

2023 年广东省初中学业水平考试数学

满分 120 分，考试用时 90 分钟.

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 负数的概念最早出现在我国古代著名的数学专著《九章算术》中，如果把收入 5 元记作 +5 元，那么支出 5 元记作 ()

- A. -5 元 B. 0 元 C. +5 元 D. +10 元

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的意义可进行求解.

【详解】解：由把收入 5 元记作 +5 元，可知支出 5 元记作 -5 元；

故选 A.

【点睛】本题主要考查相反数的意义，熟练掌握相反数的意义是解题的关键.

2. 下列出版社的商标图案中，是轴对称图形的为 ()



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念：一个图形沿一条直线折叠，直线两旁部分能够完全重合的图形；由此问题可求解.

【详解】解：符合轴对称图形的只有 A 选项，而 B、C、D 选项找不到一条直线能使直线两旁部分能够完全重合；

故选 A.

【点睛】本题主要考查轴对称图形的识别，熟练掌握轴对称图形的概念是解题的关键.

3. 2023 年 5 月 28 日，我国自主研发的 C919 国产大飞机商业首航取得圆满成功，C919 可储存约 186000 升燃油，将数据 186000 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.186×10^5 B. 1.86×10^5 C. 18.6×10^4 D. 186×10^3

【答案】B

【解析】

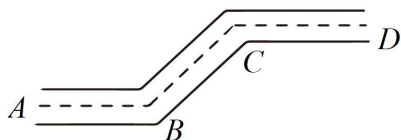
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值大于或等于 10 时， n 是正整数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负整数．

【详解】解：将数据 186000 用科学记数法表示为 1.86×10^5 ；

故选 B

【点睛】本题主要考查科学记数法，熟练掌握科学记数法的表示方法是解题的关键．

4. 如图，街道 AB 与 CD 平行，拐角 $\angle ABC = 137^\circ$ ，则拐角 $\angle BCD =$ ()



- A. 43° B. 53° C. 107° D. 137°

【答案】D

【解析】

【分析】根据平行线的性质可进行求解．

【详解】解： $\because AB \parallel CD$ ， $\angle ABC = 137^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD = \angle ABC = 137^\circ$ ；

故选 D．

【点睛】本题主要考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键．

5. 计算 $\frac{3}{a} + \frac{2}{a}$ 的结果为 ()

- A. $\frac{1}{a}$ B. $\frac{6}{a^2}$ C. $\frac{5}{a}$ D. $\frac{6}{a}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据分式的加法运算可进行求解．

【详解】解：原式 $= \frac{5}{a}$ ；

故选 C．

【点睛】本题主要考查分式的运算，熟练掌握分式的运算是解题的关键．

6. 我国著名数学家华罗庚曾为普及优选法作出重要贡献，优选法中有一种 0.618 法应用了 ()

- A. 黄金分割数 B. 平均数 C. 众数 D. 中位数

【答案】A

【解析】

【分析】根据黄金分割比可进行求解.

【详解】解：0.618 为黄金分割比，所以优选法中有一种 0.618 法应用了黄金分割数；

故选 A.

【点睛】本题主要考查黄金分割比，熟练掌握黄金分割比是解题的关键.

7. 某学校开设了劳动教育课程.小明从感兴趣的“种植”“烹饪”“陶艺”“木工”4 门课程中随机选择一门学习，每门课程被选中的可能性相等，小明恰好选中“烹饪”的概率为（ ）

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据概率公式可直接进行求解.

【详解】解：由题意可知小明恰好选中“烹饪”的概率为 $\frac{1}{4}$ ；

故选 C.

【点睛】本题主要考查概率，熟练掌握概率公式是解题的关键.

8. 一元一次不等式组 $\begin{cases} x-2>1 \\ x<4 \end{cases}$ 的解集为（ ）

- A. $-1 < x < 4$ B. $x < 4$ C. $x < 3$ D. $3 < x < 4$

【答案】D

【解析】

【分析】第一个不等式解与第二个不等式的解，取公共部分即可.

【详解】解： $\begin{cases} x-2>1 \text{ ①} \\ x<4 \text{ ②} \end{cases}$

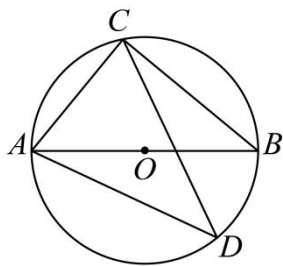
解不等式 ① 得： $x > 3$

结合 ② 得：不等式组的解集是 $3 < x < 4$,

故选：D.

【点睛】本题考查解一元一次不等式组，掌握解一元一次不等式组的一般步骤是解题的关键.

9. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\angle BAC = 50^\circ$ ，则 $\angle D =$ （ ）

A. 20° B. 40° C. 50° D. 80°

【答案】B

【解析】

【分析】根据圆周角定理可进行求解.

【详解】解: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 50^\circ,$$

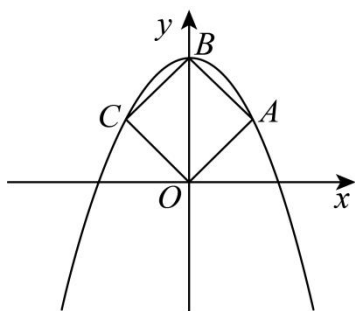
$$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 40^\circ,$$

$$\because \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AC},$$

$$\therefore \angle D = \angle ABC = 40^\circ;$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查圆周角的相关性质, 熟练掌握直径所对圆周角为直角是解题的关键.

10. 如图, 抛物线 $y = ax^2 + c$ 经过正方形 $OABC$ 的三个顶点 A , B , C , 点 B 在 y 轴上, 则 ac 的值为 ()

A. -1

B. -2

C. -3

D. -4

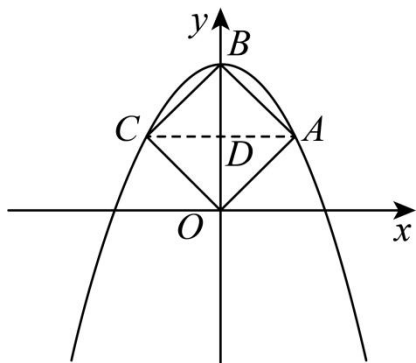
【答案】B

【解析】

【分析】连接 AC , 交 y 轴于点 D , 根据正方形的性质可知 $AC = OB = 2AD = 2OD$, 然后可得点 $A\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$,

进而代入求解即可.

【详解】解: 连接 AC , 交 y 轴于点 D , 如图所示:



当 $x=0$ 时, 则 $y=c$, 即 $OB=c$,

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是正方形,

$\therefore AC=OB=2AD=2OD=c$, $AC \perp OB$,

$\therefore$ 点 $A\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)$,

$$\therefore \frac{c}{2} = a \times \frac{c^2}{4} + c,$$

解得: $ac=-2$,

故选 B.

【点睛】 本题主要考查二次函数的图象与性质及正方形的性质, 熟练掌握二次函数的图象与性质及正方形的性质是解题的关键.

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分.

11. 因式分解: $x^2-1=$ _____.

【答案】 $(x+1)(x-1)$

【解析】

【分析】 利用平方差公式进行因式分解即可得.

【详解】 解: $x^2-1=(x+1)(x-1)$,

故答案为: $(x+1)(x-1)$.

【点睛】 本题考查了利用平方差公式进行因式分解, 熟记平方差公式是解题关键.

12. 计算 $\sqrt{3} \times \sqrt{12} =$ _____.

【答案】 6

【解析】

【分析】 利用二次根式的乘法法则进行求解即可.

【详解】解： $\sqrt{3} \times \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$.

故答案为：6.

【点睛】本题考查了二次根式的乘法，熟练掌握二次根式的乘法法则和二次根式的性质是解题的关键.

13. 某蓄电池的电压为 48V，使用此蓄电池时，电流 I (单位：A) 与电阻 R (单位： Ω) 的函数表达式为 $I = \frac{48}{R}$ ，

当 $R = 12\Omega$ 时， I 的值为_____A .

【答案】4

【解析】

【分析】将 $R = 12\Omega$ 代入 $I = \frac{48}{R}$ 中计算即可；

【详解】解： $\because R = 12\Omega$ ，

$$\therefore I = \frac{48}{R} = \frac{48}{12} = 4 \text{ (A)}$$

故答案为：4.

【点睛】本题考查已知自变量的值求函数值，掌握代入求值的方法是解题的关键.

14. 某商品进价 4 元，标价 5 元出售，商家准备打折销售，但其利润率不能少于 10%，则最多可打_____折.

【答案】8.8

【解析】

【分析】设打 x 折，由题意可得 $5 \times \frac{x}{10} - 4 \geq 4 \times 10\%$ ，然后求解即可.

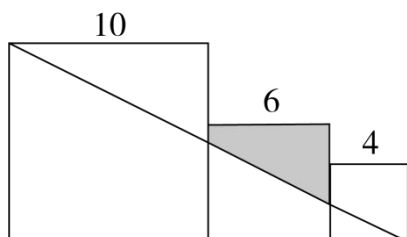
【详解】解：设打 x 折，由题意得 $5 \times \frac{x}{10} - 4 \geq 4 \times 10\%$ ，

解得： $x \geq 8.8$ ；

故答案为 8.8.

【点睛】本题主要考查一元一次不等式的应用，熟练掌握一元一次不等式的应用是解题的关键.

15. 边长分别为 10，6，4 的三个正方形拼接在一起，它们的底边在同一直线上（如图），则图中阴影部分的面积为_____.

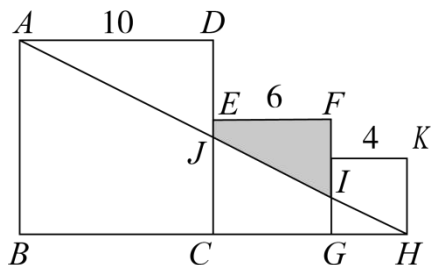


【答案】15

【解析】

【分析】根据正方形的性质及相似三角形的性质可进行求解.

【详解】解：如图，



由题意可知 $AD = DC = 10$, $CG = CE = GF = 6$, $\angle CEF = \angle EFG = 90^\circ$, $GH = 4$,

$$\therefore CH = 10 = AD,$$

$$\therefore \angle D = \angle DCH = 90^\circ, \angle AJD = \angle HJC,$$

$$\therefore \triangle ADJ \cong \triangle HCJ \text{ (AAS)},$$

$$\therefore CJ = DJ = 5,$$

$$\therefore EJ = 1,$$

$$\therefore GI \parallel CJ,$$

$$\therefore \triangle HGI \sim \triangle HCJ,$$

$$\therefore \frac{GI}{CJ} = \frac{GH}{CH} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore GI = 2,$$

$$\therefore FI = 4,$$

$$\therefore S_{\text{梯形}EIJF} = \frac{1}{2}(EJ + FI) \cdot EF = 15;$$

故答案为 15.

【点睛】本题主要考查正方形的性质及相似三角形的性质与判定，熟练掌握正方形的性质及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

三、解答题 (一)：本大题共 3 小题，第 16 题 10 分，第 17、18 题各 7 分，共 24 分.

16. (1) 计算： $\sqrt[3]{8} + |-5| + (-1)^{2023}$;

(2) 已知一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(0, 1)$ 与点 $(2, 5)$ ，求该一次函数的表达式.

【答案】(1) 6; (2) $y = 2x + 1$

【解析】

【分析】(1) 先求出立方根及有理数的乘方运算，绝对值的化简，然后计算加减法即可；

(2) 将两个点代入解析式求解即可.

【详解】解：(1) $\sqrt[3]{8} + |-5| + (-1)^{2023}$

$$= 2 + 5 - 1$$

$$= 6;$$

(2) $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(0, 1)$ 与点 $(2, 5)$,

$$\therefore \text{代入解析式得: } \begin{cases} 1 = b \\ 5 = 2k + b \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = 1 \\ k = 2 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为: $y = 2x + 1$.

【点睛】题目主要考查实数的混合运算及待定系数法确定一次函数解析式，熟练掌握这些基础知识点是解题关键.

17. 某学校开展了社会实践活动，活动地点距离学校12km，甲、乙两同学骑自行车同时从学校出发，甲的速度是乙的1.2倍，结果甲比乙早到10min，求乙同学骑自行车的速度.

【答案】乙同学骑自行车的速度为0.2千米/分钟.

【解析】

【分析】设乙同学骑自行车的速度为 x 千米/分钟，则甲同学骑自行车的速度为 $1.2x$ 千米/分钟，根据时间=路程÷速度结合甲车比乙车提前10分钟到达，即可得出关于 x 的分式方程，解之并检验后即可得出结论.

【详解】解：设乙同学骑自行车的速度为 x 千米/分钟，则甲同学骑自行车的速度为 $1.2x$ 千米/分钟，

$$\text{根据题意得: } \frac{12}{x} - \frac{12}{1.2x} = 10,$$

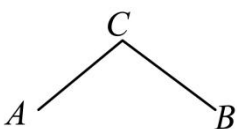
$$\text{解得: } x = 0.2.$$

经检验， $x = 0.2$ 是原方程的解，且符合题意，

答：乙同学骑自行车的速度为0.2千米/分钟.

【点睛】题目主要考查分式方程的应用，理解题意列出分式方程是解题的关键.

18. 2023年5月30日，神舟十六号载人飞船发射取得圆满成功，3名航天员顺利进驻中国空间站，如图中的照片展示了中国空间站上机械臂的一种工作状态，当两臂 $AC = BC = 10\text{m}$ ，两臂夹角 $\angle ACB = 100^\circ$ 时，求 A, B 两点间的距离. (结果精确到0.1m，参考数据 $\sin 50^\circ \approx 0.766$ ， $\cos 50^\circ \approx 0.643$ ， $\tan 50^\circ \approx 1.192$)

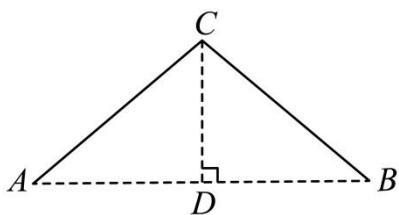


【答案】15.3m

【解析】

【分析】连接 AB ，作 $CD \perp AB$ 于 D ，由等腰三角形“三线合一”性质可知， $AB = 2AD$ ， $\angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB = 50^\circ$ ，在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中利用 $\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC}$ 求出 AD ，继而求出 AB 即可。

【详解】解：连接 AB ，作 $CD \perp AB$ 于 D ，



$\because AC = BC, CD \perp AB$,

$\therefore CD$ 是边 AB 边上的中线，也是 $\angle ACB$ 的角平分线，

$\therefore AB = 2AD, \angle ACD = \frac{1}{2} \angle ACB = 50^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $AC = 10\text{m}$ ， $\angle ACD = 50^\circ$ ， $\sin \angle ACD = \frac{AD}{AC}$

$\therefore \sin 50^\circ = \frac{AD}{10}$,

$\therefore AD = 10 \sin 50^\circ \approx 10 \times 0.766 = 7.66$

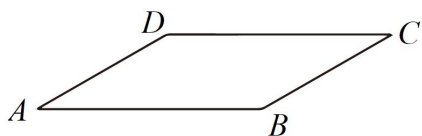
$\therefore AB = 2AD \approx 2 \times 7.66 = 15.32 \approx 15.3(\text{m})$

答： A, B 两点间的距离为15.3m.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质，解直角三角形的应用等知识，掌握等腰三角形的性质是解题的关键.

四、解答题 (二)：本大题共3小题，每小题9分，共27分.

19. 如图，在 $ABCD$ 中， $\angle DAB = 30^\circ$.



(1) 实践与操作：用尺规作图法过点 D 作 AB 边上的高 DE ；(保留作图痕迹，不要求写作法)

(2) 应用与计算：在 (1) 的条件下， $AD = 4$ ， $AB = 6$ ，求 BE 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $6 - 2\sqrt{3}$

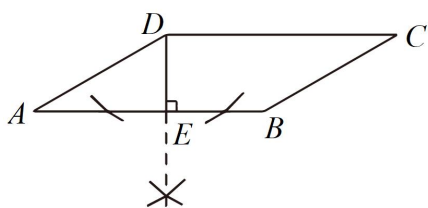
【解析】

【分析】(1) 根据过直线外一点作已知直线的垂线的方法作图即可，可用圆规以点 D 为圆心，在 AB 上找到两个点到点 D 的距离相等，再分别以这两个点为圆心，相等且大于这两点距离的一半为半径画弧，再找到一个到这两个点的距离相等的点，连接最后得到的点与点 D 所得线段所在的直线就是高 DE 所在的直线，据此画图即可；

(2) 先利用 30° 度角的余弦值求出 AE ，再由 $BE = AB - AE$ 计算即可.

【小问 1 详解】

解：依题意作图如下，则 DE 即为所求作的高：



【小问 2 详解】

$\because AD = 4$ ， $\angle DAB = 30^\circ$ ， DE 是 AB 边上的高，

$$\therefore \cos \angle DAB = \frac{AE}{AD}, \text{ 即 } \frac{AE}{4} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AE = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

又 $\because AB = 6$,

$$\therefore BE = AB - AE = 6 - 2\sqrt{3},$$

即 BE 的长为 $6 - 2\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查尺规作图—作垂线， 30° 度角的余弦值，掌握过直线外一点作垂线的方法和 30° 度角的余弦值是解题的关键.

20. 综合与实践

主题：制作无盖正方体形纸盒

素材：一张正方形纸板.

步骤 1：如图 1，将正方形纸板的边长三等分，画出九个小正方形，并剪去四个角上的小正方形；

步骤 2：如图 2，把剪好的纸板折成无盖正方体形纸盒.

猜想与证明：

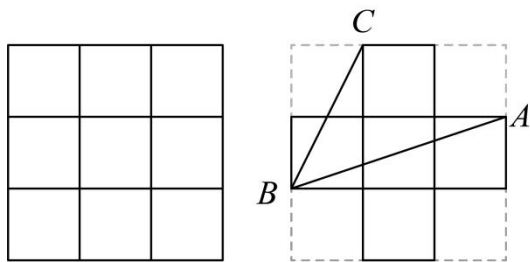


图1

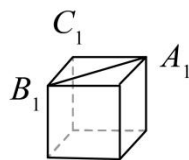


图2

(1) 直接写出纸板上 $\angle ABC$ 与纸盒上 $\angle A_1B_1C_1$ 的大小关系；

(2) 证明 (1) 中你发现的结论.

【答案】 (1) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

(2) 证明见解析.

【解析】

【分析】 (1) $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 均是等腰直角三角形, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1 = 45^\circ$;

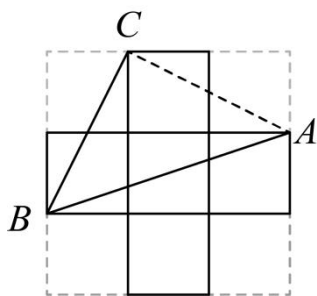
(2) 证明 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形即可.

【小问 1 详解】

解: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

【小问 2 详解】

证明: 连接 AC ,



设小正方形边长为 1, 则 $AC = BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$,

$$\therefore AC^2 + BC^2 = 5 + 5 = AB^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore A_1C_1 = B_1C_1 = 1$, $A_1C_1 \perp B_1C_1$,

$\therefore \triangle A_1B_1C_1$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle ABC = \angle A_1B_1C_1 = 45^\circ$,

故 $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$

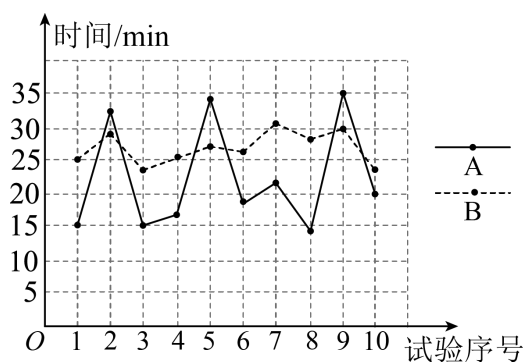
【点睛】此题考查了勾股定理及其逆定理的应用和等腰三角形的性质，熟练掌握其性质是解答此题的关键.

21. 小红家到学校有两条公共汽车线路，为了解两条线路的乘车所用时间，小红做了试验，第一周(5个工作日)选择 A 线路，第二周(5个工作日)选择 B 线路，每天在固定时间段内乘车 2 次并分别记录所用时间，数据统计如下：(单位：min)

数据统计表

试验序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A 线路所用时间	15	32	15	16	34	18	21	14	35	20
B 线路所用时间	25	29	23	25	27	26	31	28	30	24

数据折线统计图



根据以上信息解答下列问题：

	平均数	中位数	众数	方差
A 线路所用时间	22	a	15	63.2
B 线路所用时间	b	26.5	c	6.36

(1) 填空： $a =$ _____； $b =$ _____； $c =$ _____；

(2) 应用你所学的统计知识，帮助小红分析如何选择乘车线路.

【答案】(1) 19, 26.8, 25

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 根据中位数定义将 A 线路所用时间按从小到大的顺序排列，求中间两个数的平均数即为 A 线路所用时间的中位数 a ，利用平均数的定义求出 B 线路所用时间的平均数 b ，找出 B 线路所用时间中出现次

数最多的数据即为 B 线路所用时间的众数 c ，从而得解；

(2) 根据四个统计量分析，然后根据分析结果提出建议即可。

【小问 1 详解】

解：将 A 线路所用时间按从小到大顺序排列得：14, 15, 15, 16, 18, 20, 21, 32, 34, 35，中间两个数是 18, 20，

$\therefore$ A 线路所用时间的中位数为： $a = \frac{18+20}{2} = 19$ ，

由题意可知 B 线路所用时间得平均数为： $b = \frac{25+29+23+25+27+26+31+28+30+24}{10} = 26.8$ ，

$\therefore$ B 线路所用时间中，出现次数最多的数据是 25，有两次，其他数据都是一次，

$\therefore$ B 线路所用时间的众数为： $c = 25$

故答案为：19, 26.8, 25；

【小问 2 详解】

根据统计量上来分析可知，A 线路所用时间平均数小于 B 线路所用时间平均数，A 线路所用时间中位数也小于 B 线路所用时间中位数，但 A 线路所用时间的方差比较大，说明 A 线路比较短，但容易出现拥堵情况，B 线路比较长，但交通畅通，总体上来讲 A 路线优于 B 路线。

因此，我的建议是：根据上学到校剩余时间而定，如果上学到校剩余时间比较短，比如剩余时间是 21 分钟，则选择 A 路线，因为 A 路线的时间不大于 21 分钟的次数有 7 次，而 B 路线的时间都大于 21 分钟；如果剩余时间不短也不长，比如剩余时间是 31 分钟，则选择 B 路线，因为 B 路线的时间都不大于 31 分钟，而 A 路线的时间大于 31 分钟有 3 次，选择 B 路线可以确保不迟到；如果剩余时间足够长，比如剩余时间是 36 分钟，则选择 A 路线，在保证不迟到的情况，选择平均时间更少，中位数更小的路线。

【点睛】 本题考查求平均数，中位数和众数，以及根据统计量做决策等知识，掌握统计量的求法是解题的关键。

五、解答题 (三)：本大题共 2 小题，每小题 12 分，共 24 分。

22 综合探究

如图 1，在矩形 $ABCD$ 中 ($AB > AD$)，对角线 AC ， BD 相交于点 O ，点 A 关于 BD 的对称点为 A' ，连接 AA' 交 BD 于点 E ，连接 CA' 。

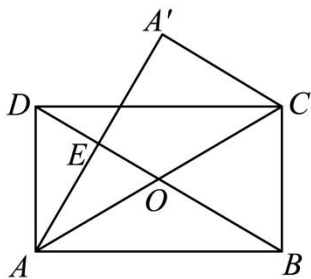


图1

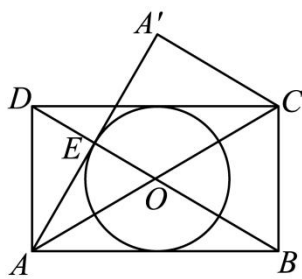


图2

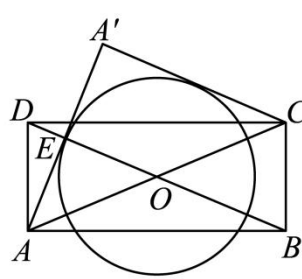


图3

(1) 求证: $AA' \perp CA'$;

(2) 以点 O 为圆心, OE 为半径作圆.

①如图 2, $\odot O$ 与 CD 相切, 求证: $AA' = \sqrt{3}CA'$;

②如图 3, $\odot O$ 与 CA' 相切, $AD = 1$, 求 $\odot O$ 的面积.

【答案】 (1) 见解析 (2) ①见解析; ② $\frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi$

【解析】

【分析】 (1) 由点 A 关于 BD 的对称点为 A' 可知点 E 是 AA' 的中点, $\angle AEO = 90^\circ$, 从而得到 OE 是 $\triangle ACA'$ 的中位线, 继而得到 $OE \parallel A'C$, 从而证明 $AA' \perp CA'$;

(2) ①过点 O 作 $OF \perp AB$ 于点 F , 延长 FO 交 CD 于点 G , 先证明 $\triangle OCG \cong \triangle OAF$ (AAS) 得到 $OG = OF$, 由 $\odot O$ 与 CD 相切, 得到 $OG = OE$, 继而得到 $OE = OF$, 从而证明 AO 是 $\angle EAF$ 的角平分线, 即 $\angle OAE = \angle OAF$, $\angle OAE = \angle OAF = x$, 求得 $\angle AOE = 2x$, 利用直角三角形两锐角互余得到 $\angle AOE + \angle OAE = 90^\circ$, 从而得到 $\angle OAE = 30^\circ$, 即 $\angle A'AC = 30^\circ$, 最后利用含 30° 度角的直角三角形的性质得出 $AA' = \sqrt{3}CA'$;

②先证明四边形 $A'EOH$ 是正方形, 得到 $OE = OH = A'H$, 再利用 OE 是 $\triangle ACA'$ 的中位线得到 $OE = \frac{1}{2}A'C$, 从而得到 $OH = CH$, $\angle OCH = 45^\circ$, 再利用平行线的性质得到 $\angle AOE = 45^\circ$, 从而证明 $\triangle AEO$ 是等腰直角三角形, $AE = OE$, 设 $AE = OE = r$, 求得 $DE = (\sqrt{2}-1)r$, 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中,

$AE^2 + DE^2 = AD^2$ 即 $r^2 + (\sqrt{2}-1)^2 r^2 = 1^2$, 解得 $r^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, 从而得到 $\odot O$ 的面积为

$$S = \pi r^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}\pi.$$

【小问 1 详解】

$\because$ 点 A 关于 BD 的对称点为 A' ,

$\therefore$ 点 E 是 AA' 的中点, $\angle AEO = 90^\circ$,

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore O$ 是 AC 的中点,

$\therefore OE$ 是 $\triangle ACA'$ 的中位线,

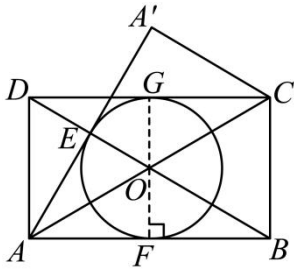
$\therefore OE \parallel A'C$

$\therefore \angle AA'C = \angle AEO = 90^\circ$,

$\therefore AA' \perp CA'$

【小问 2 详解】

①过点 O 作 $OF \perp AB$ 于点 F , 延长 FO 交 CD 于点 G , 则 $\angle OFA = 90^\circ$,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB \parallel CD$, $AO = BO = CO = DO$,

$\therefore \angle OCG = \angle OAF$, $\angle OGC = \angle OFA = 90^\circ$.

$\because \angle OCG = \angle OAF$, $\angle OGC = \angle OFA = 90^\circ$, $AO = CO$,

$\therefore \triangle OCG \cong \triangle OAF$ (AAS),

$\therefore OG = OF$.

$\because \odot O$ 与 CD 相切, OE 为半径, $\angle OGC = 90^\circ$,

$\therefore OG = OE$,

$\therefore OE = OF$

又 $\because \angle AEO = 90^\circ$ 即 $OE \perp AE$, $OF \perp AB$,

$\therefore AO$ 是 $\angle EAF$ 的角平分线, 即 $\angle OAE = \angle OAF$,

设 $\angle OAE = \angle OAF = x$, 则 $\angle OCG = \angle OAF = x$,

又 $\because CO = DO$

$\therefore \angle OCG = \angle ODG = x$

$\therefore \angle AOE = \angle OCG + \angle ODG = 2x$

又 $\because \angle AEO = 90^\circ$, 即 $\triangle AEO$ 是直角三角形,

$$\therefore \angle AOE + \angle OAE = 90^\circ, \text{ 即 } 2x + x = 90^\circ$$

$$\text{解得: } x = 30^\circ,$$

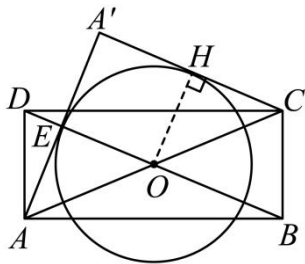
$$\therefore \angle OAE = 30^\circ, \text{ 即 } \angle A'AC = 30^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle A'AC \text{ 中, } \angle A'AC = 30^\circ, \angle AA'C = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = 2CA',$$

$$\therefore AA' = \sqrt{AC^2 - CA'^2} = \sqrt{(2CA')^2 - CA'^2} = \sqrt{3}CA';$$

②过点 O 作 $OH \perp A'C$ 于点 H ,



$\therefore \odot O$ 与 CA' 相切,

$$\therefore OE = OH, \angle A'HO = 90^\circ$$

$$\therefore \angle AA'C = \angle AEO = \angle A'EO = \angle A'HO = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $A'EOH$ 是矩形,

$$\text{又} \because OE = OH,$$

$\therefore$ 四边形 $A'EOH$ 是正方形,

$$\therefore OE = OH = A'H,$$

又 $\because OE$ 是 $\triangle ACA'$ 的中位线,

$$\therefore OE = \frac{1}{2}A'C$$

$$\therefore A'H = CH = \frac{1}{2}A'C$$

$$\therefore OH = CH$$

$$\text{又} \because \angle A'HO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OCH = 45^\circ$$

$$\text{又} \because OE \parallel A'C,$$

$$\therefore \angle AOE = 45^\circ$$

$$\text{又} \because \angle AEO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEO \text{ 是等腰直角三角形, } AE = OE,$$

$$\text{设 } AE = OE = r, \text{ 则 } AO = DO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{2}r$$

$$\therefore DE = DO - OE = \sqrt{2}r - r = (\sqrt{2} - 1)r$$

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AE^2 + DE^2 = AD^2$, $AD = 1$

$$\text{即 } r^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 r^2 = 1^2$$

$$\therefore r^2 = \frac{1}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{1}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \odot O \text{ 的面积为: } S = \pi r^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \pi$$

【点睛】 本题考查矩形的性质, 圆的切线的性质, 含 30° 角的直角三角形的性质, 等腰直角三角形的性质与判定, 中位线的性质定理, 角平分线的判定定理等知识, 掌握相关知识并正确作出辅助线是解题的关键.

23. 综合运用

如图 1, 在平面直角坐标系中, 正方形 $OABC$ 的顶点 A 在 x 轴的正半轴上, 如图 2, 将正方形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 45^\circ$), AB 交直线 $y = x$ 于点 E , BC 交 y 轴于点 F .

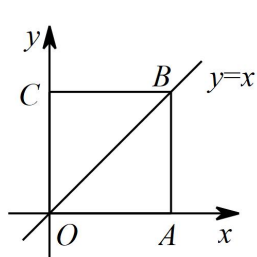


图1

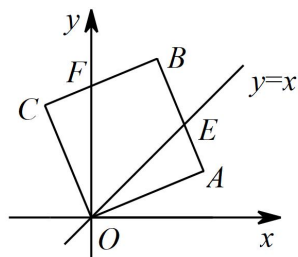


图2

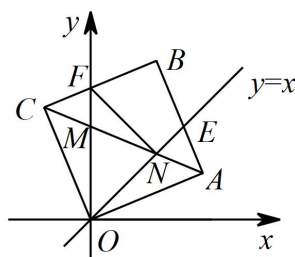


图3

- (1) 当旋转角 $\angle COF$ 为多少度时, $OE = OF$; (直接写出结果, 不要求写解答过程)
- (2) 若点 $A(4, 3)$, 求 FC 的长;
- (3) 如图 3, 对角线 AC 交 y 轴于点 M , 交直线 $y = x$ 于点 N , 连接 FN , 将 $\triangle OFN$ 与 $\triangle OCF$ 的面积分别记为 S_1 与 S_2 , 设 $S = S_1 - S_2$, $AN = n$, 求 S 关于 n 的函数表达式.

【答案】 (1) 22.5°

$$(2) FC = \frac{15}{4}$$

$$(3) S = \frac{1}{2}n^2$$

【解析】

【分析】 (1) 根据正方形的性质及直角三角形全等的判定及性质得出 $\angle AOG = \angle AOE$, 再由题意得出 $\angle EOG = 45^\circ$, 即可求解;

(2) 过点 A 作 $AP \perp x$ 轴, 根据勾股定理及点的坐标得出 $OA = 5$, 再由相似三角形的判定和性质求解即可;

(3) 根据正方形的性质及四点共圆条件得出 O, C, F, N 四点共圆, 再由圆周角定理及等腰直角三角形的判定和性质得出 $FN = ON$, $\angle FNO = 90^\circ$, 过点 N 作 $GQ \perp BC$ 于点 G , 交 OA 于点 Q , 利用全等三角形及矩形的判定和性质得出 $CG = OQ, CO = QG$, 结合图形分别表示出 S_1, S_2 , 得出 $S = S_1 - S_2 = NQ^2$, 再由等腰直角三角形的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 正方形 $OABC$,

$$\therefore OA = OC, \angle A = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore OE = OF,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OCF \cong \text{Rt}\triangle OAE (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle COF = \angle AOE,$$

$$\therefore \angle COF = \angle AOG,$$

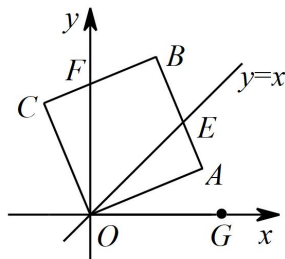
$$\therefore \angle AOG = \angle AOE,$$

$$\therefore AB \text{ 交直线 } y = x \text{ 于点 } E,$$

$$\therefore \angle EOG = 45^\circ,$$

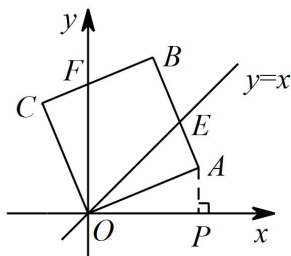
$$\therefore \angle AOG = \angle AOE = 22.5^\circ,$$

即 $\angle COF = 22.5^\circ$;



【小问 2 详解】

过点 A 作 $AP \perp x$ 轴, 如图所示:



$$\therefore A(4, 3),$$

$$\therefore AP = 3, OP = 4,$$

$$\therefore OA = 5,$$

$\because$ 正方形 $OABC$,

$$\therefore OC = OA = 5, \quad \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle C = \angle APO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOP = \angle COF,$$

$$\therefore \triangle OCF \sim \triangle OPA,$$

$$\therefore \frac{OC}{OP} = \frac{FC}{AP} \text{ 即 } \frac{5}{4} = \frac{FC}{3},$$

$$\therefore FC = \frac{15}{4};$$

【小问3 详解】

$\because$ 正方形 $OABC$,

$$\therefore \angle BCA = \angle OCA = 45^\circ,$$

$\because$ 直线 $y = x$,

$$\therefore \angle FON = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle FON = 45^\circ,$$

$\therefore O、C、F、N$ 四点共圆,

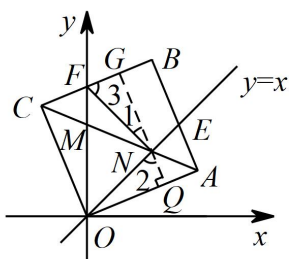
$$\therefore \angle OCN = \angle FON = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OFN = \angle FON = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle FON$ 为等腰直角三角形,

$$\therefore FN = ON, \quad \angle FNO = 90^\circ,$$

过点 N 作 $GQ \perp BC$ 于点 G , 交 OA 于点 Q ,



$$\therefore BC \parallel OA,$$

$$\therefore GQ \perp OA,$$

$$\therefore \angle FNO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \triangle FGN \cong \triangle NQO (\text{AAS})$$

$$\therefore GN = OQ, FG = QN,$$

$$\because GQ \perp BC, \angle FCO = \angle COQ = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } COQG \text{ 为矩形},$$

$$\therefore CG = OQ, CO = QG,$$

$$\therefore S_1 = S_{\triangle OFN} = \frac{1}{2} ON^2 = \frac{1}{2} (OQ^2 + NQ^2) = \frac{1}{2} (GN^2 + NQ^2) = \frac{1}{2} GN^2 + \frac{1}{2} NQ^2,$$

$$S_2 = S_{\triangle COF} = \frac{1}{2} CF \cdot CO = \frac{1}{2} (GC - FG)(GN + NQ) = \frac{1}{2} (GN^2 - NQ^2) = \frac{1}{2} GN^2 - \frac{1}{2} NQ^2,$$

$$\therefore S = S_1 - S_2 = NQ^2,$$

$$\because \angle OAC = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle AQN \text{ 为等腰直角三角形},$$

$$\therefore NQ = \frac{\sqrt{2}}{2} AN = \frac{\sqrt{2}}{2} n,$$

$$\therefore S = NQ^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} n \right)^2 = \frac{1}{2} n^2$$

【点睛】题目主要考查全等三角形、相似三角形及特殊四边形的判定和性质，四点共圆的性质，理解题意，作出辅助线，综合运用这些知识点是解题关键。

