $AN = 12a$ ， $AN \perp DE$

$\therefore EN = \sqrt{AE^2 - AN^2} = 16a$ ，

$\therefore EG = EN - GN = 7a$ ，

$\therefore AD = AD$ ， $AM = AN$ ， $AM \perp BD$ ， $AN \perp DE$ ，

$$\therefore \triangle ADM \cong \triangle ADN (\text{HL}),$$

$$\therefore DM = DN,$$

$$\text{设 } DM = DN = x, \text{ 则 } DG = DN + GN = x + 9a, \quad DP = CM - CP - DM = 16a - 4a - x = 12a - x,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDG \text{ 中, } DP^2 + GP^2 = DG^2, \text{ 即 } (12a - x)^2 + (3a)^2 = (x + 9a)^2,$$

$$\text{化简得: } x = \frac{12}{7}a,$$

$$\therefore DG = x + 9a = \frac{75}{7}a,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AGE}}{S_{\triangle ADG}} = \frac{\frac{1}{2}EG \cdot AN}{\frac{1}{2}DG \cdot AN} = \frac{EG}{DG} = \frac{7a}{\frac{75}{7}a} = \frac{49}{75}$$

$$\text{故答案是: } \frac{49}{75}.$$

【点睛】本题考查解直角三角形，折叠的性质，全等三角形的判定与性质，角平分线的性质，勾股定理等知识，正确作出辅助线并利用勾股定理列出方程是解题的关键.

三、解答题

$$16. \text{ 计算: } (1 + \pi)^0 + 2 - |-3| + 2\sin 45^\circ.$$

$$\text{【答案】 } \sqrt{2}$$

【解析】

【分析】根据零次幂及特殊三角函数值可进行求解.

$$\text{【详解】解: 原式} = 1 + 2 - 3 + 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2}.$$

【点睛】本题主要考查零次幂及特殊三角函数值，熟练掌握各个运算是解题的关键.

$$17. \text{ 先化简, 再求值: } \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}, \text{ 其中 } x=3.$$

$$\text{【答案】 } \frac{x}{x+1}, \frac{3}{4}$$

【解析】

【分析】先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再把 x 的值代入进行计算即可.

$$\text{【详解】} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) \div \frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$$

$$= \frac{x}{x-1} \div \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x}{x-1} \times \frac{x-1}{x+1}$$

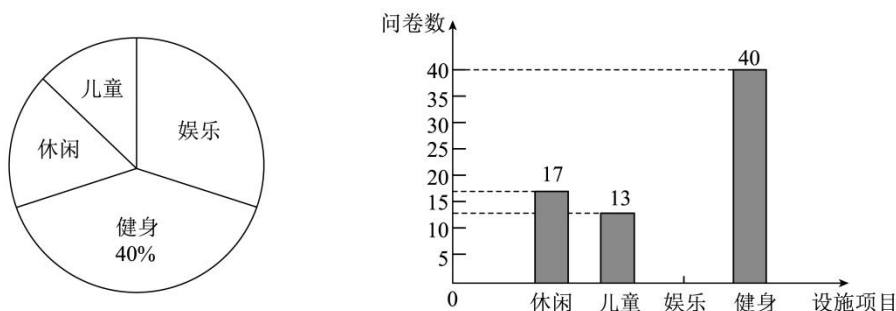
$$= \frac{x}{x+1}$$

$$\because x=3$$

$$\therefore \text{原式} = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}.$$

【点睛】本题考查了分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

18. 为了提高某城区居民的生活质量，政府将改造城区配套设施，并随机向某居民小区发放调查问卷（1人只能投1票），共有休闲设施，儿童设施，娱乐设施，健身设施4种选项，一共调查了 a 人，其调查结果如下：



如图，为根据调查结果绘制的扇形统计图和条形统计图，请根据统计图回答下面的问题：

①调查总人数 $a =$ _____人；

②请补充条形统计图；

③若该城区共有10万居民，则其中愿意改造“娱乐设施”的约有多少人？

④改造完成后，该政府部门向甲、乙两小区下发满意度调查问卷，其结果（分数）如下：

项目 小区	休闲	儿童	娱乐	健身
甲	7	7	9	8
乙	8	8	7	9

若以1:1:1:1进行考核，_____小区满意度（分数）更高；

若以1:1:2:1进行考核，_____小区满意度（分数）更高.

【答案】①100；②见解析；③愿意改造“娱乐设施”的约有3万人；④乙；甲.

【解析】

【分析】①根据健身的人数和所占的百分比即可求出总人数；

②用总数减去其他3项的人数即可求出娱乐的人数；

③根据样本估计总体的方法求解即可；

④根据加权平均数的计算方法求解即可.

【详解】① $a = 40 \div 40\% = 100$ (人),

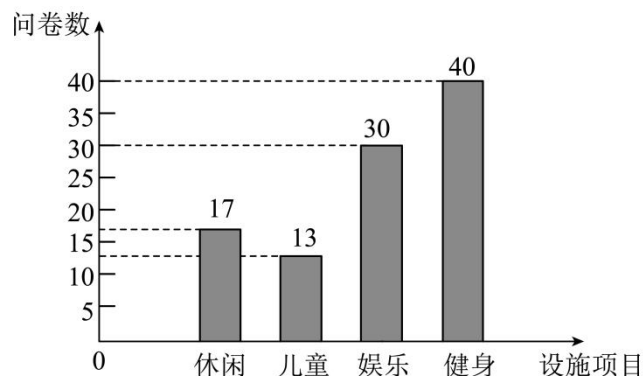
调查总人数 $a = 100$ 人;

故答案为: 100;

② $100 - 17 - 13 - 40 = 30$ (人)

$\therefore$ 娱乐的人数为 30 (人)

$\therefore$ 补充条形统计图如下:



③ $100000 \times \frac{30}{100} \times 100\% = 30000$ (人)

$\therefore$ 愿意改造“娱乐设施”的约有 3 万人;

④若以 1:1:1:1 进行考核,

甲小区得分为 $\frac{1}{4} \times (7 + 7 + 9 + 8) = 7.75$,

乙小区得分为 $\frac{1}{4} \times (8 + 8 + 7 + 9) = 8$,

$\therefore$ 若以 1:1:1:1 进行考核, 乙小区满意度 (分数) 更高;

若以 1:1:2:1 进行考核,

甲小区得分为 $7 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{2}{5} + 8 \times \frac{1}{5} = 8$,

乙小区得分为 $8 \times \frac{1}{5} + 8 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{2}{5} + 9 \times \frac{1}{5} = 7.8$,

$\therefore$ 若以 1:1:2:1 进行考核, 甲小区满意度 (分数) 更高;

故答案为: 乙; 甲.

【点睛】 本题考查条形统计图、扇形统计图, 加权平均数, 样本估计总体等知识, 理解两个统计图中数量

之间的关系是正确解答的关键.

19. 某商场在世博会上购置 A , B 两种玩具, 其中 B 玩具的单价比 A 玩具的单价贵 25 元, 且购置 2 个 B 玩具与 1 个 A 玩具共花费 200 元.

(1) 求 A , B 玩具的单价;

(2) 若该商场要求购置 B 玩具的数量是 A 玩具数量的 2 倍, 且购置玩具的总额不高于 20000 元, 则该商场最多可以购置多少个 A 玩具?

【答案】 (1) A , B 玩具的单价分别为 50 元、75 元;

(2) 最多购置 100 个 A 玩具.

【解析】

【分析】 (1) 设 A 玩具的单价为 x 元每个, 则 B 玩具的单价为 $(x + 25)$ 元每个; 根据 “购置 2 个 B 玩具与 1 个 A 玩具共花费 200 元” 列出方程即可求解;

(2) 设 A 玩具购置 y 个, 则 B 玩具购置 $2y$ 个, 根据 “购置玩具的总额不高于 20000 元” 列出不等式即可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 设 A 玩具的单价为 x 元, 则 B 玩具的单价为 $(x + 25)$ 元;

由题意得: $2(x + 25) + x = 200$;

解得: $x = 50$,

则 B 玩具单价为 $x + 25 = 75$ (元);

答: A , B 玩具的单价分别为 50 元、75 元;

【小问 2 详解】

设 A 玩具购置 y 个, 则 B 玩具购置 $2y$ 个,

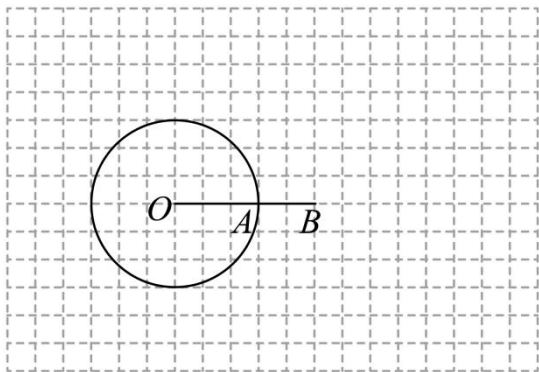
由题意可得: $50y + 75 \times 2y \leq 20000$,

解得: $y \leq 100$,

$\therefore$ 最多购置 100 个 A 玩具.

【点睛】 本题考查一元一次方程和一元一次不等式的应用, 属于中考常规考题, 解题的关键在于读懂题目, 找准题目中的等量关系或不等关系.

20. 如图, 在单位长度为 1 的网格中, 点 O , A , B 均在格点上, $OA = 3$, $AB = 2$, 以 O 为圆心, OA 为半径画圆, 请按下列步骤完成作图, 并回答问题:



①过点 A 作切线 AC ，且 $AC = 4$ （点 C 在 A 的上方）；

②连接 OC ，交 $\odot O$ 于点 D ；

③连接 BD ，与 AC 交于点 E 。

(1) 求证： BD 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 求 AE 的长度。

【答案】(1) 画图见解析，证明见解析

(2) $AE = \frac{3}{2}$

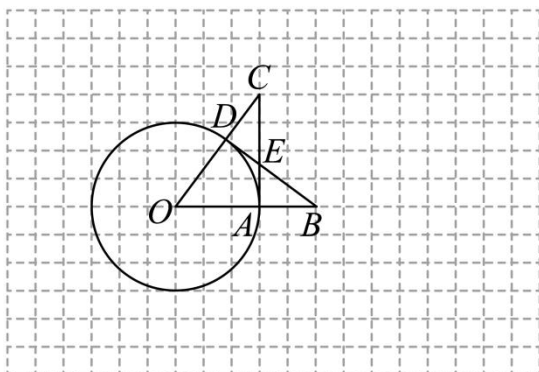
【解析】

【分析】(1) 根据题意作图，首先根据勾股定理得到 $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = 5$ ，然后证明出 $\triangle AOC \cong \triangle DOB$ (SAS)，得到 $\angle OAC = \angle ODB = 90^\circ$ ，即可证明出 BD 为 $\odot O$ 的切线；

(2) 首先根据全等三角形的性质得到 $BD = AC = 4$ ，然后证明出 $BAE \sim BDO$ ，利用相似三角形的性质求解即可。

【小问 1 详解】

如图所示，



$\because AC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OA \perp AC$ ，

$\because OA = 3$ ， $AC = 4$ ，

$$\therefore OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = 5,$$

$$\because OA = 3, AB = 2,$$

$$\therefore OB = OA + AB = 5,$$

$$\therefore OB = OC,$$

$$\text{又} \because OD = OA = 3, \angle AOC = \angle DOB,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle DOB (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle OAC = \angle ODB = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp BD,$$

$$\because \text{点 } D \text{ 在 } \odot O \text{ 上},$$

$$\therefore BD \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线};$$

【小问 2 详解】

$$\because \triangle AOC \cong \triangle DOB,$$

$$\therefore BD = AC = 4,$$

$$\because \angle ABE = \angle DBO, \angle BAE = \angle BDO,$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle BDO,$$

$$\therefore \frac{AE}{OD} = \frac{AB}{BD}, \text{ 即 } \frac{AE}{3} = \frac{2}{4},$$

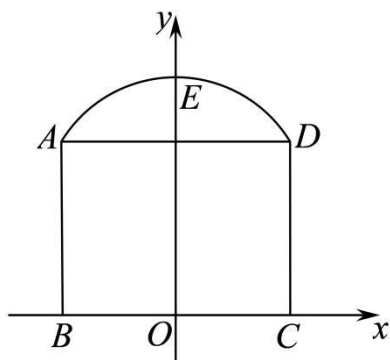
$$\therefore \text{解得 } AE = \frac{3}{2}.$$

【点睛】此题考查了格点作图，圆切线的性质和判定，全等三角形的性质和判定，相似三角形的性质和判定等知识，解题的关键是熟练掌握以上知识点.

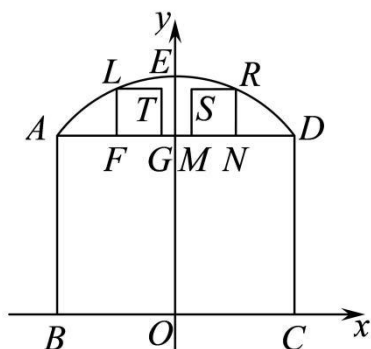
21. 蔬菜大棚是一种具有出色的保温性能的框架覆膜结构，它出现使得人们可以吃到反季节蔬菜. 一般蔬菜大棚使用竹结构或者钢结构的骨架，上面覆上一层或多层保温塑料膜，这样就形成了一个温室空间. 如图，某个温室大棚的横截面可以看作矩形 $ABCD$ 和抛物线 AED 构成，其中 $AB = 3\text{m}$ ， $BC = 4\text{m}$ ，取 BC 中点 O ，过点 O 作线段 BC 的垂直平分线 OE 交抛物线 AED 于点 E ，若以 O 点为原点， BC 所在直线为 x 轴， OE 为 y 轴建立如图所示平面直角坐标系.

请回答下列问题:

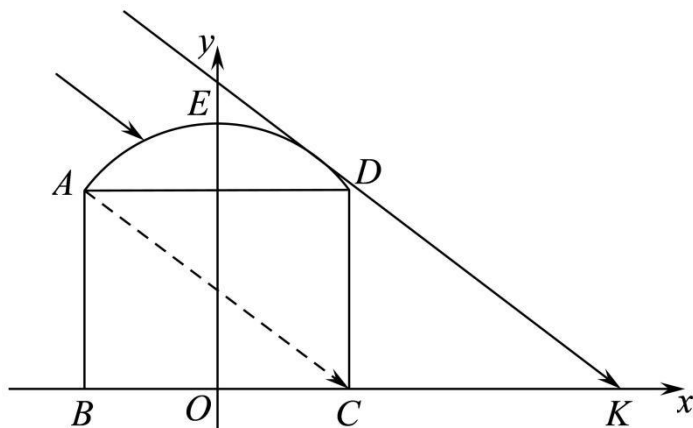
(1) 如图，抛物线 AED 的顶点 $E(0, 4)$ ，求抛物线的解析式;



(2) 如图，为了保证蔬菜大棚的通风性，该大棚要安装两个正方形孔的排气装置 $LFGT$ ， $SMNR$ ，若 $FL = NR = 0.75\text{m}$ ，求两个正方形装置的间距 GM 的长；



(3) 如图，在某一时刻，太阳光线透过 A 点恰好照射到 C 点，此时大棚截面的阴影为 BK ，求 BK 的长。



【答案】(1) $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$

(2) 0.5m

(3) $\frac{97}{12}\text{m}$

【解析】

【分析】(1) 根据顶点坐标，设函数解析式为 $y = ax^2 + 4$ ，求出 A 点坐标，待定系数法求出函数解析式即可；

(2) 求出 $y = 3.75$ 时对应的自变量的值，得到 FN 的长，再减去两个正方形的边长即可得解；

(3) 求出直线 AC 的解析式，进而设出过点 K 的光线解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + m$ ，利用光线与抛物线相切，求出 m 的值，进而求出 K 点坐标，即可得出 BK 的长.

【小问 1 详解】

解：∵ 抛物线 AED 的顶点 $E(0, 4)$,

设抛物线的解析式为 $y = ax^2 + 4$,

∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形， OE 为 BC 的中垂线，

∴ $AD = BC = 4\text{m}$ ， $OB = 2\text{m}$ ，

∴ $AB = 3\text{m}$ ，

∴ 点 $A(-2, 3)$ ，代入 $y = ax^2 + 4$ ，得：

$$3 = 4a + 4,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4},$$

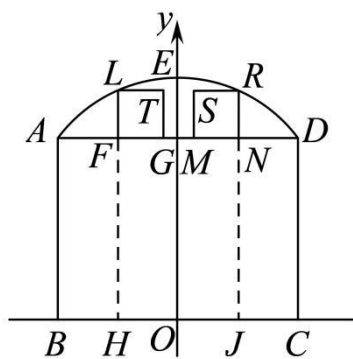
∴ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$;

【小问 2 详解】

∵ 四边形 $LFGT$ ，四边形 $SMNR$ 均为正方形， $FL = NR = 0.75\text{m}$ ，

∴ $MG = FN = FL = NR = 0.75\text{m}$ ，

延长 LF 交 BC 于点 H ，延长 RN 交 BC 于点 J ，则四边形 $FHJN$ ，四边形 $ABFH$ 均为矩形，



∴ $FH = AB = 3\text{m}$ ， $FN = HJ$ ，

∴ $HL = HF + FL = 3.75\text{m}$ ，

∵ $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ，当 $y = 3.75$ 时， $3.75 = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ ，解得： $x = \pm 1$ ，

∴ $H(-1, 0)$ ， $J(1, 0)$ ，

$$\therefore FN = HJ = 2\text{m},$$

$$\therefore GM = FN - FG - MN = 0.5\text{m};$$

【小问3详解】

$$\because BC = 4\text{m}, OE \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore OB = OC = 2\text{m},$$

$$\therefore B(-2, 0), C(2, 0),$$

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则: } \begin{cases} 2k + b = 0 \\ -2k + b = 3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2},$$

$\because$ 太阳光为平行光,

设过点 K 平行于 AC 的光线的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + m$,

由题意, 得: $y = -\frac{3}{4}x + m$ 与抛物线相切,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + 4 \\ y = -\frac{3}{4}x + m \end{cases}, \text{ 整理得: } x^2 - 3x + 4m - 16 = 0,$$

$$\text{则: } \Delta = (-3)^2 - 4(4m - 16) = 0, \text{ 解得: } m = \frac{73}{16};$$

$$\therefore y = -\frac{3}{4}x + \frac{73}{16}, \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } x = \frac{73}{12},$$

$$\therefore K\left(\frac{73}{12}, 0\right),$$

$$\therefore B(-2, 0),$$

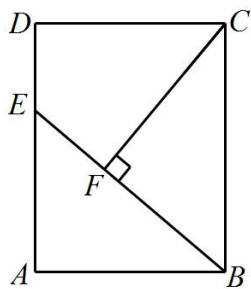
$$\therefore BK = 2 + \frac{73}{12} = \frac{97}{12}\text{m}.$$

【点睛】本题考查二次函数的实际应用. 读懂题意, 正确的求出二次函数解析式, 利用数形结合的思想, 进行求解, 是解题的关键.

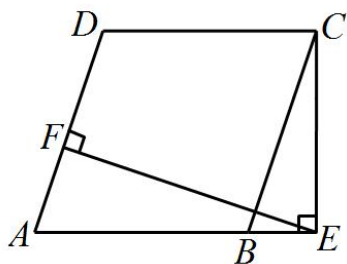
22. (1) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为 AD 边上一点, 连接 BE ,

①若 $BE = BC$, 过 C 作 $CF \perp BE$ 交 BE 于点 F , 求证: $\triangle ABE \cong \triangle FCB$;

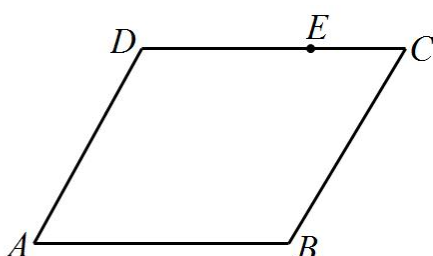
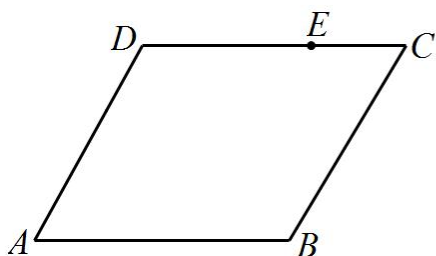
②若 $S_{\text{矩形}ABCD} = 20$ 时，则 $BE \cdot CF = \underline{\hspace{2cm}}$.



(2) 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\cos A = \frac{1}{3}$ ，过 C 作 $CE \perp AB$ 交 AB 的延长线于点 E ，过 E 作 $EF \perp AD$ 交 AD 于点 F ，若 $S_{\text{菱形}ABCD} = 24$ 时，求 $EF \cdot BC$ 的值.



(3) 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = 6$ ， $AD = 5$ ，点 E 在 CD 上，且 $CE = 2$ ，点 F 为 BC 上一点，连接 EF ，过 E 作 $EG \perp EF$ 交平行四边形 $ABCD$ 的边于点 G ，若 $EF \cdot EG = 7\sqrt{3}$ 时，请直接写出 AG 的长.



备用图

【答案】(1) ①见解析；② 20；(2) 32；(3) 3 或 4 或 $\frac{3}{2}$

【解析】

【分析】(1) ①根据矩形的性质得出 $\angle ABE + \angle CBF = 90^\circ$ ， $\angle CFB = \angle A = 90^\circ$ ，进而证明 $\angle FCB = \angle ABE$ 结合已知条件，即可证明 $\triangle ABE \cong \triangle FCB$ ；

②由①可得 $\angle FCB = \angle ABE$ ， $\angle CFB = \angle A = 90^\circ$ ，证明 $\triangle ABE \sim \triangle FCB$ ，得出 $\frac{AB}{CF} = \frac{BE}{BC}$ ，根据

$S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot CD = 20$ ，即可求解；

(2) 根据菱形的性质得出 $AD \parallel BC$, $AB = BC$, 根据已知条件得出 $BE = \frac{1}{3}BC$, $AE = \frac{4}{3}AB$, 证明 $\triangle AFE \sim \triangle BEC$, 根据相似三角形的性质即可求解;

(3) 分三种情况讨论, ①当点 G 在 AD 边上时, 如图所示, 延长 FE 交 AD 的延长线于点 M , 连接 GF , 过点 E 作 $EH \perp DM$ 于点 H , 证明 $\triangle EDM \sim \triangle ECF$, 解 $\text{Rt}\triangle DEH$, 进而得出 $MG = 7$, 根据

$\tan \angle MEH = \tan \angle HGE$, 得出 $HE^2 = HM \cdot HG$, 建立方程解方程即可求解; ②当 G 点在 AB 边上时, 如图所示, 连接 GF , 延长 GE 交 BC 的延长线于点 M , 过点 G 作 $GN \parallel AD$, 则 $GN \parallel BC$, 四边形 $ADNG$ 是平行四边形, 同理证明 $\triangle ENG \sim \triangle ECM$, 根据 $\tan \angle FEH = \tan \angle M$ 得出 $EH^2 = FH \cdot HM$, 建立方程,

解方程即可求解; ③当 G 点在 BC 边上时, 如图所示, 过点 B 作 $BT \perp DC$ 于点 T , 求得 $S_{\triangle BTC} = \frac{25\sqrt{3}}{8}$,

而 $S_{\triangle EFG} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$, 得出矛盾, 则此情况不存在.

【详解】解: (1) ① $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, 则 $\angle A = \angle ABC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ,$$

又 $\because CF \perp BC$,

$$\therefore \angle FCB + \angle CBF = 90^\circ, \quad \angle CFB = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FCB = \angle ABE,$$

又 $\because BC = BE$,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCB;$$

②由①可得 $\angle FCB = \angle ABE$, $\angle CFB = \angle A = 90^\circ$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FCB$$

$$\therefore \frac{AB}{CF} = \frac{BE}{BC},$$

$$\text{又} \because S_{\text{矩形}ABCD} = AB \cdot CD = 20$$

$$\therefore BE \cdot CF = AB \cdot BC = 20,$$

故答案为: 20.

$$(2) \because \text{在菱形 } ABCD \text{ 中, } \cos A = \frac{1}{3},$$

$$\therefore AD \parallel BC, \quad AB = BC,$$

则 $\angle CBE = \angle A$,

$$\because CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\because \cos \angle CBE = \frac{BE}{CB}$$

$$\therefore BE = BC \cdot \cos \angle CBE = BC \times \cos \angle A = \frac{1}{3}BC,$$

$$\therefore AE = AB + BE = AB + \frac{1}{3}BC = AB + \frac{1}{3}AB = \frac{4}{3}AB,$$

$$\because EF \perp AD, CE \perp AB$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BEC = 90^\circ,$$

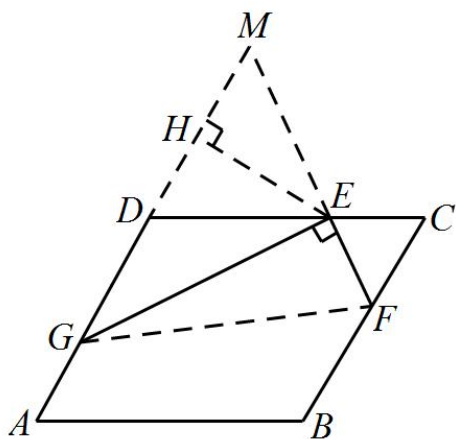
$$\text{又 } \angle CBE = \angle A,$$

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle BEC,$$

$$\therefore \frac{AE}{BC} = \frac{EF}{CE} = \frac{AF}{BE},$$

$$\therefore EF \cdot BC = AE \cdot CE = \frac{4}{3}AB \times CE = \frac{4}{3}S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{4}{3} \times 24 = 32;$$

(3) ①当点 G 在 AD 边上时, 如图所示, 延长 FE 交 AD 的延长线于点 M , 连接 GF , 过点 E 作 $EH \perp DM$ 于点 H ,



$$\because \text{平行四边形 } ABCD \text{ 中, } AB = 6, CE = 2,$$

$$\therefore CD = AB = 6, DE = DC - EC = 6 - 2 = 4,$$

$$\because DM \parallel FC,$$

$$\therefore \triangle EDM \sim \triangle ECF$$

$$\therefore \frac{EM}{EF} = \frac{ED}{EC} = \frac{4}{2} = 2,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MGE}}{S_{\triangle FEG}} = \frac{EM}{EF} = 2$$

$$\therefore S_{\triangle MGE} = 2S_{\triangle FEG} = EF \cdot EG = 7\sqrt{3}$$

$$\text{在 Rt} \triangle DEH \text{ 中, } \angle HDE = \angle A = 60^\circ,$$

$$\text{则 } EH = \frac{\sqrt{3}}{2} DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}, \quad DH = \frac{1}{2} DE = 2,$$

$$\therefore \frac{1}{2} MG \times HE = 7\sqrt{3}$$

$$\therefore MG = 7,$$

$$\therefore GE \perp EF, EH \perp MG,$$

$$\therefore \angle MEH = 90^\circ - \angle HEG = \angle HGE$$

$$\therefore \tan \angle MEH = \tan \angle HGE$$

$$\therefore \frac{HE}{HG} = \frac{HM}{HE}$$

$$\therefore HE^2 = HM \cdot HG$$

$$\text{设 } AG = a, \text{ 则 } GD = AD - AG = 5 - a, \quad GH = GD + HD = 5 - a + 2 = 7 - a,$$

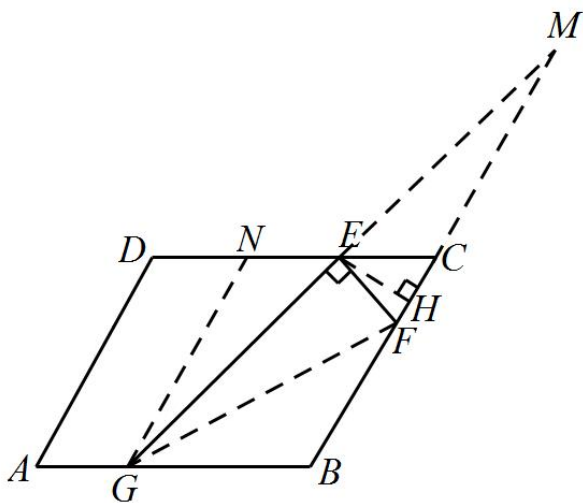
$$HM = GM - GH = 7 - (7 - a) = a,$$

$$\therefore (2\sqrt{3})^2 = x(7 - x)$$

$$\text{解得: } a = 3 \text{ 或 } a = 4,$$

$$\text{即 } AG = 3 \text{ 或 } AG = 4,$$

②当 G 点在 AB 边上时, 如图所示,



连接 GF , 延长 GE 交 BC 的延长线于点 M , 过点 G 作 $GN \parallel AD$, 则 $GN \parallel BC$, 四边形 $ADNG$ 是平行四边形,

$$\text{设 } AG = x, \text{ 则 } DN = AG = x, \quad EN = DE - DN = 4 - x,$$

$$\therefore GN \parallel CM$$

$$\therefore \triangle ENG \sim \triangle ECM$$

$$\therefore \frac{EG}{EM} = \frac{EN}{EC} = \frac{GN}{CM} = \frac{4-x}{2},$$

$$\therefore CM = \frac{2GN}{4-x} = \frac{10}{4-x}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle GEF}}{S_{\triangle MEF}} = \frac{EG}{EM} = \frac{4-x}{2},$$

$$\therefore EF \cdot EG = 7\sqrt{3}$$

$$\therefore S_{\triangle MEF} = \frac{2S_{\triangle GEF}}{4-x} = \frac{7\sqrt{3}}{4-x}$$

过点 E 作 $EH \perp BC$ 于点 H ,

在 $\text{Rt}\triangle EHC$ 中, $EC = 2, \angle ECH = 60^\circ$,

$$\therefore EH = \sqrt{3}, \quad CH = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2} \times MF \times EH, \quad \text{则} \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times MF = \frac{7\sqrt{3}}{4-x},$$

$$\therefore MF = \frac{14}{4-x},$$

$$\therefore FH = MF - CM - CH = \frac{14}{4-x} - \frac{10}{4-x} - 1 = \frac{x}{4-x}, \quad MH = CM + CH = \frac{10}{4-x} + 1 = \frac{14-x}{4-x}$$

$$\therefore \angle MEF = \angle EHM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEH = 90^\circ - \angle MEH = \angle M$$

$$\therefore \tan \angle FEH = \tan \angle M,$$

$$\text{即} \frac{FH}{EH} = \frac{EH}{HM},$$

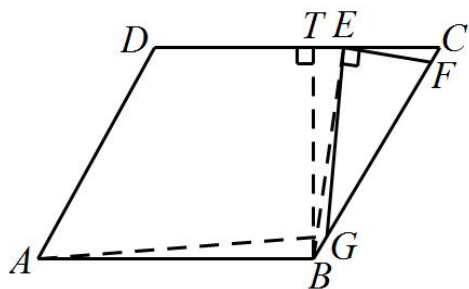
$$\therefore EH^2 = FH \cdot HM$$

$$\text{即} (\sqrt{3})^2 = \frac{x}{4-x} \times \frac{14-x}{4-x}$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = 8 \text{ (舍去)}$$

$$\text{即} AG = \frac{3}{2};$$

③当 G 点在 BC 边上时, 如图所示,



过点 B 作 $BT \perp DC$ 于点 T ,

在 $\text{Rt}\triangle BTC$ 中, $CT = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$, $BT = \sqrt{3}TC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore S_{\triangle BTC} = \frac{1}{2}BT \times TC = \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{2} \times \frac{5}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{8},$$

$$\therefore EF \cdot EG = 7\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{7}{2}\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{25}{8}\sqrt{3} < \frac{7}{2}\sqrt{3},$$

$\therefore G$ 点不可能在 BC 边上,

综上所述, AG 的长为 3 或 4 或 $\frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 平行四边形的性质, 解直角三角形, 矩形的性质, 熟练掌握相似三角形的性质与判定, 分类讨论是解题的关键.

