

2023 年山西省中考数学真题

第 I 卷 选择题 (共 30 分)

一、选择题 (本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分。在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑)

1. 计算 $(-1) \times (-3)$ 的结果为 ().

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. -4

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据有理数乘法运算法则计算即可.

【详解】 解: $(-1) \times (-3) = 3$.

故选 A.

【点睛】 本题主要考查了有理数乘法，掌握“同号得正、异号得负”的规律是解答本题的关键.

2. 全民阅读有助于提升一个国家、一个民族的精神力量. 图书馆是开展全民阅读的重要场所. 以下是我省四个地市的图书馆标志，其文字上方的图案是轴对称图形的是 ()

- A.  太原图书馆
Tianyuan library
- B.  晋中市图书馆
Jinzhong city library
- C.  阳泉图书馆
Yangquan library
- D.  临汾市图书馆
Linfen library

【答案】 C

【解析】

【分析】 如果一个图形沿着某条直线对折后，直线两旁的部分能够重合，则称这个图形是轴对称图形，这条直线叫做对称轴；根据这个概念判断即可.

【详解】 解: 根据轴对称图形的概念知，C 选项中文字上方的图案是轴对称图形，

故选: C.

【点睛】 本题考查了轴对称图形，理解此概念是关键.

3. 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(-a^3b)^2 = -a^6b^2$ C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(a^2)^3 = a^6$

【答案】 D

【解析】

【分析】 根据同底数幂乘法法则、积的乘方及幂的乘方法则逐一计算即可得答案.

【详解】A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项计算错误，不符合题意，

B. $(-a^3b)^2 = a^6b^2$ ，故该选项计算错误，不符合题意，

C. $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故该选项计算错误，不符合题意，

D. $(a^2)^3 = a^6$ ，故该选项计算正确，符合题意，

故选：D.

【点睛】本题考查同底数幂乘法、积的乘方及幂的乘方，熟练掌握运算是解题关键.

4. 山西是全国电力外送基地，2022 年山西省全年外送电量达到 1464 亿千瓦时，同比增长 18.55% . 数据 1464 亿千瓦时用科学记数法表示为 ()



A. 1.464×10^8 千瓦时

B. 1464×10^8 千瓦时

C. 1.464×10^{11} 千瓦时

D. 1.464×10^{12} 千瓦时

【答案】C

【解析】

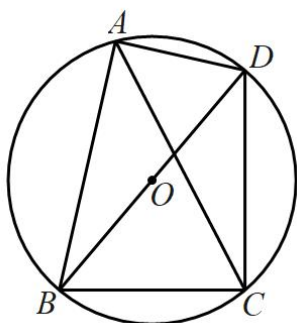
【分析】根据科学记数法表示规则写出即可.

【详解】1464 亿 $= 146400000000 = 1.464 \times 10^{11}$ ，

故选：C.

【点睛】此题考查了科学记数法，解题的关键是熟悉科学记数法规则 ($a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$)).

5. 如图，四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AC, BD 为对角线， BD 经过圆心 O . 若 $\angle BAC = 40^\circ$ ，则 $\angle DBC$ 的度数为 ()



A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°

【答案】B

【解析】

【分析】由同弧所对圆周角相等及直角三角形的性质即可求解.

【详解】解: $\because \widehat{BC} = \widehat{BC}$,

$$\therefore \angle BDC = \angle BAC = 40^\circ,$$

 $\because BD$ 为圆的直径,

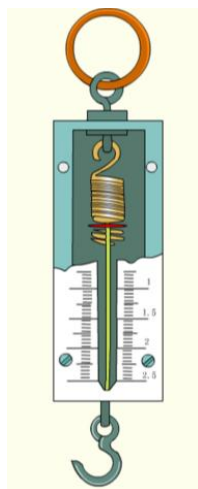
$$\therefore \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = 90^\circ - \angle BDC = 50^\circ;$$

故选: B.

【点睛】本题考查了直径所对的圆周角是直角, 同圆中同弧所对的圆周角相等, 直角三角形两锐角互余, 掌握它们是关键.

6. 一种弹簧秤最大能称不超过 10kg 的物体, 不挂物体时弹簧的长为 12cm , 每挂重 1kg 物体, 弹簧伸长 0.5cm . 在弹性限度内, 挂重后弹簧的长度 $y(\text{cm})$ 与所挂物体的质量 $x(\text{kg})$ 之间的函数关系式为 ()



A. $y = 12 - 0.5x$

B. $y = 12 + 0.5x$

C. $y = 10 + 0.5x$

D. $y = 0.5x$

【答案】B

【解析】

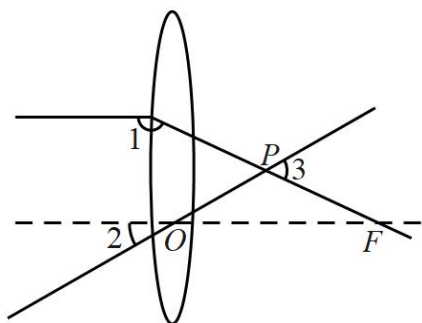
【分析】挂重后弹簧长度等于不挂重时的长度加上挂重后弹簧伸长的长度, 据此即可求得函数关系式.

【详解】解: 由题意知: $y = 12 + 0.5x$;

故选: B.

【点睛】本题考查了求函数关系式, 正确理解题意是关键.

7. 如图，一束平行于主光轴的光线经凸透镜折射后，其折射光线与一束经过光心 O 的光线相交于点 P ，点 F 为焦点。若 $\angle 1 = 155^\circ$, $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为 ()



- A. 45° B. 50° C. 55° D. 60°

【答案】C

【解析】

【分析】利用平行线的性质及三角形外角的性质即可求解.

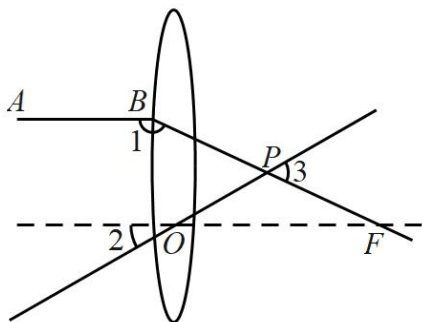
【详解】解: $\because AB \parallel OF$,

$$\therefore \angle 1 + \angle BFO = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BFO = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ,$$

$$\therefore \angle POF = \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle POF + \angle BFO = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ;$$



故选: C.

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形外角的性质等知识，掌握这两个知识点是关键.

8. 已知 $A(-2, a)$, $B(-1, b)$, $C(3, c)$ 都在反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象上，则 a 、 b 、 c 的关系是 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $c < b < a$ D. $c < a < b$

【答案】B

【解析】

【分析】先根据反比例函数中 $k > 0$ 判断出函数图象所在的象限及增减性，再根据各点横坐标的特点即可得出结论.

【详解】解：∵ 反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 中 $k > 0$,

∴ 函数图象的两个分支分别位于一、三象限，且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小.

∵ $-2 < 0, -1 < 0$,

∴ $A(-2, a), B(-1, b)$ 位于第三象限,

∴ $a < 0, b < 0$,

∵ $-2 < -1 < 0$,

∴ $0 > a > b$.

∵ $3 > 0$,

∴ 点 $C(3, c)$ 位于第一象限,

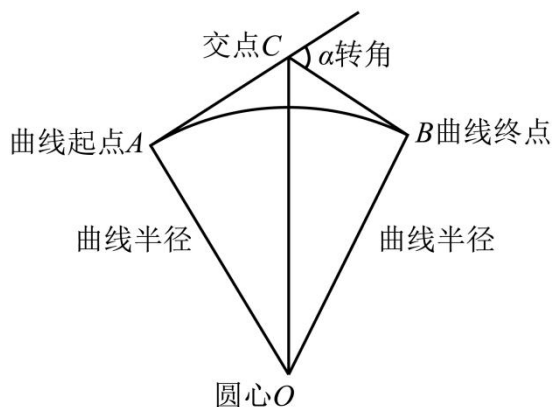
∴ $c > 0$,

∴ $b < a < c$.

故选：B.

【点睛】本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

9. 中国高铁的飞速发展，已成为中国现代化建设的重要标志. 如图是高铁线路在转向处所设计的圆曲线（即圆弧），高铁列车在转弯时的曲线起点为 A ，曲线终点为 B ，过点 A, B 的两条切线相交于点 C ，列车在从 A 到 B 行驶的过程中转角 α 为 60° . 若圆曲线的半径 $OA = 1.5\text{km}$ ，则这段圆曲线 $\widehat{AB}$ 的长为 ().



A. $\frac{\pi}{4}$ km

B. $\frac{\pi}{2}$ km

C. $\frac{3\pi}{4}$ km

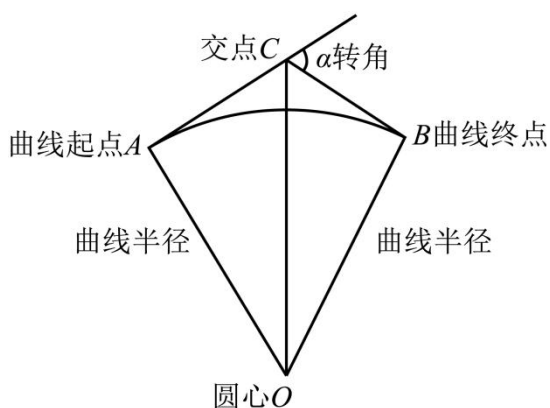
D. $\frac{3\pi}{8}$ km

【答案】B

【解析】

【分析】由转角 α 为 60° 可得 $\angle ACB = 120^\circ$ ，由切线的性质可得 $\angle OAC = \angle OBC = 90^\circ$ ，根据四边形的内角和定理可得 $\angle AOB = 360^\circ - \angle ACB - \angle OAC - \angle OBC = 60^\circ$ ，然后根据弧长公式计算即可。

【详解】解：如图：



$$\because \angle \alpha = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = 120^\circ,$$

$\because$ 过点 A, B 的两条切线相交于点 C ,

$$\therefore \angle OAC = \angle OBC = 90^\circ,$$

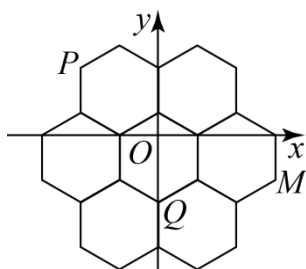
$$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle ACB - \angle OAC - \angle OBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \frac{60^\circ \times \pi \times 2 \times 1.5}{360^\circ} = \frac{\pi}{2} \text{ km}.$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了圆的切线的性质、弧长公式等知识点，根据题意求得 $\angle AOB = 60^\circ$ 是解答本题的关键。

10. 蜂巢结构精巧，其巢房横截面的形状均为正六边形. 如图是部分巢房的横截面图，图中 7 个全等的正六边形不重叠且无缝隙，将其放在平面直角坐标系中，点 P, Q, M 均为正六边形的顶点. 若点 P, Q 的坐标分别为 $(-2\sqrt{3}, 3), (0, -3)$ ，则点 M 的坐标为 ()



- A. $(3\sqrt{3}, -2)$ B. $(3\sqrt{3}, 2)$ C. $(2, -3\sqrt{3})$ D. $(-2, -3\sqrt{3})$

【答案】A

【解析】

【分析】连接 PF ，设正六边形的边长为 a ，由正六边形的性质及点 P 的坐标可求得 a 的值，即可求得点 M 的坐标.

【详解】解：连接 PF ，如图，设正六边形的边长为 a ，

$$\therefore \angle ABC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAO = 30^\circ,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2}a, \quad OA = \frac{\sqrt{3}a}{2},$$

$$\therefore AC = CE = \sqrt{3}a, \quad OF = OB + BF = \frac{3a}{2},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (-2\sqrt{3}, 3),$$

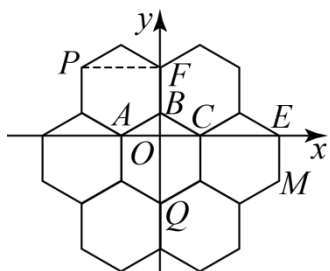
$$\therefore \frac{3a}{2} = 3,$$

$$\text{即 } a = 2;$$

$$\therefore OE = OC + CE = \frac{3\sqrt{3}a}{2} = 3\sqrt{3}, \quad EM = 2,$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } (3\sqrt{3}, -2).$$

故选：A.



【点睛】本题考查了坐标与图形，正六边形的性质，勾股定理，含 30° 角直

角三角形的性质等知识，掌握这些知识是解题的关键.

第 II 卷 非选择题 (共 90 分)

二、填空题 (本大题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分)

11. 计算 $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ 的结果为_____.

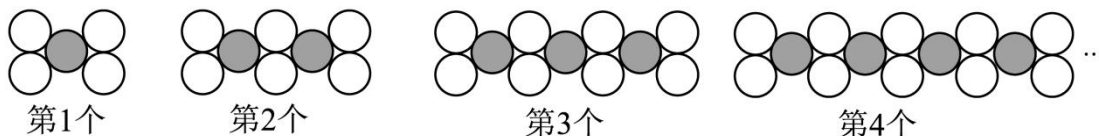
【答案】 -1

【解析】

【分析】 此题用平方差公式计算即可.

$$\begin{aligned}
 & \text{【详解】 } (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \\
 &= (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2 \\
 &= 2 - 3 \\
 &= -1
 \end{aligned}$$

12. 如图是一组有规律的图案, 它由若干个大小相同的圆片组成. 第1个图案中有4个白色圆片, 第2个图案中有6个白色圆片, 第3个图案中有8个白色圆片, 第4个图案中有10个白色圆片, ...依此规律, 第 n 个图案中有_____个白色圆片 (用含 n 的代数式表示)

【答案】 $(2+2n)$

【解析】

【分析】 由于第1个图案中有4个白色圆片 $4 = 2 + 2 \times 1$, 第2个图案中有6个白色圆片 $6 = 2 + 2 \times 2$, 第3个图案中有8个白色圆片 $8 = 2 + 2 \times 3$, 第4个图案中有10个白色圆片 $10 = 2 + 2 \times 4$, ..., 可得第 $n(n > 1)$ 个图案中有白色圆片的总数为 $2 + 2n$.

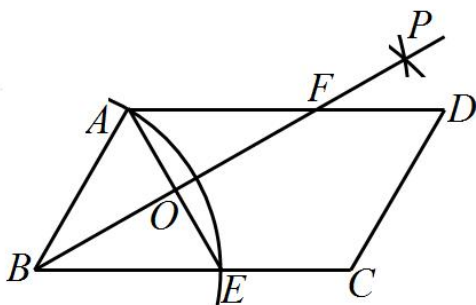
【详解】 解: 第1个图案中有4个白色圆片 $4 = 2 + 2 \times 1$,
 第2个图案中有6个白色圆片 $6 = 2 + 2 \times 2$,
 第3个图案中有8个白色圆片 $8 = 2 + 2 \times 3$,
 第4个图案中有10个白色圆片 $10 = 2 + 2 \times 4$,
 ...,
 $\therefore$ 第 $n(n > 1)$ 个图案中有 $(2 + 2n)$ 个白色圆片.

故答案为: $(2 + 2n)$.

【点睛】 此题考查图形的变化规律, 通过从一些特殊的数字变化中发现不变的因素或按规律变化的因素, 然后推广到一般情况. 解题关键是总结归纳出图形的变化规律.

13. 如图, 在 $ABCD$ 中, $\angle D = 60^\circ$. 以点 B 为圆心, 以 BA 的长为半径作弧交边 BC 于点 E , 连接 AE . 分

别以点 A, E 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}AE$ 的长为半径作弧，两弧交于点 P ，作射线 BP 交 AE 于点 O ，交边 AD 于点 F ，则 $\frac{OF}{OE}$ 的值为_____.



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】

【分析】证明 $BO \perp AE$ ， $AO = OE$ ， $\angle BAO = \angle FAO = 60^\circ$ ，再利用正切函数的定义求解即可.

【详解】解： $\because$ 在 $ABCD$ 中， $\angle D = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$ ， $AD \parallel BC$ ，

由作图知 BP 平分 $\angle ABC$ ， $BA = BE$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 是等边三角形， $\angle ABF = \angle EBF = \frac{1}{2}\angle ABC = 30^\circ$ ，

$\therefore BO \perp AE$ ， $AO = OE$ ，

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle AFB = \angle EBF = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AFB = \angle ABF = 30^\circ$ ，

$\therefore AB = AF$ ，

$\because BO \perp AE$ ，

$\therefore \angle BAO = \angle FAO = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ - 30^\circ) = 60^\circ$ ，

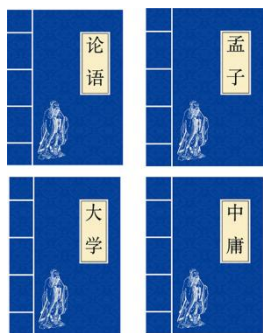
$\therefore \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{AO} = \tan \angle FAO = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ ，

故答案为： $\sqrt{3}$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，角平分线的定义，尺规作图——作角平分线，等边三角形的判定和性质，正切函数的定义，求得 $\angle BAO = \angle FAO = 60^\circ$ 是解题的关键.

14. 中国古代的“四书”是指《论语》《孟子》《大学》《中庸》，它是儒家思想的核心著作，是中国传统文化的重要组成部分，若从这四部著作中随机抽取两本（先随机抽取一本，不放回，再随机抽取另一本），则抽

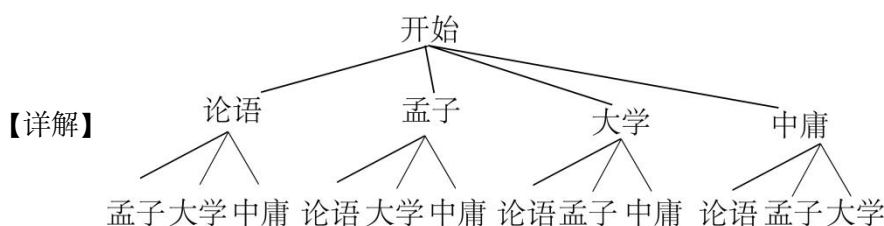
取的两本恰好是《论语》和《大学》的概率是_____.



【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】用树状图把所有情况列出来，即可求出.



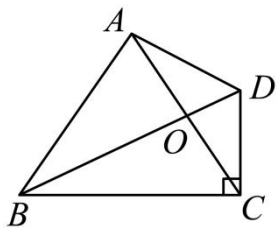
总共有 12 种组合，

《论语》和《大学》的概率 $\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$,

故答案为: $\frac{1}{6}$.

【点睛】此题考查了用树状图或列表法求概率，解题的关键是熟悉树状图或列表法，并掌握概率计算公式.

15. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle BCD = 90^\circ$ ，对角线 AC, BD 相交于点 O 。若 $AB = AC = 5, BC = 6, \angle ADB = 2\angle CBD$ ，则 AD 的长为_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{97}}{3}$ 或 $\frac{1}{3}\sqrt{97}$

【解析】

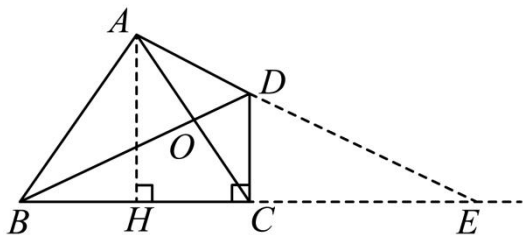
【分析】过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，延长 AD ， BC 交于点 E ，根据等腰三角形性质得出 $BH = HC = \frac{1}{2}BC = 3$ ，根据勾股定理求出 $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 4$ ，证明 $\angle CBD = \angle CED$ ，得出

$DB = DE$ ，根据等腰三角形性质得出 $CE = BC = 6$ ，证明 $CD \parallel AH$ ，得出 $\frac{CD}{AH} = \frac{CE}{HE}$ ，求出 $CD = \frac{8}{3}$ ，

根据勾股定理求出 $DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{97}}{3}$ ，根据 $CD \parallel AH$ ，得出 $\frac{DE}{AD} = \frac{CE}{CH}$ ，即

$$\frac{\frac{2\sqrt{97}}{3}}{\frac{3}{AD}} = \frac{6}{3}，\text{求出结果即可。}$$

【详解】解：过点 A 作 $AH \perp BC$ 于点 H ，延长 AD ， BC 交于点 E ，如图所示：



则 $\angle AHC = \angle AHB = 90^\circ$ ，

$\therefore AB = AC = 5, BC = 6$ ，

$\therefore BH = HC = \frac{1}{2}BC = 3$ ，

$\therefore AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = 4$ ，

$\therefore \angle ADB = \angle CBD + \angle CED$ ， $\angle ADB = 2\angle CBD$ ，

$\therefore \angle CBD = \angle CED$ ，

$\therefore DB = DE$ ，

$\therefore \angle BCD = 90^\circ$ ，

$\therefore DC \perp BE$ ，

$\therefore CE = BC = 6$ ，

$\therefore EH = CE + CH = 9$ ，

$\therefore DC \perp BE$ ， $AH \perp BC$ ，

$\therefore CD \parallel AH$ ，

$\therefore \triangle ECD \sim \triangle EHA$ ，

$\therefore \frac{CD}{AH} = \frac{CE}{HE}$ ，

即 $\frac{CD}{4} = \frac{6}{9}$ ，

解得： $CD = \frac{8}{3}$ ，

$$\therefore DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{97}}{3},$$

$$\because CD \parallel AH,$$

$$\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{CE}{CH},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{2\sqrt{97}}{3}}{AD} = \frac{6}{3},$$

$$\text{解得: } AD = \frac{\sqrt{97}}{3}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{97}}{3}.$$

【点睛】本题主要考查了三角形外角的性质，等腰三角形的判定和性质，勾股定理，平行线分线段成比例，相似三角形的判定与性质，平行线的判定，解题的关键是作出辅助线，熟练掌握平行线分线段成比例定理及相似三角形的判定与性质.

三、解答题（本大题共 8 个小题，共 75 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

$$16. (1) \text{ 计算: } |-8| \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-3+5) \times 2^{-1};$$

$$(2) \text{ 计算: } x(x+2) + (x+1)^2 - 4x.$$

$$\text{【答案】 (1) } 1; (2) 2x^2 + 1$$

【解析】

【分析】(1) 分别计算绝对值、乘方、加法及负整数指数幂，再计算有理数的乘法与减法即可；

(2) 分别利用单项式乘多项式、完全平方公式展开后，再合并同类项即可.

$$\text{【详解】 (1) 解: 原式} = 8 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1.$$

$$(2) \text{ 解: 原式} = x^2 + 2x + x^2 + 2x + 1 - 4x$$

$$= 2x^2 + 1.$$

【点睛】本题考查了实数的混合运算，整式的混合运算，涉及负整数指数幂、绝对值、多项式的乘法、完全平方公式等知识，掌握运算顺序、多项式的乘法法则是解题的关键.

17. 解方程: $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{3}{2x-2}$.

【答案】 $x = \frac{3}{2}$

【解析】

【分析】 去分母化为整式方程，求出方程的根并检验即可得出答案.

【详解】 解：原方程可化为 $\frac{1}{x-1} + 1 = \frac{3}{2(x-1)}$.

方程两边同乘 $2(x-1)$ ，得 $2 + 2(x-1) = 3$.

解得 $x = \frac{3}{2}$.

检验：当 $x = \frac{3}{2}$ 时， $2(x-1) \neq 0$.

$\therefore$ 原方程的解是 $x = \frac{3}{2}$.

【点睛】 本题考查了分式方程的解法，熟练掌握解分式方程的方法是解题关键.

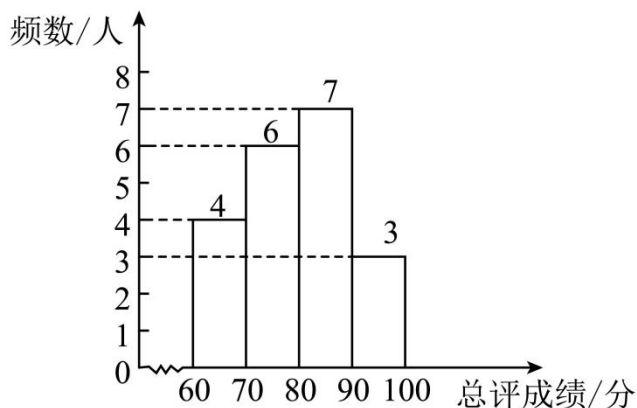
18. 为增强学生的社会实践能力,促进学生全面发展,某校计划建立小记者站,有 20 名学生报名参加选拔.报名的学生需参加采访、写作、摄影三项测试,每项测试均由七位评委打分(满分 100 分),取平均分作为该项的测试成绩,再将采访、写作、摄影三项的测试成绩按 4:4:2 的比例计算出每人的总评成绩.



小记者

小悦、小涵的三项测试成绩和总评成绩如下表,这 20 名学生的总评成绩频数直方图(每组含最小值,不含最大值)如下图

选手	测试成绩/分			总评成绩/分
	采访	写作	摄影	
小悦	83	72	80	78
小涵	86	84	▲	▲



(1) 在摄影测试中，七位评委给小涵打出的分数如下：67，72，68，69，74，69，71. 这组数据的中位数是_____分，众数是_____分，平均数是_____分；

(2) 请你计算小涵的总评成绩；

(3) 学校决定根据总评成绩择优选拔 12 名小记者. 试分析小悦、小涵能否入选，并说明理由.

【答案】 (1) 69，69，70

(2) 82 分 (3) 小涵能入选，小悦不一定能入选，见解析

【解析】

【分析】 (1) 从小到大排序，找出中位数、众数即可，算出平均数.

(2) 将采访、写作、摄影三项的测试成绩按 4:4:2 的比例计算出的总评成绩即可.

(3) 小涵和小悦的总评成绩分别是 82 分，78 分，学校要选拔 12 名小记者，小涵的成绩在前 12 名，因此小涵一定能入选；小悦的成绩不一定在前 12 名，因此小悦不一定能入选.

【小问 1 详解】

从小到大排序，

67，68，69，69，71，72，74，

∴ 中位数是 69，

众数是 69，

平均数： $\frac{67+68+69+69+71+72+74}{7} = 70$

69，69，70

【小问 2 详解】

解： $\bar{x} = \frac{86 \times 4 + 84 \times 4 + 70 \times 2}{4 + 4 + 2} = 82$ (分).

答：小涵的总评成绩为 82 分.

【小问 3 详解】

结论：小涵能入选，小悦不一定能入选

理由：由频数直方图可得，总评成绩不低于 80 分的学生有 10 名，总评成绩不低于 70 分且小宁 80 分的学生有 6 名．小涵和小悦的总评成绩分别是 82 分，78 分，学校要选拔 12 名小记者，小涵的成绩在前 12 名，因此小涵一定能入选；小悦的成绩不一定在前 12 名，因此小悦不一定能入选．

【点睛】此题考查了中位数、众数、平均数，解题的关键是熟悉相关概念．

19. 风陵渡黄河公路大桥是连接山西、陕西、河南三省的交通要塞．该大桥限重标志牌显示，载重后总质量超过 30 吨的车辆禁止通行．现有一辆自重 8 吨的卡车，要运输若干套某种设备，每套设备由 1 个 A 部件和 3 个 B 部件组成，这种设备必须成套运输．已知 1 个 A 部件和 2 个 B 部件的总质量为 2.8 吨，2 个 A 部件和 3 个 B 部件的质量相等．



- (1) 求 1 个 A 部件和 1 个 B 部件的质量各是多少；
- (2) 卡车一次最多可运输多少套这种设备通过此大桥？

【答案】(1) 一个 A 部件的质量为 1.2 吨，一个 B 部件的质量为 0.8 吨

(2) 6 套

【解析】

【分析】(1) 设一个 A 部件的质量为 x 吨，一个 B 部件的质量为 y 吨．然后根据等量关系“1 个 A 部件和 2 个 B 部件的总质量为 2.8 吨”和“2 个 A 部件和 3 个 B 部件的质量相等”列二元一次方程组求解即可；

(2) 设该卡车一次可运输 m 套这种设备通过此大桥．根据“载重后总质量超过 30 吨的车辆禁止通行”列不等式再结合 m 为整数求解即可．

【小问 1 详解】

解：设一个 A 部件的质量为 x 吨，一个 B 部件的质量为 y 吨．

根据题意，得
$$\begin{cases} x + 2y = 2.8 \\ 2x = 3y \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x = 1.2 \\ y = 0.8 \end{cases}.$$

答：一个 A 部件的质量为 1.2 吨，一个 B 部件的质量为 0.8 吨.

【小问 2 详解】

解：设该卡车一次可运输 m 套这种设备通过此大桥.

根据题意，得 $(1.2 + 0.8 \times 3)m + 8 \leq 30$.

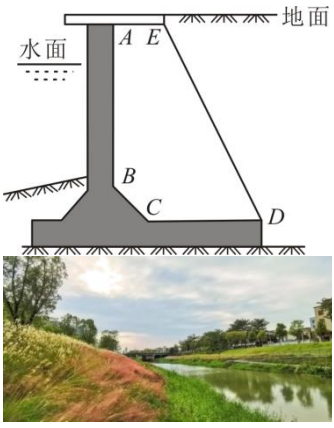
解得 $m \leq \frac{55}{9}$.

因为 m 为整数， m 取最大值，所以 $m = 6$.

答：该卡车一次最多可运输 6 套这种设备通过此大桥.

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用等知识点，正确列出二元一次方程组和不等式是解答本题的关键.

20. 2023 年 3 月，水利部印发《母亲河复苏行动河湖名单（2022－2025 年）》，我省境内有汾河、桑干河、洋河、清漳河、浊漳河、沁河六条河流入选. 在推进实施母亲河复苏行动中，需要砌筑各种驳岸（也叫护坡）. 某校“综合与实践”小组的同学把“母亲河驳岸的调研与计算”作为一项课题活动，利用课余时间完成了实践调查，并形成了如下活动报告. 请根据活动报告计算 BC 和 AB 的长度（结果精确到 0.1m. 参考数据： $\sqrt{3} \approx 1.73$ ， $\sqrt{2} \approx 1.41$ ）.

课 题	母亲河驳岸的调研与计算		
调 查 方 式	资料查阅、水利部门走访、实地查看了解		
	功能	驳岸是用来保护河岸，阻止河岸崩塌或冲刷的构筑物	
	驳岸 剖面 图		相关数据及说明，图中，点 A, B, C, D, E 在同一竖直平面内， AE 与 CD 均与地面平行，岸墙 $AB \perp AE$ 于点 A ， $\angle BCD = 135^\circ$ ， $\angle EDC = 60^\circ$ ， $ED = 6\text{m}$ ， $AE = 1.5\text{m}$ ， $CD = 3.5\text{m}$

	计算结果	
交流展示		

【答案】 BC 的长约为 1.4m , AB 的长约为 4.2m .

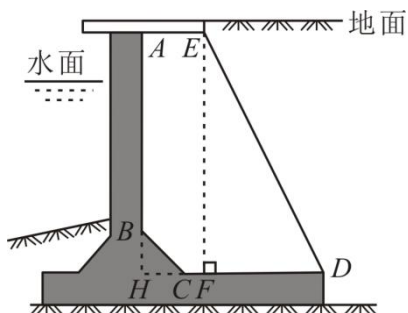
【解析】

【分析】过点 E 作 $EF \perp CD$ 于点 F ，延长 AB, DC 交于点 H ，首先根据 $\angle EDF$ 的三角函数值求出

$EF = ED \cdot \sin \angle EDF = 3\sqrt{3}$, $FD = ED \cdot \cos \angle EDF = 3$, 然后得到四边形 $AEFH$ 是矩形, 进而得到 $CH = HF - CF = 1.5 - 0.5 = 1$, 然后在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中利用 $\angle BCH$ 的三角函数值求出

$$BC = \frac{CH}{\cos \angle BCH} = \sqrt{2} \approx 1.4(\text{m}), \text{ 进而求解即可.}$$

【详解】解：过点 E 作 $EF \perp CD$ 于点 F ，延长 AB, DC 交于点 H ，



$$\therefore \angle EFD = 90^\circ.$$

由题意得, 在 $\text{Rt}\triangle EFD$ 中, $\angle EDF = 60^\circ$, $ED = 6$, $\sin \angle EDF = \frac{EF}{ED}$, $\cos \angle EDF = \frac{FD}{ED}$.

$$\therefore EF = ED \cdot \sin \angle EDF = 6 \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore FD = ED \cdot \cos \angle EDF = 6 \times \cos 60^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$$

由题意得, $\angle H = 90^\circ$, 四边形 $AEFH$ 是矩形.

$$\therefore AH = EF = 3\sqrt{3}, HF = AE = 1.5.$$

$$\therefore CF = CD - FD = 3.5 - 3 = 0.5,$$

$$\therefore CH = HF - CF = 1.5 - 0.5 = 1.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BCH \text{ 中, } \angle H = 90^\circ, \angle BCH = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

$$\therefore \cos \angle BCH = \frac{CH}{BC}, \tan \angle BCH = \frac{BH}{CH}.$$

$$\therefore BC = \frac{CH}{\cos \angle BCH} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.4(\text{m}).$$

$$\therefore BH = CH \cdot \tan \angle BCH = 1 \times \tan 45^\circ = 1,$$

$$\therefore AB = AH - BH = 3\sqrt{3} - 1 \approx 3 \times 1.73 - 1 \approx 4.2(\text{m}).$$

答: BC 的长约为 1.4m, AB 的长约为 4.2m.

【点睛】本题是解直角三角形的应用,考查了矩形的判定与性质,解直角三角形,关键是理解坡度的含义,构造适当的辅助线便于在直角三角形中求得相关线段.

21. 阅读与思考: 下面是一位同学的数学学习笔记, 请仔细阅读并完成相应任务.

瓦里尼翁平行四边形

我们知道, 如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点, 顺次连接 E, F, G, H , 得到的四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

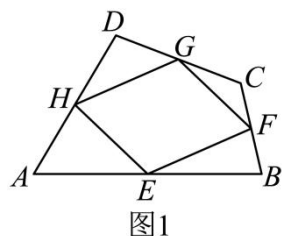


图1

我查阅了许多资料, 得知这个平行四边形 $EFGH$ 被称为瓦里尼翁平行四边形. 瓦里尼翁 (Varignon, Pierre 1654–1722) 是法国数学家、力学家. 瓦里尼翁平行四边形与原四边形关系密切.



①当原四边形的对角线满足一定关系时, 瓦里尼翁平行四边形可能是菱形、矩形或正方形.

②瓦里尼翁平行四边形的周长与原四边形对角线的长度也有一定关系.

③瓦里尼翁平行四边形的面积等于原四边形面积的一半。此结论可借助图 1 证明如下：

证明：如图 2，连接 AC ，分别交 EH, FG 于点 P, Q ，过点 D 作 $DM \perp AC$ 于点 M ，交 HG 于点 N 。

$\because H, G$ 分别为 AD, CD 的中点， $\therefore HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2}AC$ 。（依据 1）

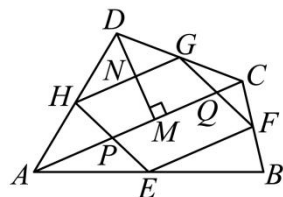


图2

$\therefore \frac{DN}{NM} = \frac{DG}{GC}$ ， $\because DG = GC$ ， $\therefore DN = NM = \frac{1}{2}DM$ 。

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是瓦里尼翁平行四边形， $\therefore HE \parallel GF$ ，即 $HP \parallel GQ$ 。

$\because HG \parallel AC$ ，即 $HG \parallel PQ$ ，

$\therefore$ 四边形 $HPQG$ 是平行四边形。（依据 2） $\therefore S_{\square HPQG} = HG \cdot MN = \frac{1}{2}HG \cdot DM$ 。

$\because S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot DM = HG \cdot DM$ ， $\therefore S_{\square HPQG} = \frac{1}{2}S_{\triangle ADC}$ 。同理，...

任务：

(1) 填空：材料中的依据 1 是指：_____。

依据 2 是指：_____。

(2) 请用刻度尺、三角板等工具，画一个四边形 $ABCD$ 及它的瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ ，使得四边形 $EFGH$ 为矩形；（要求同时画出四边形 $ABCD$ 的对角线）

(3) 在图 1 中，分别连接 AC, BD 得到图 3，请猜想瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长与对角线 AC, BD 长度的关系，并证明你的结论。

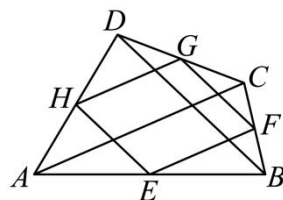


图3

【答案】 (1) 三角形中位线定理（或三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半）；平行四边形的定义（或两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形）

(2) 答案不唯一，见解析

(3) 平行四边形 $EFGH$ 的周长等于对角线 AC 与 BD 长度的和，见解析

【解析】

【分析】(1) 根据三角形中位线定理和平行四边形的定义解答即可；

(2) 作对角线互相垂直的四边形，再顺次连接这个四边形各边中点即可；

(3) 根据三角形中位线定理得瓦里尼翁平行四边形一组对边和等于四边形的一条对角线，即可得结论。

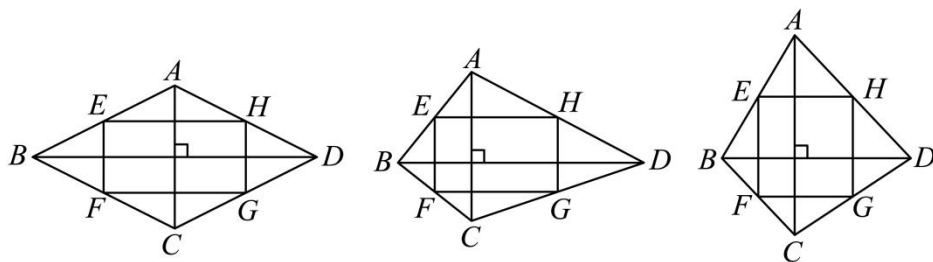
【小问 1 详解】

解：三角形中位线定理（或三角形的中位线平行于第三边，且等于第三边的一半）

平行四边形的定义（或两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形）

【小问 2 详解】

解：答案不唯一，只要是对角线互相垂直的四边形，它的瓦里尼翁平行四边形即为矩形均可。例如：如图即为所求



【小问 3 详解】

瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长等于四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC 与 BD 长度的和，

证明如下：∵ 点 E, F, G, H 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2} AC, GH = \frac{1}{2} AC.$$

$$\therefore EF + GH = AC.$$

$$\text{同理 } EH + FG = BD.$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的周长} = EF + GH + EH + FG = AC + BD.$$

即瓦里尼翁平行四边形 $EFGH$ 的周长等于对角线 AC 与 BD 长度的和。

【点睛】本题考查平行四边形的判定，矩形的判定，三角形中位线。熟练掌握三角形中位线定理是解题的关键。

22. 问题情境：“综合与实践”课上，老师提出如下问题：将图 1 中的矩形纸片沿对角线剪开，得到两个全等的三角形纸片，表示为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ ，其中 $\angle ACB = \angle DEF = 90^\circ, \angle A = \angle D$ 。将 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DFE$ 按图 2 所示方式摆放，其中点 B 与点 F 重合（标记为点 B ）。当 $\angle ABE = \angle A$ 时，延长 DE 交 AC 于点 G 。试判断四边形 $BCGE$ 的形状，并说明理由。

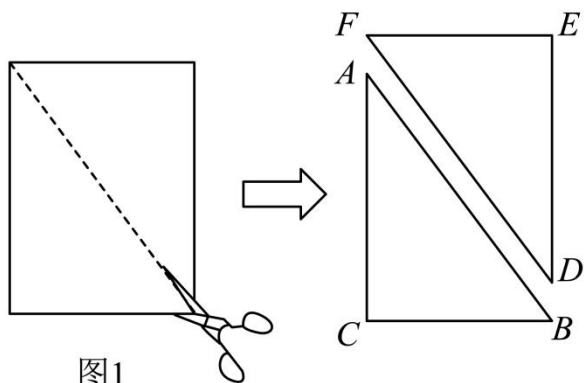


图1

- (1) 数学思考：谈你解答老师提出的问题；
- (2) 深入探究：老师将图 2 中的 $\triangle DBE$ 绕点 B 逆时针方向旋转，使点 E 落在 $\triangle ABC$ 内部，并让同学们提出新的问题.

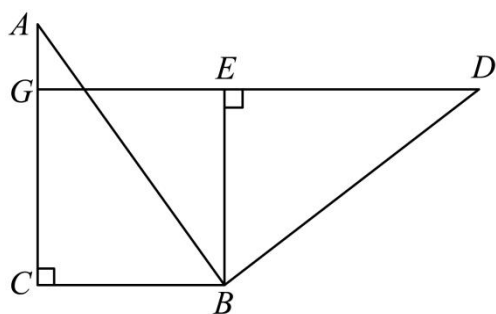


图2

- ①“善思小组”提出问题：如图 3，当 $\angle ABE = \angle BAC$ 时，过点 A 作 $AM \perp BE$ 交 BE 的延长线于点 M ， BM 与 AC 交于点 N ．试猜想线段 AM 和 BE 的数量关系，并加以证明．请你解答此问题；

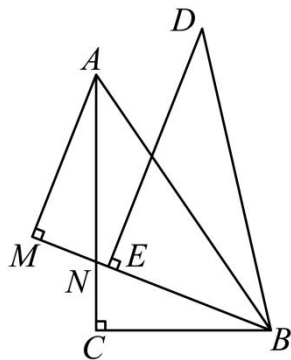


图3

- ②“智慧小组”提出问题：如图 4，当 $\angle CBE = \angle BAC$ 时，过点 A 作 $AH \perp DE$ 于点 H ，若 $BC = 9, AC = 12$ ，求 AH 的长．请你思考此问题，直接写出结果．

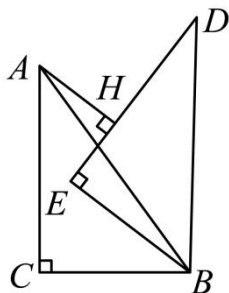


图4

【答案】(1) 正方形，见解析

(2) ① $AM = BE$ ，见解析；② $\frac{27}{5}$

【解析】

【分析】(1) 先证明四边形 $BCGE$ 是矩形，再由 $\triangle ACB \cong \triangle DEB$ 可得 $BC = BE$ ，从而得四边形 $BCGE$ 是正方形；

(2) ①由已知 $\angle ABE = \angle BAC$ 可得 $AN = BN$ ，再由等积方法 $S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2}AN \cdot BC = \frac{1}{2}BN \cdot AM$ ，再结合已知即可证明结论；②设 AB, DE 的交点为 M ，过 M 作 $MG \perp BD$ 于 G ，则易得 $MD = MB$ ，点 G 是 BD 的中点；利用三角函数知识可求得 DM 的长，进而求得 AM 的长，利用相似三角形的性质即可求得结果。

【小问 1 详解】

解：四边形 $BCGE$ 为正方形。理由如下：

$$\because \angle BED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG = 180^\circ - \angle BED = 90^\circ.$$

$$\because \angle ABE = \angle A,$$

$$\therefore AC \parallel BE.$$

$$\therefore \angle CGE = \angle BED = 90^\circ.$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \text{四边形 } BCGE \text{ 为矩形}.$$

$$\because \triangle ACB \cong \triangle DEB,$$

$$\therefore BC = BE.$$

$$\therefore \text{矩形 } BCGE \text{ 为正方形}.$$

【小问 2 详解】

$$\therefore \text{① } AM = BE.$$

证明： $\because \angle ABE = \angle BAC$,

$$\therefore AN = BN.$$

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore BC \perp AN.$$

$$\because AM \perp BE, \text{ 即 } AM \perp BN,$$

$$\therefore S_{\triangle ABN} = \frac{1}{2} AN \cdot BC = \frac{1}{2} BN \cdot AM.$$

$$\because AN = BN,$$

$$\therefore BC = AM.$$

$$\text{由 (1) 得 } BE = BC,$$

$$\therefore AM = BE.$$

②解：如图：设 AB, DE 的交点为 M ，过 M 作 $MG \perp BD$ 于 G ，

$$\because \triangle ACB \cong \triangle DEB,$$

$$\therefore BE = BC = 9, DE = AC = 12, \angle A = \angle D, \angle ABC = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle DBM;$$

$$\because \angle CBE = \angle BAC,$$

$$\therefore \angle D = \angle BAC,$$

$$\therefore MD = MB,$$

$$\because MG \perp BD,$$

$$\therefore \text{点 } G \text{ 是 } BD \text{ 的中点};$$

$$\text{由勾股定理得 } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 15,$$

$$\therefore DG = \frac{1}{2} BD = \frac{15}{2};$$

$$\because \cos \angle D = \frac{DG}{DM} = \frac{DE}{BD},$$

$$\therefore DM = \frac{DG \cdot BD}{DE} = \frac{\frac{15}{2} \times 15}{12} = \frac{75}{8}, \text{ 即 } BM = DM = \frac{75}{8};$$

$$\therefore AM = AB - BM = 15 - \frac{75}{8} = \frac{45}{8};$$

$$\because AH \perp DE, BE \perp DE, \angle AMH = \angle BME,$$

$$\therefore \triangle AMH \sim \triangle BME,$$

$$\therefore \frac{AH}{BE} = \frac{AM}{BM} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore AH = \frac{3}{5} BE = \frac{3}{5} \times 9 = \frac{27}{5}, \text{ 即 } AH \text{ 的长为 } \frac{27}{5}.$$

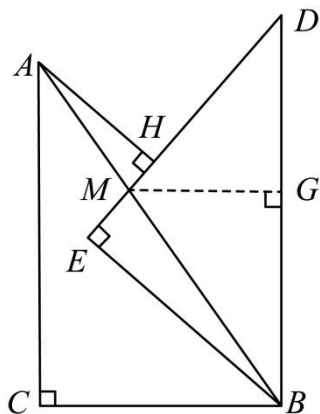


图4

【点睛】 本题考查了旋转的性质、全等三角形的判定与性质、正方形的判定

与性质、相似三角形的判定与性质、三角函数、勾股定理等知识点,适当添加的辅助线、构造相似三角形是解题的关键.

23. 如图, 二次函数 $y = -x^2 + 4x$ 的图象与 x 轴的正半轴交于点 A , 经过点 A 的直线与该函数图象交于点 $B(1, 3)$, 与 y 轴交于点 C .

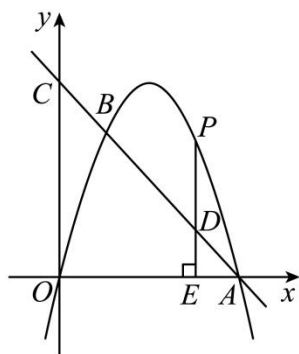


图1

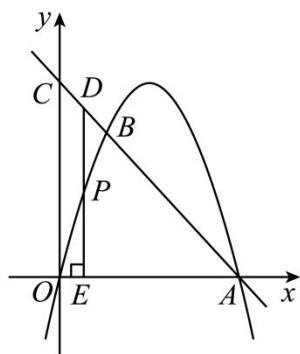


图2

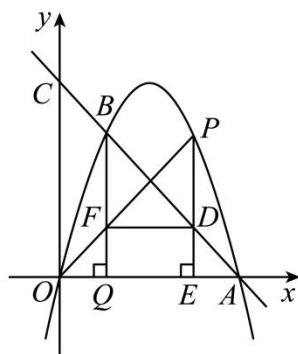


图3

(1) 求直线 AB 的函数表达式及点 C 的坐标;

(2) 点 P 是第一象限内二次函数图象上的一个动点, 过点 P 作直线 $PE \perp x$ 轴于点 E , 与直线 AB 交于点 D , 设点 P 的横坐标为 m .

①当 $PD = \frac{1}{2}OC$ 时, 求 m 的值;

②当点 P 在直线 AB 上方时, 连接 OP , 过点 B 作 $BQ \perp x$ 轴于点 Q , BQ 与 OP 交于点 F , 连接 DF . 设四边形 $FOED$ 的面积为 S , 求 S 关于 m 的函数表达式, 并求出 S 的最大值.

【答案】 (1) $y = -x + 4$, 点 C 的坐标为 $(0, 4)$

(2) ① 2 或 3 或 $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$; ② $S = -\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, S 的最大值为 $\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法可求得直线 AB 的函数表达式，再求得点 C 的坐标即可；

(2) ①分当点 P 在直线 AB 上方和点 P 在直线 AB 下方时，两种情况讨论，根据 $PD = 2$ 列一元二次方程求解即可；

②证明 $\triangle FOQ \sim \triangle POE$ ，推出 $FQ = -m + 4$ ，再证明四边形 $FQED$ 为矩形，利用矩形面积公式得到二次函数的表达式，再利用二次函数的性质即可求解。

【小问 1 详解】

解：由 $y = -x^2 + 4x$ 得，当 $y = 0$ 时， $-x^2 + 4x = 0$ 。

解得 $x_1 = 0, x_2 = 4$ 。

$\therefore$ 点 A 在 x 轴正半轴上。

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(4, 0)$ 。

设直线 AB 的函数表达式为 $y = kx + b (k \neq 0)$ 。

将 A, B 两点的坐标 $(4, 0), (1, 3)$ 分别代入 $y = kx + b$ ，

$$\text{得} \begin{cases} 4k + b = 0 \\ k + b = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 AB 的函数表达式为 $y = -x + 4$ 。

将 $x = 0$ 代入 $y = -x + 4$ ，得 $y = 4$ 。

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 4)$ ；

【小问 2 详解】

①解： $\because$ 点 P 在第一象限内二次函数 $y = -x^2 + 4x$ 的图象上，且 $PE \perp x$ 轴于点 E ，与直线 AB 交于点 D ，其横坐标为 m 。

$\therefore$ 点 P, D 的坐标分别为 $P(m, -m^2 + 4m), D(m, -m + 4)$ 。

$\therefore PE = -m^2 + 4m, DE = -m + 4, OE = m$ 。

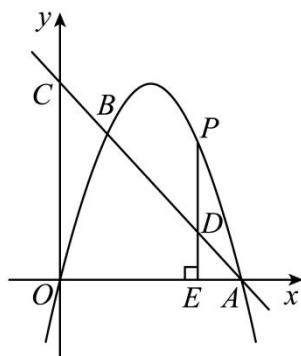
$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 4)$ ，

$\therefore OC = 4$ 。

$$\therefore PD = \frac{1}{2}OC,$$

$$\therefore PD = 2.$$

如图，当点 P 在直线 AB 上方时， $PD = PE - DE = -m^2 + 4m - (-m + 4) = -m^2 + 5m - 4$.

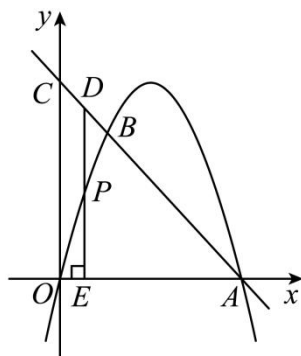


$$\therefore PD = 2,$$

$$\therefore -m^2 + 5m - 4 = 2.$$

解得 $m_1 = 2, m_2 = 3$.

如图 2，当点 P 在直线 AB 下方时， $PD = DE - PE = -m + 4 - (-m^2 + 4m) = m^2 - 5m + 4$.



$$\therefore PD = 2,$$

$$\therefore m^2 - 5m + 4 = 2.$$

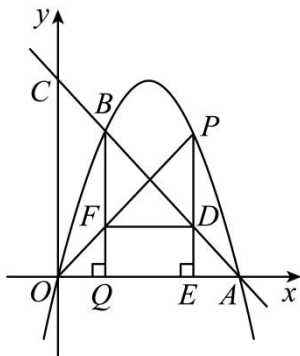
$$\text{解得 } m = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore 0 < m < 1,$$

$$\therefore m = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}.$$

综上所述， m 的值为 2 或 3 或 $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$;

②解：如图 3，由 (1) 得， $OE = m, PE = -m^2 + 4m, DE = -m + 4$.



$\because BQ \perp x$ 轴于点 Q ，交 OP 于点 F ，点 B 的坐标为 $(1, 3)$ ，

$\therefore OQ = 1$.

$\because$ 点 P 在直线 AB 上方，

$\therefore EQ = m - 1$.

$\because PE \perp x$ 轴于点 E ，

$\therefore \angle OQF = \angle OEP = 90^\circ$.

$\therefore FQ \parallel DE$ ， $\angle FOQ = \angle POE$ ，

$\therefore \triangle FOQ \sim \triangle POE$.

$$\therefore \frac{FQ}{PE} = \frac{OQ}{OE} .$$

$$\therefore \frac{FQ}{-m^2 + 4m} = \frac{1}{m} .$$

$$\therefore FQ = \frac{-m^2 + 4m}{m} = -m + 4 .$$

$\therefore FQ = DE$.

$\therefore$ 四边形 $FQED$ 为平行四边形.

$\because PE \perp x$ 轴，

$\therefore$ 四边形 $FQED$ 为矩形.

$$\therefore S = EQ \cdot FQ = (m - 1)(-m + 4) .$$

$$\text{即 } S = -m^2 + 5m - 4 .$$

$$S = -m^2 + 5m - 4 = -\left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$\therefore 1 < m < 4,$$

$$\therefore \text{当 } m = \frac{5}{2} \text{ 时, } S \text{ 的最大值为 } \frac{9}{4}.$$

【点睛】 本题属于二次函数综合题，考查了二次函数、一次函数、等腰三角形、矩形、勾股定理、相似三角形等知识点，第二问难度较大，需要分情况讨论，画出大致图形，用含 m 的代数式表示出 FQ 是解题的关键.

