

2023 年菏泽市初中学业水平考试

一、选择题（本大题共 8 个小题，每小题 3 分，共 24 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确选项的序号涂在答题卡的相应位置。）

1. 剪纸文化是我国最古老的民间艺术之一，下列剪纸图案中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行逐一判断即可.

【详解】解：A. 既是轴对称图形，也是中心对称图形，故 A 符合题意；

B. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故 B 不符合题意；

C. 不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故 C 不符合题意；

D. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故 D 不符合题意.

故选：A.

【点睛】本题主要考查了中心对称图形和轴对称图形的定义，如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心.

2. 下列运算正确的是（ ）

A. $a^6 \div a^3 = a^2$

B. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

C. $(2a^3)^2 = 2a^6$

D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】利用同底数幂的乘除法、积的乘方与幂的乘方以及完全平方公式分别判断即可.

【详解】解：A、 $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故选项错误；

B、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故选项正确；

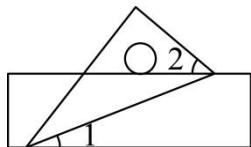
C、 $(2a^3)^2 = 4a^6$ ，故选项错误；

D、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故选项错误；

故选：B.

【点睛】此题主要考查了整式的混合运算，同底数幂的乘除法、积的乘方、幂的乘方以及完全平方公式，正确掌握相关乘法公式是解题关键.

3. 一把直尺和一个含 30° 角的直角三角板按如图方式放置，若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ ()



- A. 30° B. 40° C. 50° D. 60°

【答案】B

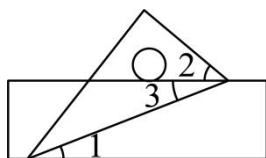
【解析】

【分析】根据平行线的性质，得出 $\angle 3 = \angle 1 = 20^\circ$ ，进而 $\angle 2 = 60^\circ - \angle 3 = 40^\circ$.

【详解】由图知， $\angle 3 = \angle 1 = 20^\circ$

$$\therefore \angle 2 = 60^\circ - \angle 3 = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$$

故选：B



【点睛】本题考查平行线的性质，特殊角直角三角形，由图形的位置关系推出角之

间的数量关系是解题的关键.

4. 实数 a , b , c 在数轴上对应点的位置如图所示，下列式子正确的是 ()



- A. $c(b-a) < 0$ B. $b(c-a) < 0$ C. $a(b-c) > 0$ D. $a(c+b) > 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据数轴可得， $a < 0 < b < c$ ，再根据 $a < 0 < b < c$ 逐项判定即可.

【详解】由数轴可知 $a < 0 < b < c$,

$\therefore c(b-a) > 0$ ，故 A 选项错误；

$\therefore b(c-a) > 0$ ，故 B 选项错误；

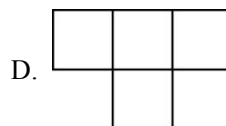
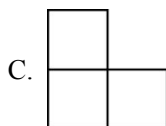
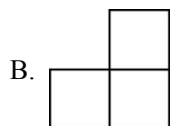
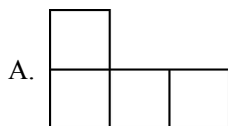
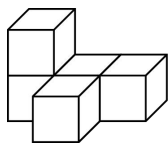
$\therefore a(b-c) > 0$ ，故 C 选项正确；

$\therefore a(c+b) < 0$ ，故 D 选项错误；

故选：C.

【点睛】 本题考查实数与数轴，根据 $a < 0 < b < c$ 进行判断是解题关键.

5. 如图所示的几何体是由 5 个大小相同的小正方体组成的，它的主视图是 ()

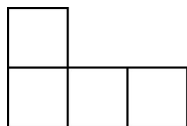


【答案】 A

【解析】

【分析】 根据主视图是从正面看到的图形进行求解即可.

【详解】 解：从正面看该几何体，有三列，第一列有 2 层，第二和第三列都只有一层，如图所示：



故选：A.

【点睛】 本题主要考查了简单几何组合体的三视图，熟知三视图的定义是解题的关键.

6. 一元二次方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ，则 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 的值为 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. -3

C. 3

D. $-\frac{3}{2}$

【答案】 C

【解析】

【分析】 先求得 $x_1 + x_2 = -3$ ， $x_1 \cdot x_2 = -1$ ，再将 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ 变形，代入 $x_1 + x_2$ 与 $x_1 \cdot x_2$ 的值求解即可.

【详解】 解： $\because$ 一元二次方程 $x^2 + 3x - 1 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 ,

$$\therefore x_1 + x_2 = -3, \quad x_1 \cdot x_2 = -1$$

$$\therefore \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{-3}{-1}$$

$= 3$.

故选 C.

【点睛】本题主要考查了一元二次方程根与系数的关系，牢记 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ 是解决本题的关键.

7. $\triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 满足 $(a-b)^2 + \sqrt{2a-b-3} + |c-3\sqrt{2}| = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是 ()

- A. 等腰三角形 B. 直角三角形 C. 锐角三角形 D. 等腰直角三角形

【答案】D

【解析】

【分析】由等式可分别得到关于 a, b, c 的等式，从而分别计算得到 a, b, c 的值，再由 $a^2 + b^2 = c^2$ 的关系，可推导得到 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

【详解】解 $\because (a-b)^2 + \sqrt{2a-b-3} + |c-3\sqrt{2}| = 0$

$$\text{又} \because \begin{cases} (a-b)^2 \geq 0 \\ \sqrt{2a-b-3} \geq 0 \\ |c-3\sqrt{2}| \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ \sqrt{2a-b-3} = 0, \\ |c-3\sqrt{2}| = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a-b=0 \\ 2a-b-3=0 \\ c-3\sqrt{2}=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=3 \\ b=3 \\ c=3\sqrt{2} \end{cases},$$

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2, \text{ 且 } a = b,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

故选: D.

【点睛】本题考查了非负性和勾股定理逆定理的知识，求解的关键是熟练掌握非负数的和为 0，每一个非负数均为 0，和勾股定理逆定理.

8. 若一个点的纵坐标是横坐标的 3 倍，则称这个点为“三倍点”，如: $A(1,3), B(-2,-6), C(0,0)$ 等都是三

倍点”，在 $-3 < x < 1$ 的范围内，若二次函数 $y = -x^2 - x + c$ 的图象上至少存在一个“三倍点”，则 c 的取值范围是（ ）

- A. $-\frac{1}{4} \leq c < 1$ B. $-4 \leq c < -3$ C. $-\frac{1}{4} < c < 5$ D. $-4 \leq c < 5$

【答案】D

【解析】

【分析】由题意可得：三倍点所在的直线为 $y = 3x$ ，根据二次函数 $y = -x^2 - x + c$ 的图象上至少存在一个“三倍点”转化为 $y = -x^2 - x + c$ 和 $y = 3x$ 至少有一个交点，求 $\Delta \geq 0$ ，再根据 $x = -3$ 和 $x = 1$ 时两个函数值大小即可求出。

【详解】解：由题意可得：三倍点所在的直线为 $y = 3x$ ，

在 $-3 < x < 1$ 的范围内，二次函数 $y = -x^2 - x + c$ 的图象上至少存在一个“三倍点”，

即在 $-3 < x < 1$ 的范围内， $y = -x^2 - x + c$ 和 $y = 3x$ 至少有一个交点，

令 $3x = -x^2 - x + c$ ，整理得： $-x^2 - 4x + c = 0$ ，

则 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times c = 16 + 4c \geq 0$ ，解得 $c \geq -4$ ，

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times (-1) \times c}}{2 \times (-1)} = -\frac{4 \pm \sqrt{16 + 4c}}{2},$$

$$\therefore x_1 = -2 + \sqrt{4 + c}, \quad x_2 = -2 - \sqrt{4 + c}$$

$$\therefore -3 < -2 + \sqrt{4 + c} < 1 \text{ 或 } -3 < -2 - \sqrt{4 + c} < 1$$

当 $-3 < -2 + \sqrt{4 + c} < 1$ 时， $-1 < \sqrt{4 + c} < 3$ ，即 $0 \leq \sqrt{4 + c} < 3$ ，解得 $-4 \leq c < 5$ ，

当 $-3 < -2 - \sqrt{4 + c} < 1$ 时， $-3 < \sqrt{4 + c} < 1$ ，即 $0 \leq \sqrt{4 + c} < 1$ ，解得 $-4 \leq c < -3$ ，

综上， c 的取值范围是 $-4 \leq c < 5$ ，

故选：D.

【点睛】本题考查二次函数与一次函数交点问题，熟练掌握相关性质是关键.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分，只要求把最后结果填写在答题卡的相应区域内.）

9. 因式分解： $m^2 - 4m = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $m(m - 4)$

【解析】

【分析】直接提取公因式 m ，进而分解因式即可.

【详解】解： $m^2-4m=m(m-4)$.

故答案为： $m(m-4)$.

【点睛】本题主要考查了提取公因式法分解因式，正确找出公因式是解题关键.

10. 计算： $|\sqrt{3}-2|+2\sin 60^\circ-2023^0=$ _____.

【答案】 1

【解析】

【分析】根据先计算绝对值，特殊角的三角函数值，零指数幂，再进行加减计算即可.

【详解】解： $|\sqrt{3}-2|+2\sin 60^\circ-2023^0$

$$=2-\sqrt{3}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

$$=1$$

故答案为： 1.

【点睛】本题考查了实数的运算，掌握绝对值、特殊角的三角函数值、零指数幂的运算是解题的关键.

11. 用数字 0, 1, 2, 3 组成个位数字与十位数字不同的两位数，其中是偶数的概率为_____.

【答案】 $\frac{5}{9}$

【解析】

【分析】先列表得出所有的情况，再找到符合题意的情况，利用概率公式计算即可.

【详解】解： 0 不能在最高位，而且个位数字与十位数字不同，

列表如下：

	1	2	3
0	10	20	30
1		21	31
2	12		32
3	13	23	

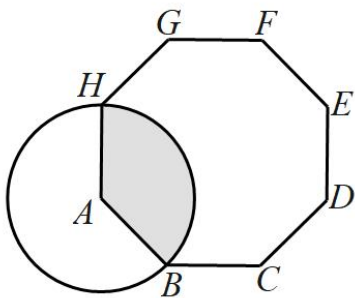
一共有可以组成 9 个数字，偶数有 10、12、20、30、32，

$\therefore$ 是偶数的概率为 $\frac{5}{9}$.

故答案为: $\frac{5}{9}$.

【点睛】 本题考查了列表法求概率，注意 0 不能在最高位.

12. 如图，正八边形 $ABCDEFGH$ 的边长为 4，以顶点 A 为圆心， AB 的长为半径画圆，则阴影部分的面积为_____ (结果保留 π).



【答案】 6π

【解析】

【分析】 先利用正八边形求出圆心角的度数，再利用扇形的面积公式求解即可.

【详解】 解：由题意， $\angle HAB = \frac{(8-2) \cdot 180^\circ}{8} = 135^\circ$,

$$AH = AB = 4$$

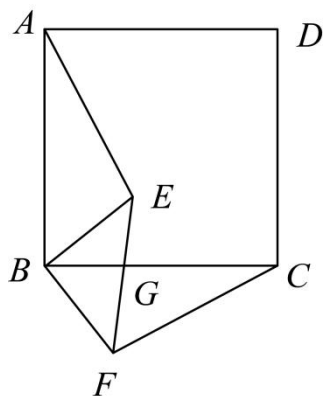
$$\therefore S_{\text{阴}} = \frac{135\pi \cdot 4^2}{360} = 6\pi,$$

故答案为: 6π .

【点睛】 本题考查正多边形与圆，扇形的面积等知识，解题的关键是记住扇形的面积 $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ ，正多边形

的每个内角度数为 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$.

13. 如图，点 E 是正方形 $ABCD$ 内的一点，将 $\triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBF$. 若 $\angle ABE = 55^\circ$ ，则 $\angle EGC =$ _____度.



【答案】 80

【解析】

【分析】 先求得 $\angle BEF$ 和 $\angle CBE$ 的度数，再利用三角形外角的性质求解即可.

【详解】 解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° 得到 $\triangle CBF$

$$\therefore \angle EBF = 90^\circ, \quad BE = BF,$$

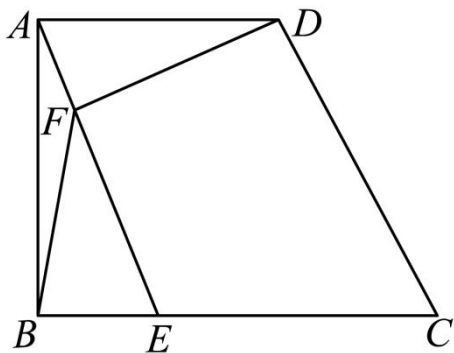
$$\therefore \angle BEF = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle EGC = \angle CBE + \angle BEF = 35^\circ + 45^\circ = 80^\circ,$$

故答案为： 80.

【点睛】 本题考查了正方形的性质，等腰三角形的性质，旋转图形的性质和三角形外角的性质，利用旋转图形的性质求解是解题的关键.

14. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = 5$, $AD = 4$, $AD < BC$ ，点 E 在线段 BC 上运动，点 F 在线段 AE 上， $\angle ADF = \angle BAE$ ，则线段 BF 的最小值为_____.

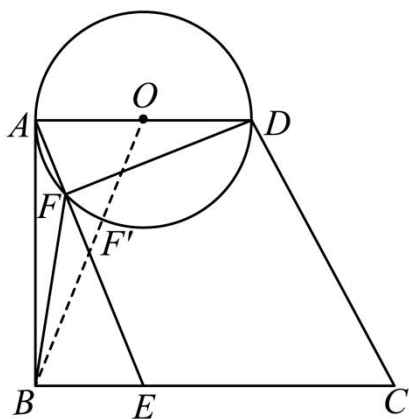


【答案】 $\sqrt{29} - 2$

【解析】

【分析】设 AD 的中点为 O ，以 AD 为直径画圆，连接 OB ，设 OB 与 $\odot O$ 的交点为点 F' ，证明 $\angle DFA = 90^\circ$ ，可知点 F 在以 AD 为直径的半圆上运动，当点 F 运动到 OB 与 $\odot O$ 的交点 F' 时，线段 BF 有最小值，据此求解即可。

【详解】解：设 AD 的中点为 O ，以 AD 为直径画圆，连接 OB ，设 OB 与 $\odot O$ 的交点为点 F' ，



$$\because \angle ABC = \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle BAE,$$

$$\therefore \angle DFA = \angle ABE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 点 F 在以 AD 为直径的半圆上运动，

$\therefore$ 当点 F 运动到 OB 与 $\odot O$ 的交点 F' 时，线段 BF 有最小值，

$$\because AD = 4,$$

$$\therefore AO = OF' = \frac{1}{2} AD = 2,$$

$$\therefore BO = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29},$$

$$BF \text{ 的最小值为 } \sqrt{29} - 2,$$

故答案为： $\sqrt{29} - 2$.

【点睛】 本题考查了平行线的性质，圆周角定理的推论，勾股定理等知识，根据题意分析得到点 F 的运动轨迹是解题的关键.

三、解答题（本题共 78 分，把解答或证明过程写在答题卡的相应区域内.）

$$15. \text{ 解不等式组: } \begin{cases} 5x - 2 < 3(x + 1), \\ \frac{3x - 2}{3} \geq x + \frac{x - 2}{2}. \end{cases}$$

【答案】 $x \leq \frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 分别求出各个不等式的解，再取各个解集的公共部分，即可.

【详解】 解：解 $5x-2 < 3(x+1)$ 得： $x < \frac{5}{2}$,

解 $\frac{3x-2}{3} \geq x + \frac{x-2}{2}$ 得： $x \leq \frac{2}{3}$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x \leq \frac{2}{3}$.

【点睛】 本题主要考查解一元一次不等式组，熟练掌握解不等式组的基本步骤，是解题的关键.

16. 先化简，再求值： $\left(\frac{3x}{x-y} + \frac{x}{x+y} \right) \div \frac{x}{x^2-y^2}$ ，其中 x, y 满足 $2x+y-3=0$.

【答案】 $4x+2y, 6$

【解析】

【分析】 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算，同时将除法变为乘法，约分得到最简结果，将 $2x+y-3=0$ 变形整体代入计算即可求解.

【详解】 解：原式 $= \left[\frac{3x(x+y)}{(x-y)(x+y)} + \frac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)} \right] \times \frac{(x-y)(x+y)}{x}$

$$= \frac{3x^2+3xy+x^2-xy}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{x}$$

$$= \frac{4x^2+2xy}{(x-y)(x+y)} \times \frac{(x-y)(x+y)}{x}$$

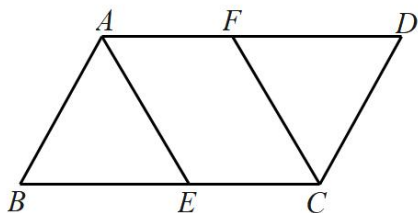
$$= 4x+2y;$$

由 $2x+y-3=0$ ，得到 $2x+y=3$,

则原式 $= 2(2x+y) = 6$.

【点睛】 此题考查分式的化简求值，解题关键熟练掌握分式混合运算的顺序以及整体代入法求解.

17. 如图，在 $ABCD$ 中， AE 平分 $\angle BAD$ ，交 BC 于点 E ； CF 平分 $\angle BCD$ ，交 AD 于点 F . 求证：
 $AE = CF$.



【答案】证明见解析

【解析】

【分析】由平行四边形的性质得 $\angle B = \angle D$ ， $AB = CD$ ， $AD \parallel BC$ ，由平行线的性质和角平分线的性质得出 $\angle BAE = \angle DCF$ ，可证 $\triangle BAE \cong \triangle DCF$ ，即可得出 $AE = CF$ 。

【详解】证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle B = \angle D$ ， $AB = CD$ ， $\angle BAD = \angle DCB$ ， $AD \parallel BC$ ，

$\because AE$ 平分 $\angle BAD$ ， CF 平分 $\angle BCD$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle DAE = \angle BCF = \angle DCF$ ，

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle DCF$ 中，

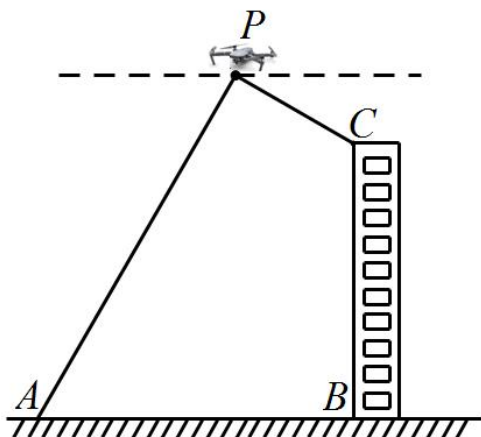
$$\begin{cases} \angle B = \angle D \\ AB = CD \\ \angle BAE = \angle DCF \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle DCF$ (ASA)

$\therefore AE = CF$ 。

【点睛】本题主要考查平行四边形的性质，平行线的性质及全等三角形的判定与性质，根据题目已知条件熟练运用平行四边形的性质，平行线的性质是解答本题的关键。

18. 无人机在实际生活中的应用广泛，如图所示，某人利用无人机测大楼的高度 BC ，无人机在空中点 P 处，测得点 P 距地面上 A 点 80 米，点 A 处俯角为 60° ，楼顶 C 点处的俯角为 30° ，已知点 A 与大楼的距离 AB 为 70 米（点 A ， B ， C ， P 在同一平面内），求大楼的高度 BC （结果保留根号）

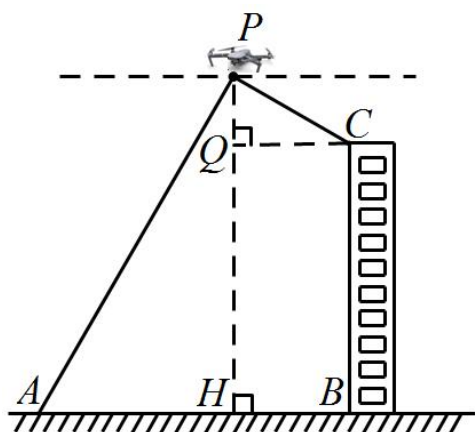


【答案】大楼的高度 BC 为 $30\sqrt{3}$ m .

【解析】

【分析】如图，过 P 作 $PH \perp AB$ 于 H ，过 C 作 $CQ \perp PH$ 于 Q ，而 $CB \perp AB$ ，则四边形 $CQHB$ 是矩形，可得 $QH = BC$ ， $BH = CQ$ ，求解 $PH = AP \cdot \sin 60^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}$ ， $AH = AP \cdot \cos 60^\circ = 40$ ，可得 $CQ = BH = 70 - 40 = 30$ ， $PQ = CQ \cdot \tan 30^\circ = 10\sqrt{3}$ ，可得 $BC = QH = 40\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 30\sqrt{3}$.

【详解】解：如图，过 P 作 $PH \perp AB$ 于 H ，过 C 作 $CQ \perp PH$ 于 Q ，而 $CB \perp AB$ ，



则四边形 $CQHB$ 是矩形，

$$\therefore QH = BC, \quad BH = CQ,$$

由题意可得： $AP = 80$ ， $\angle PAH = 60^\circ$ ， $\angle PCQ = 30^\circ$ ， $AB = 70$ ，

$$\therefore PH = AP \cdot \sin 60^\circ = 80 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 40\sqrt{3}, \quad AH = AP \cdot \cos 60^\circ = 40,$$

$$\therefore CQ = BH = 70 - 40 = 30,$$

$$\therefore PQ = CQ \cdot \tan 30^\circ = 10\sqrt{3},$$

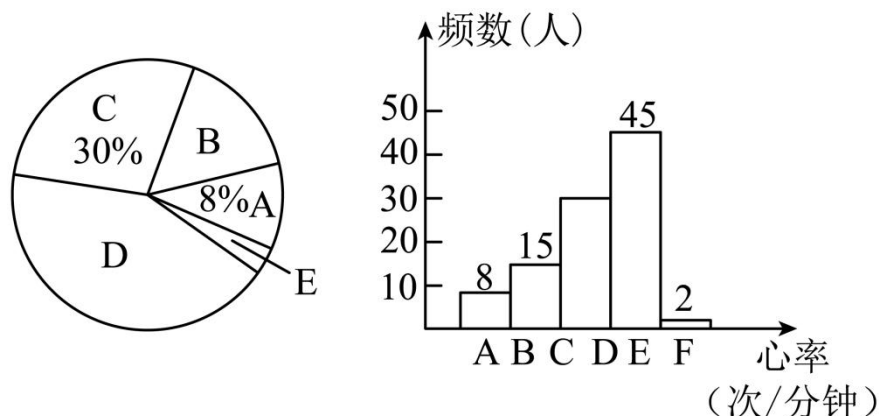
$$\therefore BC = QH = 40\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 30\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{大楼的高度 } BC \text{ 为 } 30\sqrt{3} \text{ m} .$$

【点睛】 本题考查的是矩形的判定与性质，解直角三角形的实际应用，理解仰角与俯角的含义是解本题的关键.

19. 某班学生以跨学科主题学习为载体，综合运用体育，数学，生物学等知识，研究体育课的运动负荷，在体育课基本部分运动后，测量统计了部分学生的心率情况，按心率次数 x （次/分钟）分为如下五组： A 组：

$50 \leq x < 75$, B 组: $75 \leq x < 100$, C 组: $100 \leq x < 125$, D 组: $125 \leq x < 150$, E 组: $150 \leq x \leq 175$. 其中, A 组数据为 73, 65, 74, 68, 74, 70, 66, 56. 根据统计数据绘制了不完整的统计图 (如图所示), 请结合统计图解答下列问题:



- (1) A 组数据的中位数是_____, 众数是_____; 在统计图中 B 组所对应的扇形圆心角是_____度;
- (2) 补全学生心率频数分布直方图;
- (3) 一般运动的适宜行为 $100 \leq x < 150$ (次/分钟), 学校共有 2300 名学生, 请你依据此次跨学科项目研究结果, 估计大约有多少名学生达到适宜心率?

【答案】(1) 69, 74, 54;

(2) 见解析 (3) 大约有 1725 名学生达到适宜心率.

【解析】

【分析】(1) 根据中位数和众数的概念求解, 先求出总人数, 然后求出 B 组所占的百分比, 最后乘以 360° 即可求出在统计图中 B 组所对应的扇形圆心角;

(2) 根据样本估计总体的方法求解即可.

【小问 1 详解】

将 A 组数据从小到大排列为: 56, 65, 66, 68, 70, 73, 74, 74,

$$\therefore \text{中位数为 } \frac{68+70}{2} = 69;$$

$\therefore 74$ 出现的次数最多,

$\therefore$ 众数是 74;

$$8 \div 8\% = 100,$$

$$360^\circ \times \frac{15}{100} = 54^\circ$$

$\therefore$ 在统计图中 B 组所对应的扇形圆心角是 54° ;

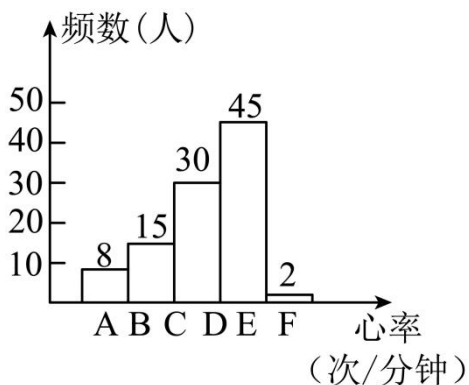
故答案为: 69, 74, 54;

【小问 2 详解】

$$100 - 8 - 15 - 45 - 2 = 30$$

∴ C 组的人数为 30,

∴ 补全学生心率频数分布直方图如下:



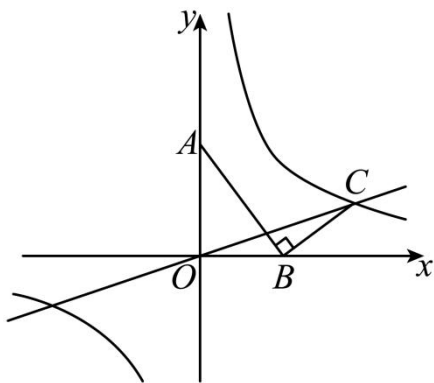
【小问 3 详解】

$$2300 \times \frac{30 + 45}{100} = 1725 \text{ (人)},$$

∴ 大约有 1725 名学生达到适宜心率.

【点睛】 本题主要考查调查与统计的相关知识, 理解频数分布直方图, 扇形统计图的相关信息, 掌握运用样本百分比估算总体数量是解题的关键.

20. 如图, 已知坐标轴上两点 $A(0, 4)$, $B(2, 0)$, 连接 AB , 过点 B 作 $BC \perp AB$, 交反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限的图象于点 $C(a, 1)$.



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 和直线 OC 的表达式;

(2) 将直线 OC 向上平移 $\frac{3}{2}$ 个单位, 得到直线 l , 求直线 l 与反比例函数图象的交点坐标.

【答案】 (1) $y = \frac{4}{x}$, $y = \frac{1}{4}x$

(2) $(2, 2)$ 或 $\left(-8, -\frac{1}{2}\right)$

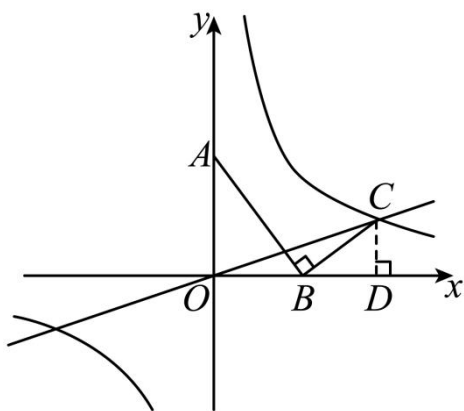
【解析】

【分析】(1) 如图, 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D , 证明 $\triangle ABO \sim \triangle BCD$, 利用相似三角形的性质得到 $BD = 2$, 求出点 C 的坐标, 代入 $y = \frac{k}{x}$ 可得反比例函数解析式, 设 OC 的表达式为 $y = mx$, 将点 $C(4, 1)$ 代入即可得到直线 OC 的表达式;

(2) 先求得直线 l 的解析式, 联立反比例函数的解析式即可求得交点坐标.

【小问 1 详解】

如图, 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴于点 D ,



则 $CD = 1$, $\angle CDB = 90^\circ$,

$$\because BC \perp AB,$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\because \angle CDB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle ABO,$$

$$\therefore \triangle ABO \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{BD}{CD},$$

$$\because A(0, 4), B(2, 0),$$

$$\therefore OA = 4, OB = 2,$$

$$\therefore \frac{4}{2} = \frac{BD}{1},$$

$$\therefore BD = 2,$$

$$\therefore OD = 2 + 2 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } C(4,1),$$

将点 C 代入 $y = \frac{k}{x}$ 中,

$$\text{可得 } k = 4,$$

$$\therefore y = \frac{4}{x},$$

设 OC 的表达式为 $y = mx$,

将点 $C(4,1)$ 代入可得 $1 = 4m$,

$$\text{解得: } m = \frac{1}{4},$$

$$\therefore OC \text{ 的表达式为 } y = \frac{1}{4}x;$$

【小问 2 详解】

$$\text{直线 } l \text{ 的解析式为 } y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2},$$

$$\text{当两函数相交时, 可得 } \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} = \frac{4}{x},$$

$$\text{解得 } x_1 = 2, x_2 = -8,$$

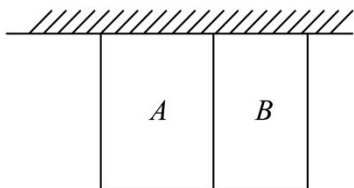
代入反比例函数解析式,

$$\text{得 } \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -8 \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 与反比例函数图象的交点坐标为 } (2,2) \text{ 或 } \left(-8, -\frac{1}{2}\right)$$

【点睛】本题考查了相似三角形的判定与性质，待定系数法求函数的解析式，反比例函数与一次函数的交点问题，一次函数的平移问题，解一元二次方程等知识.

21. 某学校为美化学校环境，打造绿色校园，决定用篱笆围成一个一面靠墙（墙足够长）的矩形花园，用一道篱笆把花园分为 A , B 两块（如图所示），花园里种满牡丹和芍药，学校已订购篱笆 120 米.



(1) 设计一个使花园面积最大的方案，并求出其最大面积；

(2) 在花园面积最大的条件下， A ， B 两块内分别种植牡丹和芍药，每平方米种植 2 株，知牡丹每株售价 25 元，芍药每株售价 15 元，学校计划购买费用不超过 5 万元，求最多可以购买多少株牡丹？

【答案】 (1) 长为 60 米，宽为 20 米时，有最大面积，且最大面积为 1200 平方米

(2) 最多可以购买 1400 株牡丹

【解析】

【分析】 (1) 设长为 x 米，面积为 y 平方米，则宽为 $\frac{120-x}{3}$ 米，可以得到 y 与 x 的函数关系式，配成顶点式求出函数的最大值即可；

(2) 设种植牡丹的面积为 a 平方米，则种植芍药的面积为 $(1200-a)$ 平方米，由题意列出不等式求得种植牡丹面积的最大值，即可解答.

【小问 1 详解】

解：设长为 x 米，面积为 y 平方米，则宽为 $\frac{120-x}{3}$ 米，

$$\therefore y = x \times \frac{120-x}{3} = -\frac{1}{3}x^2 + 40x = -\frac{1}{3}(x-60)^2 + 1200,$$

$\therefore$ 当 $x=60$ 时， y 有最大值是 1200，

此时，宽为 $\frac{120-x}{3} = 20$ (米)

答：长为 60 米，宽为 20 米时，有最大面积，且最大面积为 1200 平方米.

【小问 2 详解】

解：设种植牡丹的面积为 a 平方米，则种植芍药的面积为 $(1200-a)$ 平方米，

由题意可得 $25 \times 2a + 15 \times 2(1200-a) \leq 50000$

解得： $a \leq 700$ ，

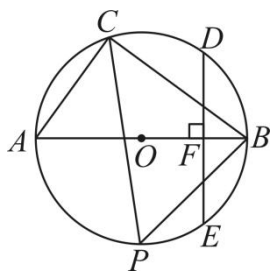
即牡丹最多种植 700 平方米，

$$700 \times 2 = 1400 \text{ (株)},$$

答：最多可以购买 1400 株牡丹.

【点睛】 本题考查二次函数的应用、一元一次不等式的应用，解题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件.

22. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 是圆上一点， D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，弦 $DE \perp AB$ ，垂足为点 F .



- (1) 求证: $BC = DE$;
- (2) P 是 AE 上一点, $AC = 6, BF = 2$, 求 $\tan \angle BPC$;
- (3) 在 (2) 的条件下, 当 CP 是 $\angle ACB$ 的平分线时, 求 CP 的长.

【答案】(1) 证明见解析;

(2) $\frac{4}{3}$

(3) $7\sqrt{2}$

【解析】

【分析】(1) 由 D 是 $\widehat{BC}$ 的中点得 $\widehat{CD} = \widehat{BD}$, 由垂径定理得 $\widehat{BE} = \widehat{BD}$, 得到 $BC = DE$, 根据同圆中, 等弧对等弦即可证明;

(2) 连接 OD , 证明 $\triangle ACB \sim \triangle OFD$, 设 $\odot O$ 的半径为 r , 利用相似三角形的性质得 $r = 5$, $AB = 2r = 10$, 由勾股定理求得 BC , 得到 $\tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, 即可得到 $\tan \angle BPC = \frac{4}{3}$;

(3) 过点 B 作 $BG \perp CP$ 交 CP 于点 G , 证明 $\triangle CBG$ 是等腰直角三角形, 解直角三角形得到 $CG = BG = BC \cos 45^\circ = 4\sqrt{2}$, 由 $\tan \angle BPC = \frac{4}{3}$ 得到 $\frac{BG}{GP} = \frac{4}{3}$, 解得 $GP = 3\sqrt{2}$, 即可求解.

【小问 1 详解】

解: $\because D$ 是 $\widehat{BC}$ 的中点,

$$\therefore \widehat{CD} = \widehat{BD},$$

$\because DE \perp AB$ 且 AB 为 $\odot O$ 的直径,

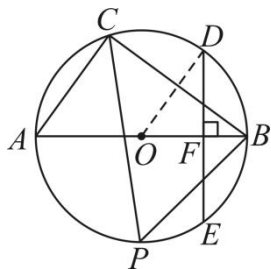
$$\therefore \widehat{BE} = \widehat{BD},$$

$$\therefore BC = DE,$$

$$\therefore BC = DE;$$

【小问 2 详解】

解: 连接 OD ,



$$\because \widehat{CD} = \widehat{BD},$$

$$\therefore \angle CAB = \angle DOB,$$

$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because DE \perp AB,$$

$$\therefore \angle DFO = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle OFD,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{OF}{OD},$$

设 $\odot O$ 的半径为 r ,

$$\text{则 } \frac{6}{2r} = \frac{r-2}{r},$$

解得 $r = 5$, 经检验, $r = 5$ 是方程的根,

$$\therefore AB = 2r = 10,$$

$$\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 8,$$

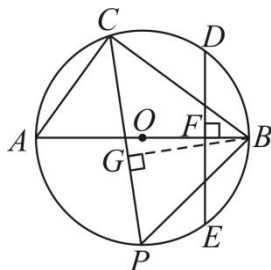
$$\therefore \tan \angle CAB = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$\because \angle BPC = \angle CAB,$$

$$\therefore \tan \angle BPC = \frac{4}{3};$$

【小问 3 详解】

解: 如图, 过点 B 作 $BG \perp CP$ 交 CP 于点 G ,



$$\therefore \angle BGC = \angle BGP = 90^\circ$$

$\because \angle ACB = 90^\circ$, CP 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$\therefore \angle ACP = \angle BCP = 45^\circ$

$\therefore \angle CBG = 45^\circ$

$\therefore CG = BG = BC \cos 45^\circ = 4\sqrt{2}$,

$\therefore \tan \angle BPC = \frac{4}{3}$

$\therefore \frac{BG}{GP} = \frac{4}{3}$,

$\therefore GP = 3\sqrt{2}$,

$\therefore CP = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查了相似三角形的判定与性质，垂径定理，圆周角定理及推论，解直角三角形等知识，熟练掌握以上知识并灵活运用是解题的关键.

23. (1) 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别在边 DC , BC 上, $AE \perp DF$, 垂足为点 G . 求证: $\triangle ADE \sim \triangle DCF$.

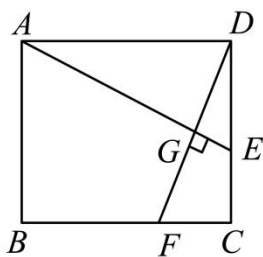


图1

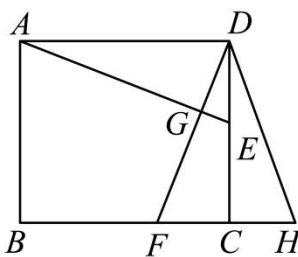


图2

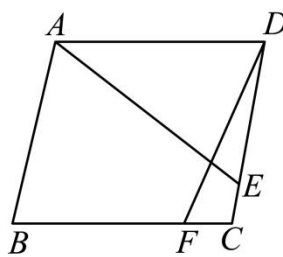


图3

【问题解决】

(2) 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别在边 DC , BC 上, $AE = DF$, 延长 BC 到点 H , 使 $CH = DE$, 连接 DH . 求证: $\angle ADF = \angle H$.

【类比迁移】

(3) 如图 3, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E , F 分别在边 DC , BC 上, $AE = DF = 11$, $DE = 8$, $\angle AED = 60^\circ$, 求 CF 的长.

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析 (3) 3

【解析】

【分析】 (1) 由矩形的性质可得 $\angle ADE = \angle DCF = 90^\circ$, 则 $\angle CDF + \angle DFC = 90^\circ$, 再由 $AE \perp DF$, 可得 $\angle DGE = 90^\circ$, 则 $\angle CDF + \angle AED = 90^\circ$, 根据等角的余角相等得 $\angle AED = \angle DFC$, 即可得证;

(2) 利用 “HL” 证明 $\triangle ADE \cong \triangle DCF$, 可得 $DE = CF$, 由 $CH = DE$, 可得 $CF = CH$, 利用 “SAS”

证明 $\triangle DCF \cong \triangle DCH$ ，则 $\angle DHC = \angle DFC$ ，由正方形的性质可得 $AD \parallel BC$ ，根据平行线的性质，即可得证；

(3) 延长 BC 到点 G ，使 $CG = DE = 8$ ，连接 DG ，由菱形的性质可得 $AD = DC$ ， $AD \parallel BC$ ，则 $\angle ADE = \angle DCG$ ，推出 $\triangle ADE \cong \triangle DCG$ (SAS)，由全等的性质可得 $\angle DGC = \angle AED = 60^\circ$ ， $DG = AE$ ，进而推出 $\triangle DFG$ 是等边三角形，再根据线段的和差关系计算求解即可。

【详解】(1) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ADE = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle DFC = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp DF,$$

$$\therefore \angle DGE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CDF + \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AED = \angle DFC,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DCF;$$

(2) 证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AD = DC, AD \parallel BC, \angle ADE = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\because AE = DF,$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF \text{ (HL)},$$

$$\therefore DE = CF,$$

$$\text{又} \because CH = DE,$$

$$\therefore CF = CH,$$

$\because$ 点 H 在 BC 的延长线上，

$$\therefore \angle DCH = \angle DCF = 90^\circ,$$

$$\because DC = DC,$$

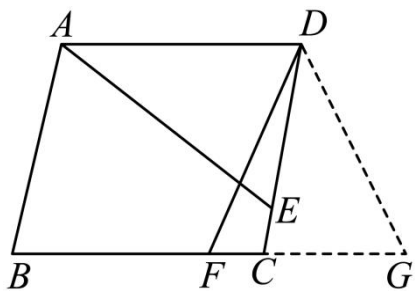
$$\therefore \triangle DCF \cong \triangle DCH \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle H = \angle DFC,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle DFC = \angle H;$$

(3) 解：如图，延长 BC 到点 G ，使 $CG = DE = 8$ ，连接 DG ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,
 $\therefore AD = DC, AD \parallel BC,$
 $\therefore \angle ADE = \angle DCG,$
 $\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCG \text{ (SAS)},$
 $\therefore \angle DGC = \angle AED = 60^\circ, DG = AE,$
 $\because AE = DF,$
 $\therefore DG = DF,$
 $\therefore \triangle DFG$ 是等边三角形,
 $\therefore FG = FC + CG = DF = 11,$
 $\therefore FC = 11 - CG = 11 - 8 = 3.$

【点睛】本题是四边形综合题，主要考查了矩形的性质，正方形的性质，菱形的性质，相似三角形的判定，全等三角形的判定和性质，等边三角形的判定和性质，熟练掌握这些知识点并灵活运用是解题的关键.

24. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点，与 y 轴交于点 $C(0, 4)$ ，其对称轴为 $x = -\frac{3}{2}$.

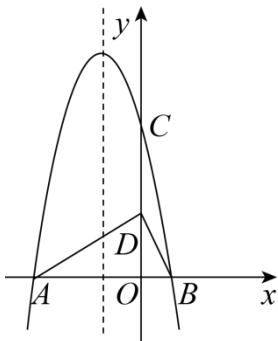


图1

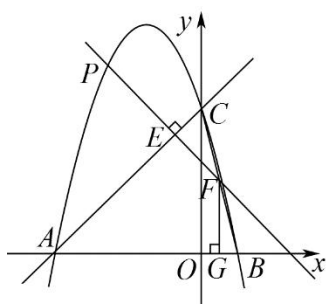


图2

- (1) 求抛物线的表达式;
- (2) 如图 1, 点 D 是线段 OC 上的一动点, 连接 AD, BD , 将 $\triangle ABD$ 沿直线 AD 翻折, 得到 $\triangle AB'D$, 当点 B' 恰好落在抛物线的对称轴上时, 求点 D 的坐标;
- (3) 如图 2, 动点 P 在直线 AC 上方的抛物线上, 过点 P 作直线 AC 的垂线, 分别交直线 AC , 线段 BC 于点 E, F , 过点 F 作 $FG \perp x$ 轴, 垂足为 G , 求 $FG + \sqrt{2}FP$ 的最大值.

【答案】(1) $y = -x^2 - 3x + 4$

$$(2) D\left(0, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$$

$$(3) \frac{49}{6}$$

【解析】

【分析】(1) 由题易得 c 的值，再根据对称轴求出 b 的值，即可解答；

(2) 过 B' 作 x 轴的垂线，垂足为 H 求出 A 和 B 的坐标，得到 $AB' = AB = 5$ ， $AH = \frac{5}{2}$ ，由 $AB' = AB = 5 = 2AH$ ，推出 $\angle DAB = \frac{1}{2}\angle B'AB = 30^\circ$ ，解直角三角形得到 OD 的长，即可解答；

(3) 求得 BC 所在直线的解析式为 $y_1 = -4x + 4$ ，设 $P(m, -m^2 - 3m + 4)$ ，设 PE 所在直线的解析式为：

$y_2 = -x + b_2$ ，得 $y_2 = -x - m^2 - 2m + 4$ ，令 $y_1 = y_2$ ，解得 $x = \frac{m^2 + 2m}{3}$ ，分别表示出 FG 和 $\sqrt{2}PF$ ，再

对 $FG + \sqrt{2}FP$ 进行化简计算，配方成顶点式即可求解。

【小问 1 详解】

解：抛物线与 y 轴交于点 $C(0, 4)$ ，

$$\therefore c = 4,$$

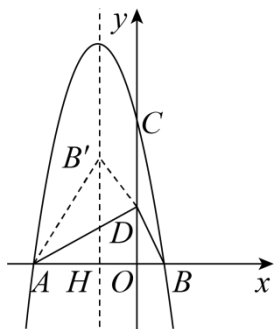
$$\therefore \text{对称轴为 } x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore -\frac{b}{-2} = -\frac{3}{2}, \quad b = -3,$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -x^2 - 3x + 4;$$

【小问 2 详解】

如图，过 B' 作 x 轴的垂线，垂足为 H ，



$$\text{令 } -x^2 - 3x + 4 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = 1, x_2 = -4,$$

$$\therefore A(-4, 0), B(1, 0),$$

$$\therefore AB = 1 - (-4) = 5,$$

由翻折可得 $AB' = AB = 5$,

$$\therefore \text{对称轴为 } x = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore AH = -\frac{3}{2} - (-4) = \frac{5}{2},$$

$$\therefore AB' = AB = 5 = 2AH,$$

$$\therefore \angle AB'H = 30^\circ, \angle B'AB = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DAB = \frac{1}{2} \angle B'AB = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OD = OA \tan 30^\circ = \frac{4}{3}\sqrt{3}$,

$$\therefore D\left(0, \frac{4}{3}\sqrt{3}\right);$$

【小问 3 详解】

设 BC 所在直线的解析式为 $y_1 = k_1x + b_1$,

$$\text{把 } B、C \text{ 坐标代入得: } \begin{cases} k_1 + b_1 = 0 \\ b_1 = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k_1 = -4 \\ b_1 = 4 \end{cases},$$

$$\therefore y_1 = -4x + 4,$$

$$\therefore OA = OC,$$

$$\therefore \angle CAO = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$\therefore$ 直线 PE 与 x 轴所成夹角为 45° ,

$$\text{设 } P(m, -m^2 - 3m + 4),$$

设 PE 所在直线的解析式为: $y_2 = -x + b_2$,

把点 P 代入得 $b_2 = -m^2 - 2m + 4$,

$$\therefore y_2 = -x - m^2 - 2m + 4,$$

令 $y_1 = y_2$, 则 $-4x + 4 = -x - m^2 - 2m + 4$,

$$\text{解得 } x = \frac{m^2 + 2m}{3},$$

$$\therefore FG = y_F = \frac{-4(m^2 + 2m)}{3} + 4$$

$$\sqrt{2}PF = \sqrt{2} \frac{x_F - x_P}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (x_F - x_P) = \frac{2}{3}(m^2 - m)$$

$$\therefore FG + \sqrt{2}FP = \frac{-4(m^2 + 2m)}{3} + 4 + \frac{2(m^2 - m)}{3} = -\frac{2}{3}\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{6}$$

$\therefore$ 点 P 在直线 AC 上方,

$$\therefore -4 < m < 0,$$

$$\therefore \text{当 } m = -\frac{5}{2} \text{ 时, } FG + \sqrt{2}FP \text{ 的最大值为 } \frac{49}{6}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数综合问题, 利用数形结合的思想是解题的关键.

