

二〇二三年全市初中学生学业水平考试数学试题

亲爱的同学，伴随着考试的开始，你又走到了一个新的人生驿站。请你在答题之前，一定要仔细阅读以下说明：

1. 试题由选择题与非选择题两部分组成，共 6 页。选择题 36 分，非选择题 84 分，共 120 分。考试时间 120 分钟。
2. 将姓名、考场号、座号、考号填写在试题和答题卡指定的位置。
3. 试题答案全部涂、写在答题卡上，完全按照答题卡中的“注意事项”答题。
4. 考试结束，答题卡和试题一并交回。
5. 不允许使用计算器。

愿你放松心情，认真审题，缜密思考，细心演算，交一份满意的答卷。

选择题（共 36 分）

一、选择题（本题共 12 个小题，每小题 3 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

1. $(-2023)^0$ 的值为（ ）

- A. 0 B. 1 C. -1 D. $-\frac{1}{2023}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据零指数幂法则：任何一个不等于零的数的零次幂都等于 1，计算即可得到答案

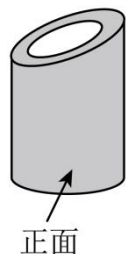
【详解】解：∵ 任何一个不等于零的数的零次幂都等于 1，

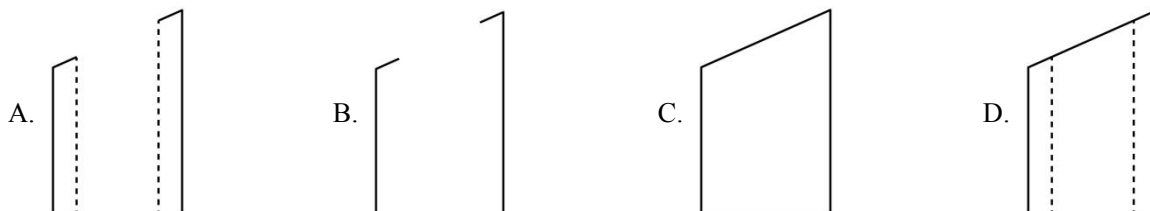
$$\therefore (-2023)^0 = 1,$$

故选：B.

【点睛】本题主要考查零指数幂法则：任何一个不等于零的数的零次幂都等于 1，熟练掌握零次幂法则是解题的关键.

2. 如图所示几何体的主视图是（ ）



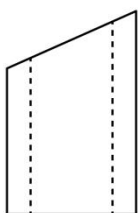


【答案】D

【解析】

【分析】从正面看到的平面图形是主视图，根据主视图的含义可得答案.

【详解】解：如图所示的几何体的主视图如下：



故选：D.

【点睛】此题主要考查了三视图；用到的知识点为：主视图，左视图，俯视图分别是 从物体的正面，左面，上面看得到的图形.

3. 4 月 15 日是全民国家安全教育日.某校为了摸清该校 1500 名师生的国家安全知识掌握情况，从中随机抽取了 150 名师生进行问卷调查. 这项调查中的样本是 ()

- A. 1500 名师生的国家安全知识掌握情况
- B. 150
- C. 从中抽取的 150 名师生的国家安全知识掌握情况
- D. 从中抽取的 150 名师生

【答案】C

【解析】

【分析】总体是指考查的对象的全体，个体是总体中的每一个考查的对象，样本是总体中所抽取的一部分个体，据此即可判断.

【详解】解：样本是从中抽取的 150 名师生的国家安全知识掌握情况.

故选：C.

【点睛】本题考查了样本的定义，解题要分清具体问题中的总体、个体与样本，关键是明确考查的对象. 总体、个体与样本的考查对象是相同的，所不同的是范围的大小.

4. 若一元二次方程 $mx^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数解，则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \geq -1$ B. $m \in 1$ C. $m \geq -1$ 且 $m \neq 0$ D. $m \in 1$ 且 $m \neq 0$

【答案】D

【解析】

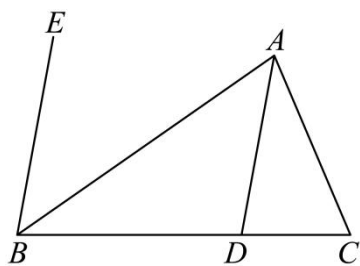
【分析】由于关于 x 的一元二次方程 $mx^2 + 2x + 1 = 0$ 有实数根，根据一元二次方程根与系数的关系可知 $\Delta \geq 0$ ，且 $m \neq 0$ ，据此列不等式求解即可。

【详解】解：由题意得， $4 - 4m \geq 0$ ，且 $m \neq 0$ ，
解得， $m \in 1$ ，且 $m \neq 0$ 。

故选：D。

【点睛】本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 与根的关系，熟练掌握根的判别式与根的关系式解答本题的关键。当 $\Delta > 0$ 时，一元二次方程有两个不相等的实数根；当 $\Delta = 0$ 时，一元二次方程有两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，一元二次方程没有实数根。

5. 如图，分别过 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 作 $AD \parallel BE$ 。若 $\angle CAD = 25^\circ$ ， $\angle EBC = 80^\circ$ ，则 $\angle ACB$ 的度数为 ()



- A. 65° B. 75° C. 85° D. 95°

【答案】B

【解析】

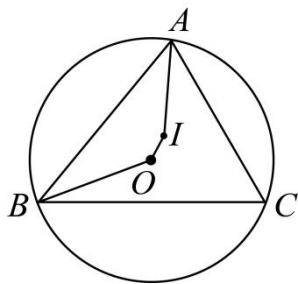
【分析】根据两直线平行，同位角相等，得到 $\angle ADC = \angle EBC = 80^\circ$ ，利用三角形内角和定理计算即可。

【详解】 $\because AD \parallel BE$ ， $\angle EBC = 80^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADC = \angle EBC = 80^\circ$ ，
 $\because \angle CAD = 25^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ADC - \angle CAD = 75^\circ$ ，

故选 B。

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形内角和定理，熟练掌握平行线性质的关键是解题的关键。

6. 如图，点 O 是 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，连接 OB, IA 。若 $\angle CAI = 35^\circ$ ，则 $\angle OBC$ 的度数为 ()

A. 15° B. 17.5° C. 20° D. 25°

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形内心的定义可得 $\angle BAC$ 的度数，然后由圆周角定理求出 $\angle BOC$ ，再根据三角形内角和定理以及等腰三角形的性质得出答案.

【详解】解：连接 OC ，

$\because$ 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心， $\angle CAI = 35^\circ$ ，

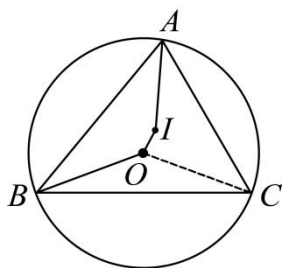
$\therefore \angle BAC = 2\angle CAI = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 140^\circ$ ，

$\because OB = OC$ ，

$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$ ，

故选：C.



【点睛】本题主要考查了三角形内心的定义和圆周角定理，熟知三角形的内心是三

角形三个内角平分线的交点是解题的关键.

7. 若关于 x 的分式方程 $\frac{x}{x-1} + 1 = \frac{m}{1-x}$ 的解为非负数，则 m 的取值范围是 ()

A. $m \leq 1$ 且 $m \neq -1$ B. $m \geq -1$ 且 $m \neq 1$ C. $m < 1$ 且 $m \neq -1$ D. $m > -1$ 且 $m \neq 1$

【答案】A

【解析】

【分析】把分式方程的解求出来，排除掉增根，根据方程的解是非负数列出不等式，最后求出 m 的范围.

【详解】解：方程两边都乘以 $(x-1)$ ，得： $x + x - 1 = -m$ ，

解得： $x = \frac{1-m}{2}$ ，

$$\therefore x-1 \neq 0, \text{ 即: } \frac{1-m}{2} \neq 1,$$

$$\therefore m \neq -1,$$

又 $\because$ 分式方程的解为非负数,

$$\therefore \frac{1-m}{2} \geq 0,$$

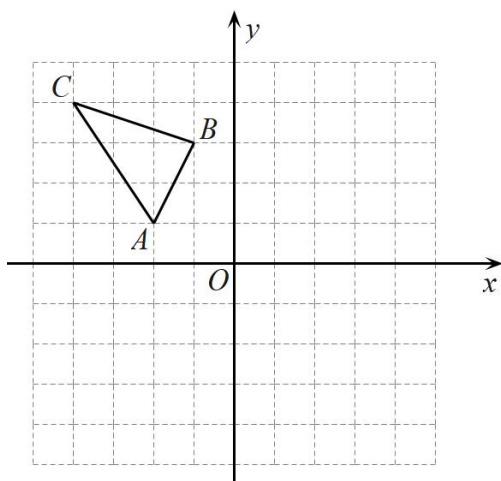
$$\therefore m \leq 1,$$

$\therefore m$ 的取值范围是 $m \leq 1$ 且 $m \neq -1$,

故选: A.

【点睛】 本题考查了分式方程的解, 根据条件列出不等式是解题的关键, 分式方程一定要检验.

8. 如图, 在直角坐标系中, $\triangle ABC$ 各点坐标分别为 $A(-2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-4,4)$. 先作 $\triangle ABC$ 关于 x 轴成轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$, 再把 $\triangle A_1B_1C_1$ 平移后得到 $\triangle A_2B_2C_2$. 若 $B_2(2,1)$, 则点 A_2 坐标为 ()



- A. $(1,5)$ B. $(1,3)$ C. $(5,3)$ D. $(5,5)$

【答案】 B

【解析】

【分析】 三点 $A(-2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-4,4)$ 的对称点坐标为 $A_1(-2,-1)$, $B_1(-1,-3)$, $C_1(-4,-4)$, 结合 $B_2(2,1)$, 得到平移规律为向右平移 3 个单位, 向上平移 4 个单位, 计算即可.

【详解】 $\because$ 三点 $A(-2,1)$, $B(-1,3)$, $C(-4,4)$ 的对称点坐标为 $A_1(-2,-1)$, $B_1(-1,-3)$, $C_1(-4,-4)$, 结合 $B_2(2,1)$,

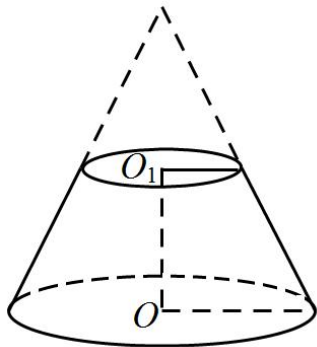
$\therefore$ 得到平移规律为向右平移 3 个单位, 向上平移 4 个单位,

故 A_2 坐标为 $(1,3)$.

故选 B.

【点睛】 本题考查了关于 x 轴对称，平移规律，熟练掌握轴对称的特点和平移规律是解题的关键.

9. 如图，该几何体是由一个大圆锥截去上部的小圆锥后剩下的部分. 若该几何体上、下两个圆的半径分别为 1 和 2，原大圆锥高的剩余部分 OO_1 为 $\sqrt{2}$ ，则其侧面展开图的面积为 ()



A. $\sqrt{3}\pi$

B. $2\sqrt{3}\pi$

C. $3\sqrt{3}\pi$

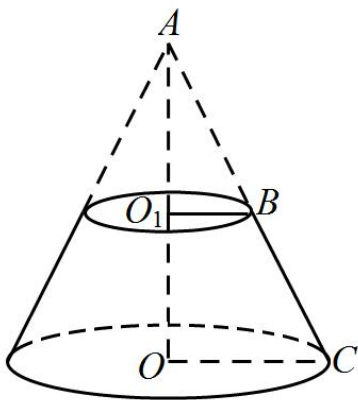
D. $4\sqrt{3}\pi$

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据展开面积大圆锥侧面积与小圆锥侧面积之差计算即可.

【详解】 根据题意，补图如下：



$$\because OC \parallel BO_1, OC = 2, BO_1 = 1,$$

$$\therefore \triangle BO_1A \sim \triangle COA,$$

$$\therefore \frac{AO_1}{AO} = \frac{BO_1}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore AO_1 = O_1O = \sqrt{2},$$

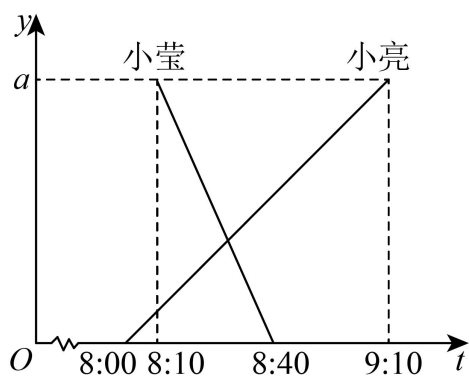
$$\therefore AB = BC = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{侧面展开图的面积为 } \pi \times 2 \times 2\sqrt{3} - \pi \times 1 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\pi,$$

故选 C.

【点睛】本题考查了圆锥的侧面积计算，三角形相似的判定和性质，熟练掌握圆锥的侧面积计算是解题的关键.

10. 甲乙两地相距 a 千米，小亮 8:00 乘慢车从甲地去乙地，10 分钟后小莹乘快车从乙地赶往甲地. 两人分别距甲地的距离 y (千米) 与两人行驶时刻 t ($\times$ 时 $\times$ 分) 的函数图象如图所示，则小亮与小莹相遇的时刻为 ()



A. 8:28

B. 8:30

C. 8:32

D. 8:35

【答案】A

【解析】

【分析】利用待定系数法求出两条直线的函数解析式，将两个解析式联立，通过解方程求出交点的横坐标即可.

【详解】解：令小亮出发时对应的 t 值为 0，小莹出发时对应的 t 值为 10，则小亮到达乙地时对应的 t 值为 70，小莹到达甲地时对应的 t 值为 40，

设小亮对应函数图象的解析式为 $y_1 = k_1 t$ ，

将 $(70, a)$ 代入解析式得 $a = 70k_1$ ，解得 $k_1 = \frac{a}{70}$ ，

$\therefore$ 小亮对应函数图象的解析式为 $y_1 = \frac{a}{70} t$ ，

设小莹对应函数图象的解析式为 $y_2 = k_2 t + b$ ，

将 $(10, a)$ ， $(40, 0)$ 代入解析式，得 $\begin{cases} a = 10k_2 + b \\ 0 = 40k_2 + b \end{cases}$ ，

$$\text{解得} \begin{cases} k_2 = -\frac{a}{30} \\ b = \frac{4}{3}a \end{cases},$$

$\therefore$ 小莹对应函数图象的解析式为 $y_2 = -\frac{a}{30}t + \frac{4}{3}a$,

令 $y_1 = y_2$, 得 $\frac{a}{70}t = -\frac{a}{30}t + \frac{4}{3}a$,

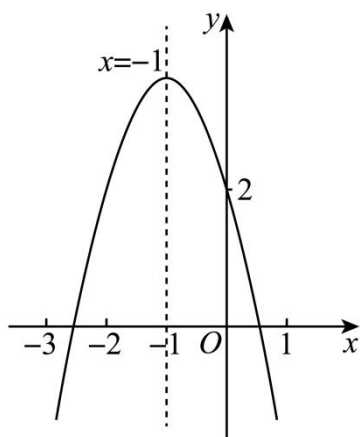
解得 $t = 28$,

$\therefore$ 小亮与小莹相遇的时刻为 8:28.

故选 A.

【点睛】本题考查一次函数的实际应用，解题的关键是利用待定系数法求出两条直线的函数解析式，熟练运用数形结合思想.

11. 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的部分图象如图所示，图象经过点 $(0, 2)$ ，其对称轴为直线 $x = -1$. 下列结论：① $3a + c > 0$ ；②若点 $(-4, y_1)$, $(3, y_2)$ 均在二次函数图象上，则 $y_1 > y_2$ ；③关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -1$ 有两个相等的实数根；④满足 $ax^2 + bx + c > 2$ 的 x 的取值范围为 $-2 < x < 0$. 其中正确结论的个数为 ().



A. 1 个

B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

【答案】B

【解析】

【分析】根据抛物线开口向下可得 $a < 0$ ，根据抛物线的对称轴可推得 $b = 2a$ ，根据 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，即可得到 $a + b + c < 0$ ，推得 $3a + c < 0$ ，故①错误；根据点的坐标和对称轴可得点 $(-4, y_1)$ 到对称轴的距离小于点 $(3, y_2)$ 到对称轴的距离，根据抛物线的对称性和增减性可得 $y_1 > y_2$ ，故②正确；根据抛物线的图象可知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = -1$ 有两个不同的交点，推得关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -1$ 有两个不相等的实数根，故③错误；根据抛物线的对称性可得二次函数必然经过点 $(-2, 2)$ ，即可得到 $ax^2 + bx + c > 2$ 时， x 的取值范围 $-2 < x < 0$ ，故④正确.

【详解】① $\because$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0.$$

$$\because \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a,$$

由图象可得 $x = 1$ 时， $y < 0$ ，

$$\text{即 } a + b + c < 0,$$

$$\text{而 } b = 2a,$$

$$\therefore 3a + c < 0. \text{ 故①错误；}$$

② $\because$ 抛物线开口向下，抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ 。

故当 $x < -1$ 时， y 随 x 的增大而增大，当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore |-1 - (-4)| = 3, \quad |-1 - 3| = 4,$$

即点 $(-4, y_1)$ 到对称轴的距离小于点 $(3, y_2)$ 到对称轴的距离，

故 $y_1 > y_2$ ，故②正确；

③由图象可知：二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y = -1$ 有两个不同的交点，

即关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -1$ 有两个不相等的实数根，故③错误；

④ $\because$ 函数图象经过 $(0, 2)$ ，对称轴为直线 $x = -1$ ，

$\therefore$ 二次函数必然经过点 $(-2, 2)$ ，

$\therefore ax^2 + bx + c > 2$ 时， x 的取值范围 $-2 < x < 0$ ，故④正确；

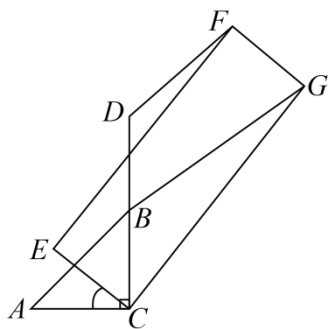
综上，②④正确，

故选：B.

【点睛】本题考查了二次函数的性质，二次函数与一元二次方程的关系，二次函数图象与系数的关系：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小，当 $a > 0$ 时，抛物线向上开口；当 $a < 0$ 时，抛物线向下开口；一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置；常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点；熟练掌握二次函数的性质是解题的关键。

12. 如图，已知等腰直角 $\triangle ABC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = \sqrt{2}$ ，点 C 是矩形 $ECGF$ 与 $\triangle ABC$ 的公共顶点，且 $CE = 1$ ， $CG = 3$ ；点 D 是 CB 延长线上一点，且 $CD = 2$ 。连接 BG ， DF ，在矩形 $ECGF$ 绕点 C 按顺时

针方向旋转一周的过程中，当线段 BG 达到最长和最短时，线段 DF 对应的长度分别为 m 和 n ，则 $\frac{m}{n}$ 的值为（ ）



A. 2

B. 3

C. $\sqrt{10}$ D. $\sqrt{13}$

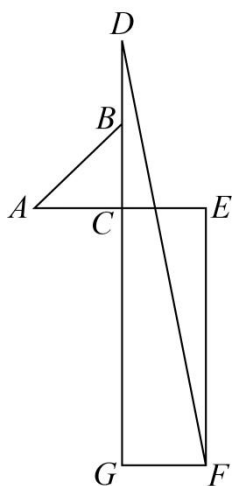
【答案】D

【解析】

【分析】根据锐角三角函数可求得 $AC = BC = 1$ ，当线段 BG 达到最长时，此时点 G 在点 C 的下方，且 B ， C ， G 三点共线，求得 $BG = 4$ ， $DG = 5$ ，根据勾股定理求得 $DF = \sqrt{26}$ ，即 $m = \sqrt{26}$ ，当线段 BG 达到最短时，此时点 G 在点 C 的上方，且 B ， C ， G 三点共线，则 $BG = 2$ ， $DG = 1$ ，根据勾股定理求得 $DF = \sqrt{2}$ ，即 $n = \sqrt{2}$ ，即可求得 $\frac{m}{n} = \sqrt{13}$ 。

【详解】 $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $AB = \sqrt{2}$ ， $\therefore AC = BC = AB \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ ，

当线段 BG 达到最长时，此时点 G 在点 C 的下方，且 B ， C ， G 三点共线，如图：

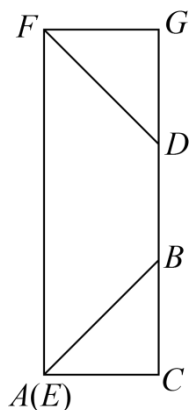


则 $BG = BC + CG = 4$ ， $DG = DB + BG = 5$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中， $DF = \sqrt{DG^2 + GF^2} = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ ，

即 $m = \sqrt{26}$ ，

当线段 BG 达到最短时，此时点 G 在点 C 的上方，且 B, C, G 三点共线，如图：



则 $BG = CG - BC = 2$, $DG = BG - DB = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle DGF$ 中, $DF = \sqrt{DG^2 + GF^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$,

即 $n = \sqrt{2}$,

故 $\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}} = \sqrt{13}$,

故选: D.

【点睛】 本题考查了锐角三角函数，勾股定理等，根据旋转推出线段 BG 最长和最短时的位置是解题的关键.

非选择题 (共 84 分)

二、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分. 只要求填写最后结果)

13. 计算: $\left(\sqrt{48} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \div \sqrt{3} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 3

【解析】

【分析】 先利用二次根式的性质化简，再计算括号内的减法，然后计算二次根式的除法即可.

【详解】 解: $\left(\sqrt{48} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \div \sqrt{3}$

$$= \left(4\sqrt{3} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \div \sqrt{3}$$

$$= (4\sqrt{3} - \sqrt{3}) \div \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3} \div \sqrt{3}$$

$$= 3$$

故答案为：3.

【点睛】本题考查了二次根式的混合运算，熟练掌握二次根式的性质和运算法则是解题的关键.

14. 若不等式组 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} \geq \frac{x-2}{3} \\ 2x-m \geq x \end{cases}$ 的解集为 $x \geq m$ ，则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \geq -1$

【解析】

【分析】分别求出两个不等式的解集，根据不等式组的解集即可求解.

【详解】解： $\begin{cases} \frac{x-1}{2} \geq \frac{x-2}{3} \text{ ①} \\ 2x-m \geq x \text{ ②} \end{cases}$,

解不等式①得： $x \geq -1$,

解不等式②得： $x \geq m$,

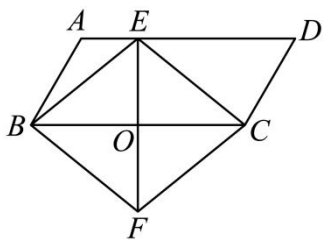
$\therefore$ 不等式组的解集为： $x \geq m$,

$\therefore m \geq -1$.

故答案为： $m \geq -1$.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，根据不等式的解求参数的取值范围，熟练掌握解不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）是解题的关键.

15. 如图，在 $ABCD$ 中， BC 的垂直平分线 EO 交 AD 于点 E ，交 BC 于点 O ，连接 BE ， CE ，过点 C 作 $CF \parallel BE$ ，交 EO 的延长线于点 F ，连接 BF 。若 $AD = 8$ ， $CE = 5$ ，则四边形 $BFCE$ 的面积为_____.



【答案】 24

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle BEO = \angle CFO$ ，根据垂直平分线的性质可得 $BO = CO$ ， $\angle BOE = \angle COF = 90^\circ$ ，根据全等三角形的判定和性质可得 $BE = CF$ ， $OE = OF$ ，根据平行四边形的判定和菱形的判定可推得四边形 $BFCE$ 为菱形，根据勾股定理求得 $OE = 3$ ，根据菱形的性质即可求得四边形 $BFCE$ 的面积.

【详解】 $\because CF \parallel BE$,

$$\therefore \angle BEO = \angle CFO,$$

$\because BC$ 的垂直平分线 EO 交 AD 于点 E ,

$$\therefore BO = CO, \angle BOE = \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF,$$

$$\therefore BE = CF, OE = OF,$$

$\therefore$ 四边形 $BFCE$ 为平行四边形,

$$\text{又} \because OE = OF, BO = CO, \angle BOE = \angle COF = 90^\circ,$$

$\therefore$ 平行四边形 $BFCE$ 为菱形,

$$\because AD = 8,$$

$$\therefore BC = 8,$$

$$\therefore OC = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$$\text{在 Rt}\triangle EOC \text{ 中, } OE = \sqrt{EC^2 - OC^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

$$\text{故菱形 } BFCE \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} \times BC \times EF = \frac{1}{2} \times BC \times 2EO = \frac{1}{2} \times 8 \times 2 \times 3 = 24,$$

故答案为: 24.

【点睛】本题考查了平行线的性质, 垂直平分线的性质, 全等三角形的判定和性质, 平行四边形的判定, 菱形的判定和性质, 勾股定理, 熟练掌握以上判定和性质是解题的关键.

16. 在一个不透明的袋子中, 装有五个分别标有数字 $-\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 0, 2, π 的小球, 这些小球除数字外其他完全相同. 从袋子中随机摸出两个小球, 两球上的数字之积恰好是有理数的概率为_____.

【答案】 $\frac{2}{5}$ ## 0.4

【解析】

【分析】列表得出所有等可能的结果数, 再从中找到符合条件的结果数, 然后再用概率公式求解即可.

【详解】解: 根据题意列表如下:

	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	0	2	π
$-\sqrt{3}$		$-3\sqrt{2}$	0	$-2\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}\pi$
$\sqrt{6}$	$-3\sqrt{2}$		0	$2\sqrt{6}$	$\sqrt{6}\pi$
0	0	0		0	0

2	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{6}$	0		2π
π	$-\sqrt{3}\pi$	$\sqrt{6}\pi$	0	2π	

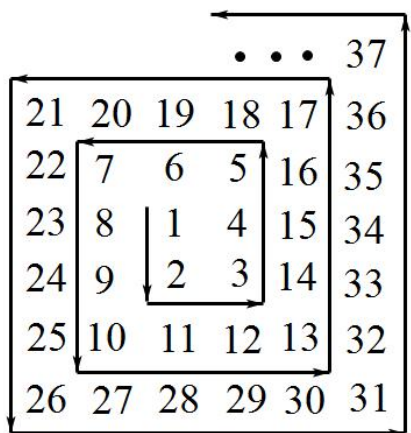
共有 20 种等可能出现的结果，两球上的数字之积恰好是有理数的有 8 种，

$\therefore$ 两球上的数字之积恰好是有理数的概率为 $P = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$,

故答案为: $\frac{2}{5}$.

【点睛】本题主要考查的是用列表法或树状图法求概率，列表法可以重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件，用到的知识点为：概率等于所求情况数与总情况数之比.

17. 如图，图中数字是从 1 开始按箭头方向排列的有序数阵. 从 3 开始，把位于同一列且在拐角处的两个数字提取出来组成有序数对: $(3,5)$; $(7,10)$; $(13,17)$; $(21,26)$; $(31,37)$... 如果单把每个数对中的第一个或第二个数字按顺序排列起来研究，就会发现其中的规律. 请写出第 n 个数对: _____.



【答案】 $(n^2 + n + 1, n^2 + 2n + 2)$

【解析】

【分析】根据题意单另把每个数对中的第一个或第二个数字按顺序排列起来研究，可发现第 n 个数对的一个数为: $n(n+1)+1$ ，第 n 个数对的第二个位: $(n+1)^2 + 1$ ，即可求解.

【详解】解：每个数对的第一个数分别为 3, 7, 13, 21, 31, ...

即: $1 \times 2 + 1$, $2 \times 3 + 1$, $3 \times 4 + 1$, $4 \times 5 + 1$, $5 \times 6 + 1$, ...

则第 n 个数对的第一个数为: $n(n+1)+1 = n^2 + n + 1$,

每个数对的第二个数分别为 5, 10, 17, 26, 37, ...

即: $2^2 + 1$; $3^2 + 1$; $4^2 + 1$; $5^2 + 1$; $6^2 + 1$...

则第 n 个数对的第二个位: $(n+1)^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$,

$\therefore$ 第 n 个数对为: $(n^2 + n + 1, n^2 + 2n + 2)$,

故答案为: $(n^2 + n + 1, n^2 + 2n + 2)$.

【点睛】此题考查数字的变化规律, 找出数字之间的排列规律, 利用拐弯出数字的差的规律解决问题.

三、解答题 (本题共 8 个小题, 共 69 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

18. 先化简, 再求值: $\left(\frac{a}{a^2 - 4a + 4} + \frac{a+2}{2a - a^2}\right) \div \frac{2}{a^2 - 2a}$, 其中 $a = \sqrt{2} + 2$.

【答案】 $\frac{2}{a-2}, \sqrt{2}$

【解析】

【分析】运用因式分解, 约分, 通分的技巧化简计算即可.

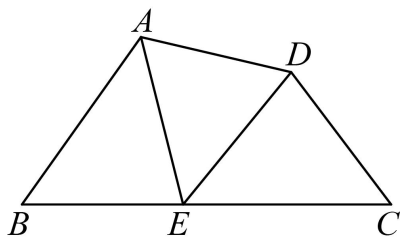
$$\begin{aligned} \text{【详解】} & \left(\frac{a}{a^2 - 4a + 4} + \frac{a+2}{2a - a^2}\right) \div \frac{2}{a^2 - 2a} \\ &= \left(\frac{a}{(a-2)^2} - \frac{a+2}{a(a-2)}\right) \times \frac{a(a-2)}{2} \\ &= \frac{a}{(a-2)^2} \times \frac{a(a-2)}{2} - \frac{a+2}{a(a-2)} \times \frac{a(a-2)}{2} \\ &= \frac{a^2}{2(a-2)} - \frac{a+2}{2} = \frac{2}{a-2}; \end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{2} + 2$ 时,

$$\frac{2}{a-2} = \frac{2}{\sqrt{2} + 2 - 2} = \sqrt{2}.$$

【点睛】本题考查了分式的化简求值, 熟练掌握因式分解, 约分, 通分的技巧是解题的关键.

19. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 E 是边 BC 上一点, 且 $BE = CD$, $\angle B = \angle AED = \angle C$.



(1) 求证: $\angle EAD = \angle EDA$;

(2) 若 $\angle C = 60^\circ$, $DE = 4$ 时, 求 $\triangle AED$ 的面积.

【答案】(1) 见解析 (2) $4\sqrt{3}$

【解析】

【分析】(1) 由 $\angle B = \angle AED$ 求出 $\angle BAE = \angle CED$ ，然后利用 AAS 证明 $\triangle BAE \cong \triangle CED$ ，可得 $EA = ED$ ，再由等边对等角得出结论；

(2) 过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F ，根据等腰三角形的性质和含 30° 直角三角形的性质求出 DF 和 AD ，然后利用勾股定理求出 EF ，再根据三角形面积公式计算即可。

【小问 1 详解】

证明： $\because \angle B = \angle AED$ ，

$\therefore 180^\circ - \angle B = 180^\circ - \angle AED$ ，即 $\angle BEA + \angle BAE = \angle BEA + \angle CED$ ，

$\therefore \angle BAE = \angle CED$ ，

在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle CED$ 中，
$$\begin{cases} \angle B = \angle C \\ \angle BAE = \angle CED, \\ BE = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle BAE \cong \triangle CED$ (AAS)，

$\therefore EA = ED$ ，

$\therefore \angle EAD = \angle EDA$ ；

【小问 2 详解】

解：过点 E 作 $EF \perp AD$ 于 F ，

由 (1) 知 $EA = ED$ ，

$\therefore \angle AED = \angle C = 60^\circ$ ，

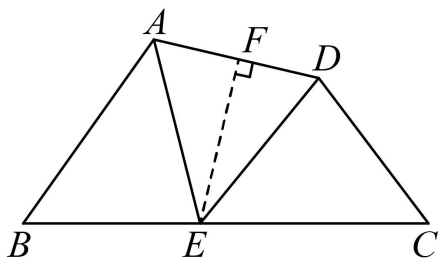
$\therefore \angle AEF = \angle DEF = 30^\circ$ ，

$\therefore DE = 4$ ，

$\therefore DF = \frac{1}{2}DE = 2$ ，

$\therefore AD = 2DF = 4$ ， $EF = \sqrt{DE^2 - DF^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，

$\therefore S_{\triangle AED} = \frac{1}{2}AD \cdot EF = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ 。

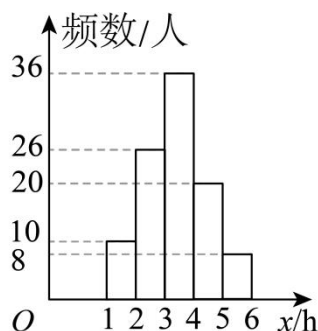


【点睛】本题考查了三角形内角和定理，全等三角形的判定和性质，

等腰三角形的性质，含 30° 直角三角形的性质以及勾股定理等知识，正确寻找证明三角形全等的条件是解题的关键.

20. 某中学把开展课外经典阅读活动作为一项引领学生明是非、知荣辱、立志向、修言行的德育举措. 为了调查活动开展情况，需要了解全校 2000 名学生一周的课外经典阅读时间. 从本校学生中随机抽取 100 名进行调查，将调查的一周课外经典阅读的平均时间 $x(\text{h})$ 分为 5 组：① $1 \leq x < 2$ ；② $2 \leq x < 3$ ；③ $3 \leq x < 4$ ；④ $4 \leq x < 5$ ；⑤ $5 \leq x < 6$ ，并将调查结果用如图所示的统计图描述.

一周课外经典阅读的平均时间统计



根据以上信息，解答下列问题：

(1) 本次调查中，一周课外经典阅读的平均时间的众数和中位数分别落在第_____组和第_____组（填序号）；一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的学生人数占被调查人数的百分比为_____；估计全校一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的学生有_____人；

(2) 若把各组阅读时间的下限与上限的中间值近似看作该组的平均阅读时间，估计这 100 名学生一周课外经典阅读的平均时间是多少？

(3) 若把一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的人数百分比超过 40%，作为衡量此次开展活动成功的标准，请你评价此次活动，并提出合理化的建议.

【答案】 (1) ③，③，28%，560；

(2) 3.4；

(3) 此次活动不成功，建议：①学校多举办经典阅读活动；②开设经典阅读知识竞赛，提高学生阅读兴趣等（答案不唯一）

【解析】

【分析】 (1) 根据众数和中位数的定义以及用样本估计总体的思想求解即可；

(2) 首先求出每组的平均阅读时间，然后根据算术平均数的计算方法求解即可；

(3) 将一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的人数百分比与 40% 进行比较即可解答.

【小问 1 详解】

解：∵第③组的人数最多，

∴一周课外经典阅读的平均时间的众数落在第③组；

∴第 50、51 名学生均在第③组，

∴一周课外经典阅读的平均时间的中位数落在第③组；

由题意得： $\frac{20+8}{100} \times 100\% = 28\%$ ，

即一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的学生人数占被调查人数的百分比为 28%；

$2000 \times 28\% = 560$ （人），

即估计全校一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的学生有 560 人，

故答案为：③，③，28%，560；

【小问 2 详解】

解：由题意得，每组的平均阅读时间分别为 1.5，2.5，3.5，4.5，5.5，

∴估计这 100 名学生一周课外经典阅读的平均时间为：

$$\frac{1.5 \times 10 + 2.5 \times 26 + 3.5 \times 36 + 4.5 \times 20 + 5.5 \times 8}{100} = 3.4 \text{ 小时；}$$

【小问 3 详解】

解：一周课外经典阅读的平均时间达到 4 小时的人数百分比为 28%，

∴ $28\% < 40\%$ ，

∴本次课外经典阅读活动不成功，

建议：①学校多举办经典阅读活动；②开设经典阅读知识竞赛，提高学生阅读兴趣等（答案不唯一）。

【点睛】本题考查了频数分布直方图，由样本估计总体，中位数和众数，从统计图获取有用信息是解题的关键。

21. 今年五一小长假期间，我市迎来了一个短期旅游高峰。某热门景点的门票价格规定见下表：

票的种类	A	B	C
购票人数/人	1~50	51~100	100 以上
票价/元	50	45	40

某旅行社接待的甲、乙两个旅游团共 102 人（甲团人数多于乙团），在打算购买门票时，如果把两团联合作为一个团体购票会比两团分别各自购票节省 730 元。

(1) 求两个旅游团各有多少人？

(2) 一个人数不足 50 人的旅游团，当游客人数最低为多少人时，购买 B 种门票比购买 A 种门票节省？

【答案】(1) 甲团人数有 58 人，乙团人数有 44 人；

(2) 当游客人数最低为 46 人时，购买 B 种门票比购买 A 种门票节省。

【解析】

【分析】(1) 设甲团人数有 x 人，乙团人数有 y 人，根据“甲、乙两个旅游团共 102 人，把两团联合作为一个团体购票会比两团分别各自购票节省 730 元”列方程组求解即可；

(2) 设游客人数为 a 人时，购买 B 种门票比购买 A 种门票节省，根据“人数不足 50 人，购买 B 种门票比购买 A 种门票节省”列不等式求解即可.

【小问 1 详解】

解：设甲团人数有 x 人，乙团人数有 y 人，

$$\text{由题意得：} \begin{cases} x + y = 102 \\ 45x + 50y = 102 \times 40 + 730 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 58 \\ y = 44 \end{cases}$$

答：甲团人数有 58 人，乙团人数有 44 人；

【小问 2 详解】

解：设游客人数为 a 人时，购买 B 种门票比购买 A 种门票节省，

$$\text{由题意得：} 45 \times 51 < 50a,$$

$$\text{解得：} a > 45.9,$$

$\therefore a$ 为整数，

$\therefore$ 当游客人数最低为 46 人时，购买 B 种门票比购买 A 种门票节省.

【点睛】本题考查了二元一次方程组的应用和一元一次不等式的应用，找出合适的等量关系和不等关系列出方程组和不等式是解题的关键.

22. 东昌湖西岸的明珠大剧院，隔湖与远处的角楼、城门楼、龙堤、南关桥等景观遥相呼应. 如图所示，城门楼 B 在角楼 A 的正东方向 520m 处，南关桥 C 在城门楼 B 的正南方向 1200m 处. 在明珠大剧院 P 测得角楼 A 在北偏东 68.2° 方向，南关桥 C 在南偏东 56.31° 方向 (点 A, B, C, P 四点在同一平面内). 求明珠大剧院到龙堤 BC 的距离 (结果精确到 1m).

(参考数据: $\sin 68.2^\circ \approx 0.928$, $\cos 68.2^\circ \approx 0.371$, $\tan 68.2^\circ \approx 2.50$, $\sin 56.31^\circ \approx 0.832$, $\cos 56.31^\circ \approx 0.555$, $\tan 56.31^\circ \approx 1.50$)

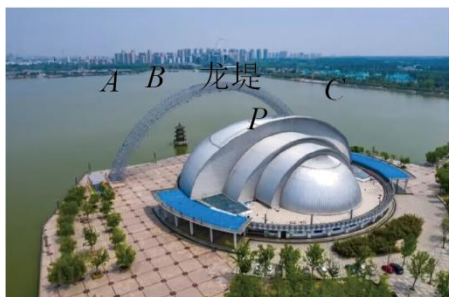


图 1

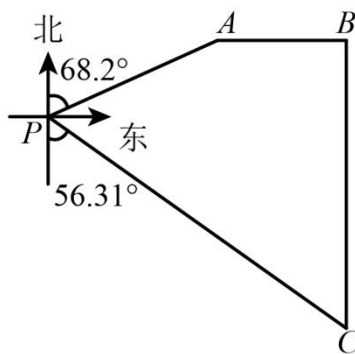


图 2

【答案】明珠大剧院到龙堤 BC 的距离为 1320m .

【解析】

【分析】如图，首先证明四边形 $ADEB$ 是矩形，可得 $AD = BE$ ， $AB = DE$ ，然后解直角三角形求出 $PD = 2.5BE$ ， $PE = 1.5CE$ ，进而得出关于 BE 的方程，求出 BE 即可解决问题.

【详解】解：如图，由题意得 $AB \perp BC$ ， $PE \perp BC$ ， $AD \perp PE$ ， $AB = 520\text{m}$ ， $BC = 1200\text{m}$ ， $\angle PAD = 68.2^\circ$ ， $\angle C = 56.31^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle BED = \angle ADE = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $ADEB$ 是矩形，

$$\therefore AD = BE, AB = DE,$$

$$\therefore \tan \angle PAD = \tan 68.2^\circ = \frac{PD}{AD},$$

$$\therefore 2.5 = \frac{PD}{AD}, \text{ 即 } PD = 2.5AD = 2.5BE,$$

$$\therefore \tan \angle C = \tan 56.31^\circ = \frac{PE}{CE},$$

$$\therefore 1.5 = \frac{PE}{CE}, \text{ 即 } PE = 1.5CE,$$

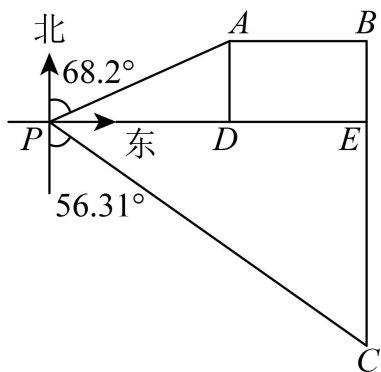
$$\therefore PE = PD + DE = 2.5BE + 520, CE = 1200 - BE,$$

$$\therefore 2.5BE + 520 = 1.5(1200 - BE),$$

解得： $BE = 320$ ，

$$\therefore PE = 2.5BE + 520 = 1320\text{m},$$

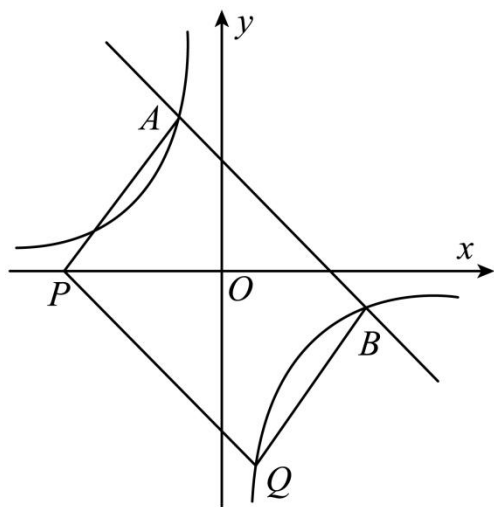
答：明珠大剧院到龙堤 BC 的距离为 1320m .



【点睛】本题考查了解直角三角形的应用，矩形的判定和性质，正确理解

锐角三角函数的定义是解题的关键.

23. 如图，一次函数 $y = kx + b$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像相交于 $A(-1, 4)$ ， $B(a, -1)$ 两点.



(1) 求反比例函数和一次函数的表达式;

(2) 点 $P(n, 0)$ 在 x 轴负半轴上，连接 AP ，过点 B 作 $BQ \parallel AP$ ，交 $y = \frac{m}{x}$ 的图像于点 Q ，连接 PQ . 当

$BQ = AP$ 时，若四边形 $APQB$ 的面积为 36，求 n 的值.

【答案】(1) $y = -\frac{4}{x}$, $y = -x + 3$

(2) $n = -\frac{21}{5}$

【解析】

【分析】(1) 根据反比例函数过点 $A(-1, 4)$ ， $B(a, -1)$ 两点，确定 $B(4, -1)$ ，待定系数法计算即可.

(2) 根据平移思想，设解析式求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图像与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图像相交于 $A(-1, 4)$ ， $B(a, -1)$ 两点，

$\therefore m = -1 \times 4 = -4$,

故反比例函数的解析式为 $y = -\frac{4}{x}$,

$$\therefore a = -\frac{4}{-1} = 4,$$

故 $B(4, -1)$,

$$\therefore \begin{cases} 4k + b = -1 \\ -k + b = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线的解析式为 $y = -x + 3$.

【小问 2 详解】

$\therefore A(-1, 4), B(4, -1), P(n, 0), BQ \parallel AP, BQ = AP$,

$\therefore$ 四边形 $APQB$ 是平行四边形,

$\therefore$ 点 A 到点 P 的平移规律是向左平移 $-1-n$ 个单位, 向下平移 4 个单位,

$\therefore$ 点 $B(4, -1)$ 到点 Q 的平移规律也是向左平移 $-1-n$ 个单位, 向下平移 4 个单位,

故 $Q(5+n, -5)$,

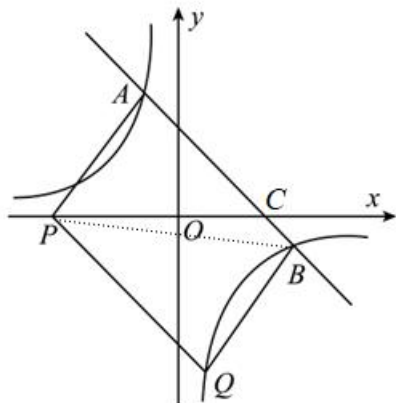
$\therefore Q(5+n, -5)$ 在 $y = -\frac{4}{x}$ 上,

$$\therefore 5+n = -\frac{4}{-5} = \frac{4}{5},$$

$$\text{解得: } n = -\frac{21}{5},$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $\left(0, -\frac{21}{5}\right)$,

设 AB 与 x 轴交于点 C , 连接 PB , 如图所示:



把 $y=0$ 代入 $y=-x+3$ ，解得： $x=3$ ，

$$\therefore C(3,0),$$

$$\therefore PC = 3 - \left(-\frac{21}{5}\right) = \frac{36}{5},$$

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times \frac{36}{5} \times [4 - (-1)] = 18,$$

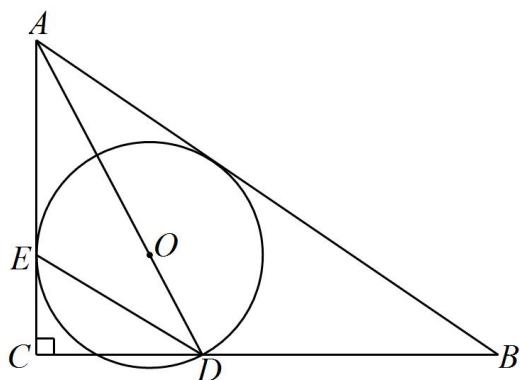
$\therefore$ 四边形 $APQB$ 为平行四边形，

$$\therefore S_{\text{四边形}APQB} = 2S_{\triangle APB} = 36,$$

$\therefore$ 当 $n = -\frac{21}{5}$ 时，符合题意.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例函数的交点，平移规律计算，熟练掌握规律是解题的关键.

24. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 BC 于点 D ， $\angle ADC$ 的平分线 DE 交 AC 于点 E . 以 AD 上的点 O 为圆心， OD 为半径作 $\odot O$ ，恰好过点 E .



(1) 求证： AC 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $CD = 12$ ， $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$ ，求 $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 见解析 (2) $15 - 3\sqrt{5}$

【解析】

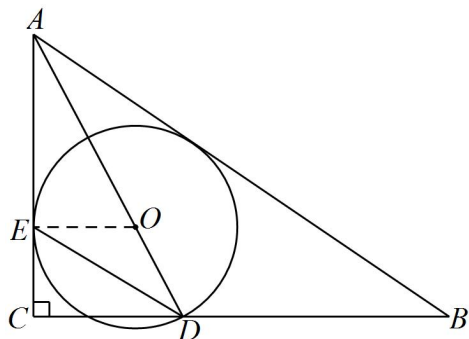
【分析】 (1) 连接 OE ，由题意可知 $OD = OE$ ，可知 $\angle OED = \angle ODE$ ，易证得 $\angle OED = \angle CDE$ ，可知 $OE \parallel CD$ ，由 $\angle ACB = 90^\circ$ ，易知 $OE \perp AC$ ，进而可证得结论；

(2) 由角平分线的性质可知 $CD = DF$ ，可得 $BF = \frac{DF}{\tan \angle ABC} = 16$ ，进而可求得 $BD = 20$ ， $BC = CD + BD = 32$ ， $AC = BC \cdot \tan \angle ABC = 24$ ， $AD = 12\sqrt{5}$ ，由 $OE \parallel CD$ ，可证得 $\triangle AEO \sim \triangle ACD$ ，

可知 $\frac{EO}{CD} = \frac{AO}{AD}$ ，进而可得 $\frac{EO}{12} = \frac{12\sqrt{5}-OD}{12\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}-EO}{12\sqrt{5}}$ ，求得 $EO = 15 - 3\sqrt{5}$ ，即为 $\odot O$ 的半径.

【小问 1 详解】

证明：连接 OE ，



由题意可知 $OD = OE$ ，

$$\therefore \angle OED = \angle ODE,$$

$$\therefore DE \text{ 平分 } \angle ADC,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle ODE,$$

$$\therefore \angle OED = \angle CDE,$$

$$\therefore OE \parallel CD,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = 90^\circ,$$

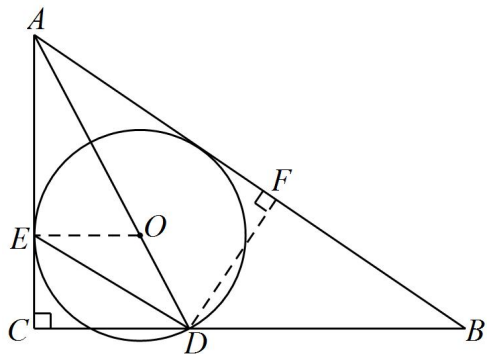
$$\therefore \angle AEO = 90^\circ,$$

即 $OE \perp AC$ ，

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线；

【小问 2 详解】

解：过点 D 作 $DF \perp AB$ ，



$$\therefore AD \text{ 平分 } \angle BAC, \quad DF \perp AB, \quad \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore CD = DF,$$

$$\because CD = 12, \tan \angle ABC = \frac{3}{4},$$

$$\therefore BF = \frac{DF}{\tan \angle ABC} = 16,$$

$$\therefore BD = \sqrt{DF^2 + BF^2} = 20, \text{ 则 } BC = CD + BD = 32,$$

$$\therefore AC = BC \cdot \tan \angle ABC = 24,$$

$$\therefore AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = 12\sqrt{5},$$

$$\therefore OE \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AEO \sim \triangle ACD,$$

$$\therefore \frac{EO}{CD} = \frac{AO}{AD}, \text{ 即: } \frac{EO}{12} = \frac{12\sqrt{5} - OD}{12\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5} - EO}{12\sqrt{5}},$$

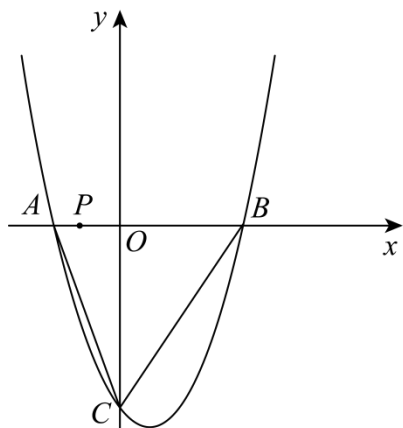
$$\text{可得: } EO = 15 - 3\sqrt{5},$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 15 - 3\sqrt{5}.$$

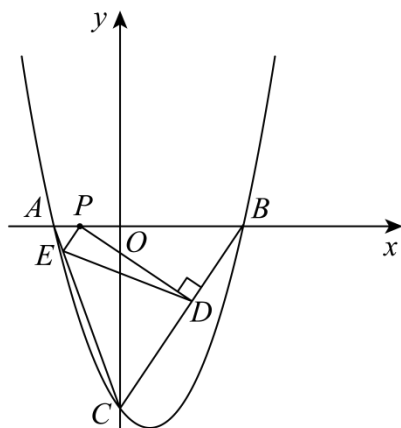
【点睛】本题考查切线的证明，相似三角形的判定及性质，角平分线的性质，解直角三角形，勾股定理等知识，熟练掌握相关性质定理是解决问题的关键.

25. 如图①，抛物线 $y = ax^2 + bx - 9$ 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ ， $B(6, 0)$ ，与 y 轴交于点 C ，连接 AC ， BC .

点 P 是 x 轴上任意一点.



图①



图②

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 Q 在抛物线上，若以点 A ， C ， P ， Q 为顶点， AC 为一边的四边形为平行四边形时，求点 Q 的坐标;

(3) 如图②，当点 $P(m, 0)$ 从点 A 出发沿 x 轴向点 B 运动时(点 P 与点 A ， B 不重合)，自点 P 分别作 $PE \parallel BC$ ，交 AC 于点 E ，作 $PD \perp BC$ ，垂足为点 D 。当 m 为何值时， PE 面积最大，并求出最大值.

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9$

(2) 点 Q 坐标 $(3, -9)$, 或 $(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{17}}{2}, 9)$ 或 $(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{17}}{2}, 9)$;

(3) $m = \frac{3}{2}$ 时, $S_{\triangle PDE}$ 有最大值, 最大值为 $10\frac{1}{8}$.

【解析】

【分析】(1) 将 $A(-3, 0)$, $B(6, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 9$, 待定系数法确定函数解析式;

(2) 由二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9$, 求得点 $C(0, -9)$, 设点 $P(m, 0)$, 点 $Q(n, \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 9)$, 分类讨论:

当 AC 为边, AQ 为对角线时, 当 AC 为边, AP 为对角线时, 运用平行四边形对角线互相平分性质, 构建方程求解;

(3) 如图, 过点 D 作 $DG \perp AB$, 过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 G, F ,

可证 $\triangle FPE \cong \triangle DBP$, $\triangle PDG \cong \triangle DBP$; 运用待定系数法求直线 AC 解析式 $y = -3x - 9$, 直线 BC 解

析式 $y = \frac{3}{2}x - 9$; 设点 $E(p, -3p - 9)$, $D(q, \frac{3}{2}q - 9)$, 则 $PF = m - p$, $PG = q - m$, $EF = 3p + 9$,

$DG = -\frac{3}{2}q + 9$, 运用解直角三角形, $Rt\triangle BOC$ 中, $BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{117}$, $\tan \angle OBC = \frac{3}{2}$,

$Rt\triangle PEF$ 中, $\tan \angle FPE = \frac{EF}{PF} = \frac{3}{2}$, 可得 $p = \frac{1}{3}(m - 6)$, $PF = \frac{2}{3}(m + 3)$,

$PE = PF \cdot \frac{\sqrt{117}}{6} = \frac{\sqrt{117}}{9}(m + 3)$; $Rt\triangle PDG$ 中, $\tan \angle PDG = \frac{PG}{DG} = \frac{3}{2}$, 可得, $q = \frac{1}{13}(4m + 54)$,

$PG = -\frac{9}{13}(m - 6)$, $PD = PG \cdot \frac{\sqrt{117}}{9} = -\frac{\sqrt{117}}{13}(m - 6)$, 于是 $S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2}PD \cdot PE = -\frac{1}{2}(m + 3)(m - 6)$,

从而确定 $m = \frac{3}{2}$ 时, 最大值为 $10\frac{1}{8}$.

【小问 1 详解】

将 $A(-3, 0)$, $B(6, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx - 9$, 得

$$\begin{cases} 9a - 3b - 9 = 0 \\ 36a + 6b - 9 = 0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线解析式为: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9$

【小问 2 详解】

二次函数 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 9$ ，当 $x = 0$ 时， $y = -9$

$\therefore$ 点 $C(0, -9)$

设点 $P(m, 0)$ ，点 $Q(n, \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 9)$ ，

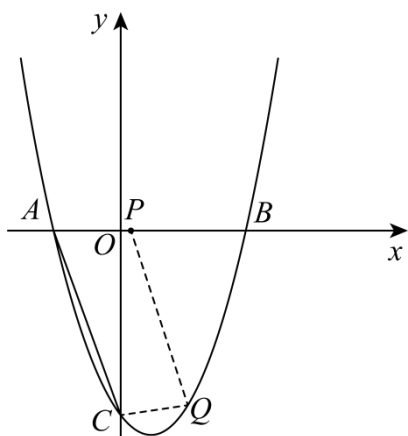
当 AC 为边， AQ 为对角线时，

$\therefore$ 四边形 $ACQP$ 为平行四边形，

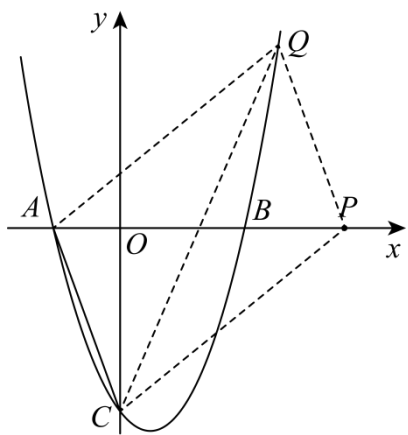
$\therefore AQ, CP$ 互相平分

$\therefore \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 9 = -9$ 解得， $n = 0$ （舍去）或 $n = 3$

点 Q 坐标 $(3, -9)$ ；



当 AC 为边， AP 为对角线时，



同理得， $\frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 9 + (-9) = 0$

$$\text{解得, } n = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{17}}{2} \text{ 或 } n = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{17}}{2},$$

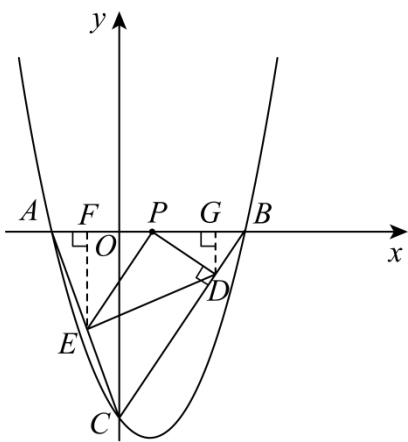
$$\therefore \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 9 = 9$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 坐标 } \left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{17}}{2}, 9\right) \text{ 或 } \left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{17}}{2}, 9\right)$$

综上, 点 Q 坐标 $(3, -9)$, 或 $\left(\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{17}}{2}, 9\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{17}}{2}, 9\right)$;

【小问3 详解】

如图, 过点 D 作 $DG \perp AB$, 过点 E 作 $EF \perp AB$, 垂足为 G, F ,



$$\because PE \parallel BC, PD \perp BC$$

$$\therefore \angle DPE = \angle PDB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FPE + \angle DPB = 90^\circ$$

$$\because \angle DPB + \angle DBP = 90^\circ$$

$$\therefore \angle FPE = \angle DBP, \text{ 同理可得 } \angle PDG = \angle DBP$$

设直线 AC 的解析式为: $y = kx + h$

$$\text{则 } \begin{cases} -3k + h = 0 \\ h = -9 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k = -3 \\ h = -9 \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } AC: y = -3x - 9$$

同理由点 $B(6, 0)$, $C(0, -9)$, 可求得直线 $BC: y = \frac{3}{2}x - 9$

$$\text{设点 } E(p, -3p - 9), D(q, \frac{3}{2}q - 9),$$

$$\text{则 } PF = m - p, PG = q - m, EF = 3p + 9, DG = -\frac{3}{2}q + 9$$

Rt $\triangle BOC$ 中, $OB = 6$, $OC = 9$

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \sqrt{6^2 + 9^2} = \sqrt{117}$$

$$\therefore \tan \angle OBC = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

$$\text{Rt}\triangle PEF \text{ 中, } \tan \angle FPE = \frac{EF}{PF} = \tan \angle OBC = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{3p+9}{m-p} = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } p = \frac{1}{3}(m-6),$$

$$\therefore PF = m - p = \frac{2}{3}(m+3)$$

$$\therefore \cos \angle FPE = \frac{PF}{PE} = \cos \angle OBC = \frac{OB}{BC} = \frac{6}{\sqrt{117}}$$

$$\therefore PE = PF \cdot \frac{\sqrt{117}}{6} = \frac{\sqrt{117}}{9}(m+3);$$

$$\text{Rt}\triangle PDG \text{ 中, } \tan \angle PDG = \frac{PG}{DG} = \tan \angle OBC = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{q-m}{-\frac{3}{2}q+9} = \frac{3}{2}, \text{ 解得, } q = \frac{1}{13}(4m+54)$$

$$\therefore PG = q - m = -\frac{9}{13}(m-6)$$

$$\therefore \sin \angle PDG = \frac{PG}{PD} = \sin \angle OBC = \frac{9}{\sqrt{117}}$$

$$\therefore PD = PG \cdot \frac{\sqrt{117}}{9} = -\frac{\sqrt{117}}{13}(m-6)$$

$$\therefore S_{\triangle PDE} = \frac{1}{2}PD \cdot PE = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{117}}{13}(m-6)\right) \cdot \frac{\sqrt{117}}{9}(m+3) = -\frac{1}{2}(m+3)(m-6),$$

$$\text{即 } S_{\triangle PDE} = -\frac{1}{2}(m+3)(m-6) = -\frac{1}{2}\left(m-\frac{3}{2}\right)^2 + 10\frac{1}{8}.$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < 0$$

$$\therefore m = \frac{3}{2} \text{ 时, } -3 < m < 6, S_{\triangle PDE} \text{ 有最大值, 最大值为 } 10\frac{1}{8}.$$

【点睛】 本题考查待定系数法确定函数解析式, 平行四边形的性质, 一元二次方程求解, 解直角三角形, 结合动点运动情况, 分类讨论是解题的关键.

