

滨州市二〇二三年初中学业水平考试

数学试题

温馨提示：

1. 本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分，共4页，满分120分，考试用时120分钟。考试结束后，将试题卷和答题卡一并交回。
2. 答卷前，考生务必用0.5毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座号填写在试题卷和答题卡规定的位置上。
3. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号，答案不能答在试题卷上；
4. 第Ⅱ卷必须用0.5毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应的位置，不能写在试题卷上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用涂改液、胶带纸、修正带。不按以上要求作答的答案无效。

第Ⅰ卷（选择题 共24分）

一、选择题：本大题共8个小题；在每小题的四个选项中只有一个是正确的，请把正确的选项选出来，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。每小题涂对得3分，满分24分。

1. -3 的相反数是（ ）

A. $-\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

C. -3

D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】相反数的定义是：如果两个数只有符号不同，我们称其中一个数为另一个数的相反数，特别地，0的相反数还是0.

【详解】根据相反数的定义可得： -3 的相反数是3，
故选D.

【点睛】本题考查相反数，题目简单，熟记定义是关键.

2. 下列计算，结果正确的是（ ）

A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$

B. $(a^2)^3 = a^5$

C. $(ab)^3 = ab^3$

D. $a^2 \div a^3 = a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法可判断 A，根据幂的乘方可判断 B，根据积的乘方可判断 C，根据整数指数幂的运算可判断 D，从而可得答案.

【详解】解： $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，运算正确，故 A 符合题意；

$(a^2)^3 = a^6$ ，原运算错误，故 B 不符合题意；

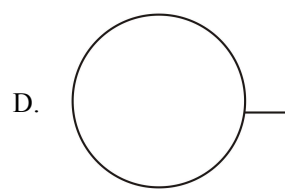
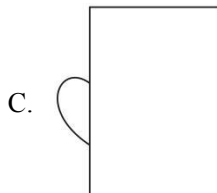
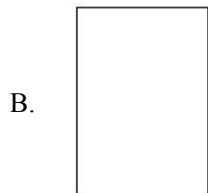
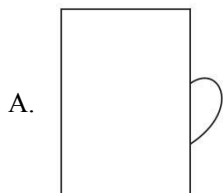
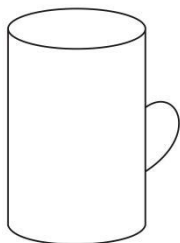
$(ab)^3 = a^3b^3$ ，原运算错误，故 C 不符合题意；

$a^2 \div a^3 = \frac{1}{a}$ ，原运算错误，故 D 不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题考查的是同底数幂的乘法，幂的乘方，积的乘方，同底数幂的除法运算，负整数指数幂的含义，整数指数幂的运算，熟记运算法则是解本题的关键.

3. 如图所示摆放的水杯，其俯视图为（ ）

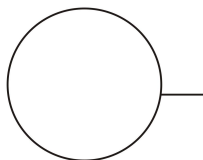


【答案】D

【解析】

【分析】根据从上边看得到的图形是俯视图，可得答案.

【详解】解：俯视图是从上面看到的图形，应该是：



故选：D.

【点睛】本题主要考查简单几何体的三视图，掌握俯视图是从上边看得到的图形是解题的关键.

4. 一元二次方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 根的情况为 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根 C. 没有实数根 D. 不能判定

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意，求得 $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 8 = 17 > 0$ ，根据一元二次方程根的判别式的意义，即可求解。

【详解】解：∵ 一元二次方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 中， $a = 1, b = 3, c = -2$ ，

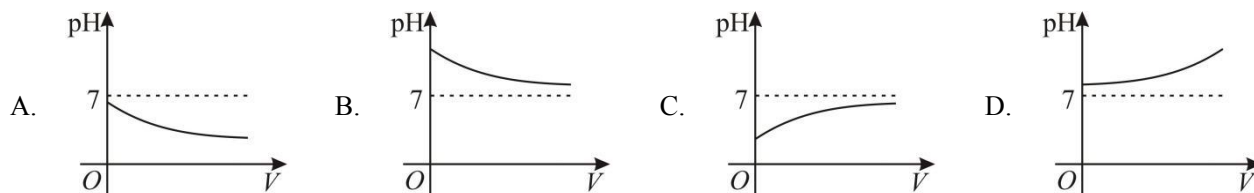
$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 9 + 8 = 17 > 0,$$

∴ 一元二次方程 $x^2 + 3x - 2 = 0$ 有两个不相等的实数根，

故选：A.

【点睛】本题考查了一元二次方程的根的判别式的意义，熟练掌握一元二次方程根的判别式的意义是解题的关键。

5. 由化学知识可知，用 pH 表示溶液酸碱性的强弱程度，当 $\text{pH} > 7$ 时溶液呈碱性，当 $\text{pH} < 7$ 时溶液呈酸性。若将给定的 NaOH 溶液加水稀释，那么在下列图象中，能大致反映 NaOH 溶液的 pH 与所加水的体积 V 之间对应关系的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，NaOH 溶液呈碱性，随着加入水的体积的增加，溶液的浓度越来越低，pH 的值则接近 7，据此即可求解。

【详解】解：∵ NaOH 溶液呈碱性，则 $\text{pH} > 7$ ，随着加入水的体积的增加，溶液的浓度越来越低，pH 的值则接近 7，

故选：B.

【点睛】本题考查了函数的图象，数形结合是解题的关键。

6. 在某次射击训练过程中，小明打靶 10 次的成绩（环）如下表所示：

靶次	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次	第6次	第7次	第8次	第9次	第10次
成绩 (环)	8	9	9	10	10	7	8	9	10	10

则小明射击成绩的众数和方差分别为 ()

- A. 10和0.1 B. 9和0.1 C. 10和1 D. 9和1

【答案】C

【解析】

【分析】根据众数的定义，以及方差的定义，即可求解.

【详解】解：这组数据中，10出现了4次，故众数为10，

$$\text{平均数为: } \frac{1}{10}(7+8 \times 2+9 \times 3+10 \times 4)=9,$$

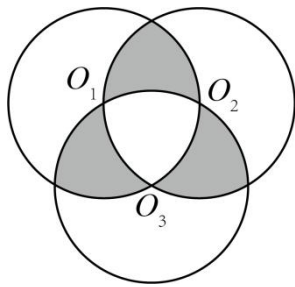
$$\text{方差为 } S^2 = \frac{1}{10}(2^2 + 1^2 \times 2 + 1^2 \times 4) = 1,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了众数的定义，以及方差的定义，熟练掌握众数的定义，以及方差的定义是解题的关键. 众数：在一组数据中出现次数最多的数. 方差：一般地，各数据与平均数的差的平方的平均数叫做这组数据的方差.

$$S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2].$$

7. 如图，某玩具品牌的标志由半径为1cm的三个等圆构成，且三个等圆 $e O_1, e O_2, e O_3$ 相互经过彼此的圆心，则图中三个阴影部分的面积之和为 ()



- A. $\frac{1}{4}\pi\text{cm}^2$ B. $\frac{1}{3}\pi\text{cm}^2$ C. $\frac{1}{2}\pi\text{cm}^2$ D. πcm^2

【答案】C

【解析】

【分析】根据圆的对称性可知：图中三个阴影部分的面积相等，只要计算出一个阴影部分的面积即可，如图，连接 AO_1, AO_2, O_1O_2 ，阴影 AO_1O_2 的面积=扇形 AO_1O_2 的面积，据此即可解答.

【详解】解：根据圆的对称性可知：图中三个阴影部分的面积相等；

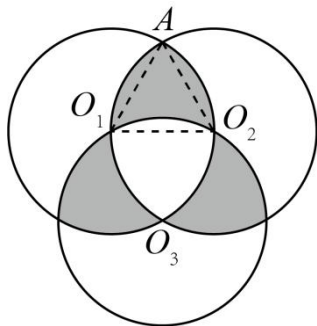
如图，连接 AO_1, AO_2, O_1O_2 ，则 $AO_1 = AO_2 = O_1O_2$ ， $\triangle AO_1O_2$ 是等边三角形，

$\therefore \angle AO_1O_2 = 60^\circ$ ，弓形 AO_1, AO_2, O_1O_2 的面积相等，

$\therefore$ 阴影 AO_1O_2 的面积 = 扇形 AO_1O_2 的面积 = $\frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{1}{6}\pi \text{cm}^2$ ，

$\therefore$ 图中三个阴影部分的面积之和 = $3 \times \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi \text{cm}^2$ ；

故选：C.



【点睛】本题考查了不规则图形面积的计算，正确添加辅助线、掌握求解的方

法是解题关键.

8. 已知点 P 是等边 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，若 $\angle APC = 104^\circ$ ，则在以线段 AP, BP, CP 为边的三角形中，最小内角的大小为（ ）

A. 14°

B. 16°

C. 24°

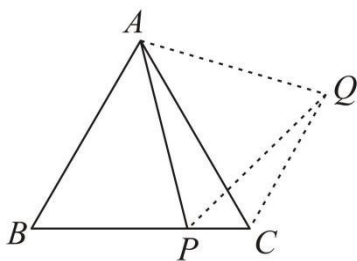
D. 26°

【答案】B

【解析】

【分析】将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ACQ$ ，可得以线段 AP, BP, CP 为边的三角形，即 $\triangle PCQ$ ，最小的锐角为 $\angle PQC$ ，根据邻补角以及旋转的性质得出 $\angle AQC = \angle APB = 76^\circ$ ，进而即可求解.

【详解】解：如图所示，将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle ACQ$ ，



$\therefore AP = AQ, \angle PAQ = 60^\circ, BP = CQ, \angle AQC = \angle APB$,

$\therefore \triangle APQ$ 是等边三角形，

$$\therefore PQ = AP,$$

$\therefore$ 以线段 AP, BP, CP 为边的三角形, 即 $\triangle PCQ$, 最小的锐角为 $\angle PQC$,

$$\because \angle APC = 104^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = 76^\circ$$

$$\therefore \angle AQC = \angle APB = 76^\circ$$

$$\therefore \angle PQC = 76^\circ - 60^\circ = 16^\circ,$$

故选: B.

【点睛】本题考查了旋转的性质, 等边三角形的性质与判定, 熟练掌握旋转的性质是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题 共 96 分)

二、填空题: 本大题共 8 个小题, 每小题 3 分, 满分 24 分.

9. 计算 $2 - |-3|$ 的结果为_____.

【答案】 -1

【解析】

【分析】化简绝对值, 根据有理数的运算法则进行计算即可.

【详解】 $2 - |-3| = 2 - 3 = -1$,

故答案为: -1.

【点睛】本题考查有理数的加减法则, 熟练掌握有理数的加减法则是解题的关键.

10. 一块面积为 5m^2 的正方形桌布, 其边长为_____.

【答案】 $\sqrt{5}\text{m}$

【解析】

【分析】由正方形的边长是其面积的算术平方根可得答案.

【详解】解: 一块面积为 5m^2 的正方形桌布, 其边长为 $\sqrt{5}\text{m}$,

故答案为: $\sqrt{5}\text{m}$

【点睛】本题考查的是算术平方根的含义, 理解题意, 利用算术平方根的含义表示正方形的边长是解本题的关键.

11. 不等式组 $\begin{cases} 2x - 4 \geq 2, \\ 3x - 7 < 8 \end{cases}$ 的解集为_____.

【答案】 $3 \leq x < 5$

【解析】

【分析】 分别解两个不等式，再取两个解集的公共部分即可.

【详解】 解：
$$\begin{cases} 2x-4 \geq 2 \textcircled{1} \\ 3x-7 < 8 \textcircled{2} \end{cases},$$

由①得： $x \geq 3$,

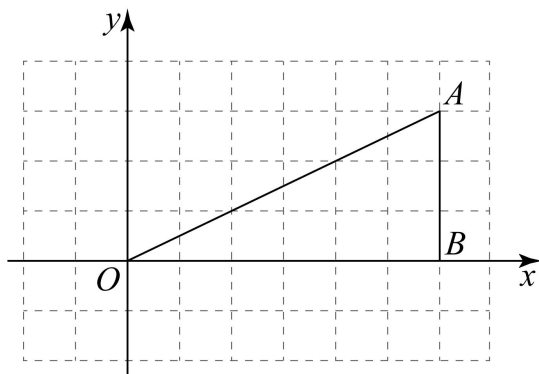
由②得： $x < 5$,

$\therefore$ 不等式组的解集为： $3 \leq x < 5$;

故答案为： $3 \leq x < 5$

【点睛】 本题考查的是一次不等式组的解法，掌握一元一次不等式组的解法步骤与方法是解本题的关键.

12. 如图，在平面直角坐标系中， $\triangle ABO$ 的三个顶点坐标分别为 $A(6,3)$, $B(6,0)$, $O(0,0)$. 若将 $\triangle ABO$ 向左平移3个单位长度得到 $\triangle CDE$ ，则点 A 的对应点 C 的坐标是_____.



【答案】 $(3,3)$

【解析】

【分析】 根据平移的性质即可得出答案.

【详解】 将 $\triangle ABO$ 向左平移3个单位长度得到 $\triangle CDE$,

$$\because A(6,3),$$

$$\therefore C(3,3),$$

故答案为： $(3,3)$.

【点睛】 本题考查平移的性质，熟知左右平移纵坐标不变是解题的关键.

13. 同时掷两枚质地均匀的骰子，则两枚骰子点数之和等于7的概率是_____.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】

【分析】利用表格或树状图列示出所有可能结果，找出满足条件的结果，根据概率公式计算即可.

【详解】所有可能结果如下表，

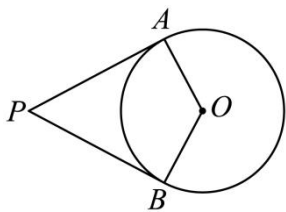
点数和 点数	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

所有结果共有 36 种，其中，点数之和等于 7 的结果有 6 种，概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

故答案为: $\frac{1}{6}$.

【点睛】本题考查概率的计算，运用列表或树状图列示出所有可能结果是解题的关键.

14. 如图, PA, PB 分别与 $\odot O$ 相切于 A, B 两点, 且 $\angle APB = 56^\circ$. 若点 C 是 $\odot O$ 上异于点 A, B 的一点, 则 $\angle ACB$ 的大小为_____.

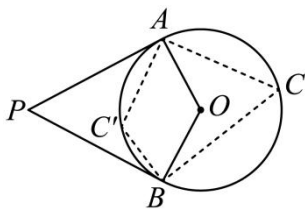


【答案】 62° 或 118°

【解析】

【分析】根据切线的性质得到 $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$, 根据四边形内角和为 360° , 得出 $\angle AOB$, 然后根据圆周角定理即可求解.

【详解】解: 如图所示, 连接 AC, BC , 当点 C 在优弧 $\widehat{AB}$ 上时,



$\because PA, PB$ 分别与 $\odot O$ 相切于 A, B 两点

$\therefore \angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$,

$\because \angle APB = 56^\circ$.

$\therefore \angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 56^\circ = 124^\circ$

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AB},$$

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 62^\circ,$$

当点 C' 在 $\widehat{AB}$ 上时,

$\therefore$ 四边形 $AC'BC$ 是圆内接四边形,

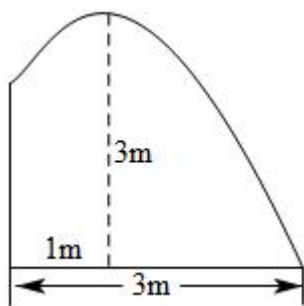
$$\therefore \angle C' = 180^\circ - \angle C = 118^\circ,$$

故答案为: 62° 或 118° .

【点睛】 本题考查了切线的性质, 圆周角定理, 多边形内角和, 熟练掌握切线的性质与圆周角定理是解题的关键.

15. 要修一个圆形喷水池, 在池中心竖直安装一根水管, 水管的顶端安一个喷水头, 使喷出的抛物线形水柱在与池中心的水平距离为 1m 处达到最高, 高度为 3m , 水柱落地处离池中心 3m , 水管长度应为

_____.



【答案】 2.25m ## 2.25 米 ## $2\frac{1}{4}$ 米 ## $2\frac{1}{4}\text{m}$ ## $\frac{9}{4}$ 米 ## $\frac{9}{4}\text{m}$

【解析】

【分析】 以池中心为原点, 竖直安装的水管为 y 轴, 与水管垂直的水平面为 x 轴建立直角坐标系, 设抛物线的解析式为 $y = a(x-1)^2 + 3 (0 \leq x \leq 3)$, 将 $(3, 0)$ 代入求得 a 值, 则 $x = 0$ 时得的 y 值即为水管的长.

【详解】 解: 以池中心为原点, 竖直安装的水管为 y 轴, 与水管垂直的水平面为 x 轴建立直角坐标系. 由于在距池中心的水平距离为 1m 时达到最高, 高度为 3m , 则设抛物线的解析式为:

$$y = a(x-1)^2 + 3 (0 \leq x \leq 3),$$

$$\text{代入 } (3, 0) \text{ 求得: } a = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{将 } a \text{ 值代入得到抛物线的解析式为: } y = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 3 (0 \leq x \leq 3),$$

令 $x=0$ ，则 $y=\frac{9}{4}=2.25$ 。

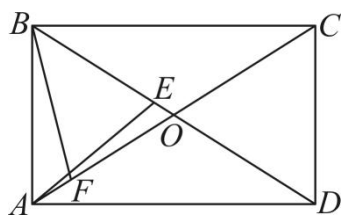
故水管长度为 2.25m。

故答案为：2.25m。

【点睛】本题考查了二次函数在实际生活中的运用，重点是二次函数解析式的求法，正确建立平面直角坐标系是解题的关键。

16. 如图，矩形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 E, F 分别是线段 OB, OA 上的点。若

$AE = BF, AB = 5, AF = 1, BE = 3$ ，则 BF 的长为_____。

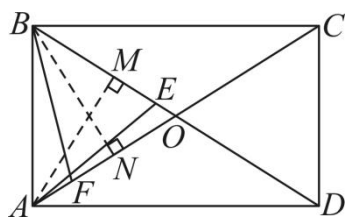


【答案】 $\sqrt{22}$

【解析】

【分析】过点 A, B 分别作 BD, AC 的垂线，垂足分别为 N, M ，等面积法证明 $AM = BN$ ，进而证明 $\text{Rt}\triangle AME \cong \text{Rt}\triangle BNF$ ， $\text{Rt}\triangle AMB \cong \text{Rt}\triangle BNA$ ，根据全等三角形的性质得出 $ME = FN$ ， $BM = AN$ ，根据已知条件求得 $EM = 1$ ，进而勾股定理求得 AM, AE ，进而即可求解。

【详解】解：如图所示，过点 A, B 分别作 BD, AC 的垂线，垂足分别为 N, M ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore BC = AD,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD},$$

$$\therefore \frac{1}{2} AC \times BN = \frac{1}{2} BD \times AM,$$

$$\therefore AM = BN,$$

$$\because BF = AE,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AME \cong \text{Rt}\triangle BNF$$

$$\therefore ME = FN$$

$$\text{设 } ME = FN = x$$

在 $\text{Rt}\triangle AMB, \text{Rt}\triangle BNA$ 中,

$$\begin{cases} AB = BA \\ AM = BN \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AMB \cong \text{Rt}\triangle BNA$$

$$\therefore BM = AN,$$

$$\therefore BE - ME = AF + FN$$

$$\therefore 3 - x = 1 + x$$

$$\text{解得: } x = 1$$

$$\therefore BM = AN = 2$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ABM \text{ 中, } AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21},$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle AME \text{ 中, } AE = \sqrt{AM^2 + ME^2} = \sqrt{21 + 1} = \sqrt{22}$$

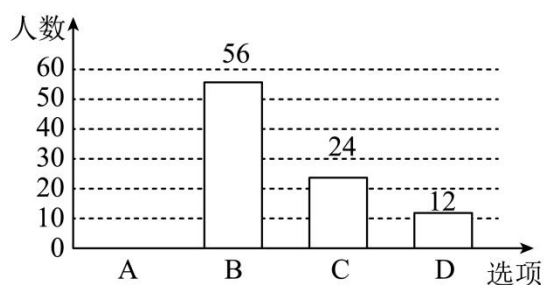
$$\therefore BF = AE = \sqrt{22},$$

故答案为: $\sqrt{22}$.

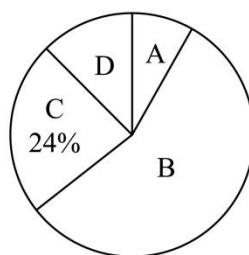
【点睛】本题考查了矩形的性质，全等三角形的性质与判定，勾股定理，熟练掌握以上知识是解题的关键.

三、解答题：本大题共 6 个小题，满分 72 分。解答时请写出必要的演推过程。

17. 中共中央办公厅、国务院办公厅印发的《关于进一步减轻义务教育阶段学生作业负担和校外培训负担的意见》中，对学生每天的作业时间提出明确要求：“初中书面作业平均完成时间不超过 90 分钟”。为了更好地落实文件精神，某县对辖区内部分初中学生就“每天完成书面作业的时间”进行了随机调查，为便于统计学生每天完成书面作业的时间（用 t 表示，单位 h ）状况设置了如下四个选项，分别为 $A: t \leq 1$ ， $B: 1 < t \leq 1.5$ ， $C: 1.5 < t \leq 2$ ， $D: t > 2$ ，并根据调查结果绘制了如下两幅不完整的统计图。



学生书面作业时间状况的条形统计图



学生书面作业时间状况的扇形统计图

请根据以上提供的信息解答下列问题：

- (1) 此次调查，选项 A 中的学生人数是多少？
- (2) 在扇形统计图中，选项 D 所对应的扇形圆心角的大小为多少？
- (3) 如果该县有 15000 名初中学生，那么请估算该县“每天完成书面作业的时间不超过 90 分钟”的初中学生约有多少人？
- (4) 请回答你每天完成书面作业的时间属于哪个选项，并对老师的书面作业布置提出合理化建议。

【答案】 (1) 8 人 (2) 43.2°

(3) 9600 人 (4) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 用选项 C 中的学生人数除以其所占比例求出总人数，然后用总人数减去其它三个组的人数即可求出选项 A 的人数；

(2) 用 360° 乘以其所占比例即可求出答案；

(3) 利用样本估计总体的思想解答即可；

(4) 答案不唯一，合理即可；如可以结合 (3) 小题的结果分析。

【小问 1 详解】

解：此次调查的总人数是 $24 \div 24\% = 100$ 人，

所以选项 A 中的学生人数是 $100 - 56 - 24 - 12 = 8$ (人)；

【小问 2 详解】

$$360^\circ \times \frac{12}{100} = 43.2^\circ,$$

选项 D 所对应的扇形圆心角的大小为 43.2° ；

【小问 3 详解】

$$15000 \times \frac{8+56}{100} = 9600;$$

所以估算该县“每天完成书面作业的时间不超过 90 分钟”的初中学生约有 9600 人；

【小问 4 详解】

我的作业时间属于 B 选项；从调查结果来看：仅有 64% 的学生符合“初中书面作业平均完成时间不超过 90 分钟”，还有 36% 的学生每天完成书面作业的时间超过了 90 分钟，所以布置的作业应该精简量少。（答案不唯一，合理即可）。

【点睛】 本题考查了条形统计图和扇形统计图以及利用样本估计总体等知识，正确理解题意、从统计图中获取解题所需要的信息是解题的关键。

18. 先化简，再求值： $\frac{a-4}{a} \div \left(\frac{a+2}{a^2-2a} - \frac{a-1}{a^2-4a+4} \right)$ ，其中 a 满足 $a^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot a + 6\cos 60^\circ = 0$ 。

【答案】 $a^2 - 4a + 4$ ； 1

【解析】

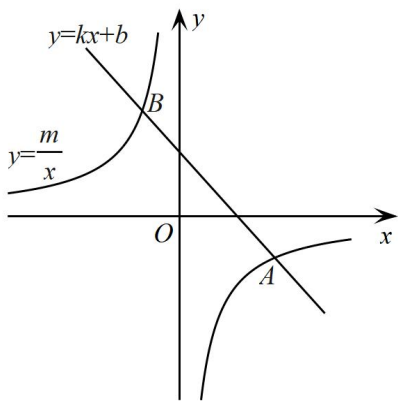
【分析】 先根据分式的加减计算括号内的，然后将除法转化为乘法，再根据分式的性质化简，根据负整数指数幂，特殊角的三角函数值，求得 $a^2 - 4a + 3 = 0$ 的值，最后将 $a^2 - 4a + 3 = 0$ 代入化简结果即可求解.

$$\begin{aligned}
 \text{【详解】 解: } & \frac{a-4}{a} \div \left(\frac{a+2}{a^2-2a} - \frac{a-1}{a^2-4a+4} \right) \\
 &= \frac{a-4}{a} \div \left[\frac{(a+2)(a-2)}{a(a-2)^2} - \frac{a(a-1)}{a(a-2)^2} \right] \\
 &= \frac{a-4}{a} \div \frac{(a+2)(a-2) - a(a-1)}{a(a-2)^2} \\
 &= \frac{a-4}{a} \times \frac{a(a-2)^2}{a^2-4-a^2+a} \\
 &= (a-2)^2 \\
 &= a^2 - 4a + 4; \\
 \because a^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \cdot a + 6\cos 60^\circ &= 0, \\
 \text{即 } a^2 - 4a + 3 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = a^2 - 4a + 3 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

【点睛】 本题考查了分式化简求值，解题关键是熟练运用分式运算法则以及负整数指数幂，特殊角的三角函数值进行求解.

19. 如图，直线 $y = kx + b$ (k, b 为常数) 与双曲线 $y = \frac{m}{x}$ (m 为常数) 相交于 $A(2, a)$ ， $B(-1, 2)$ 两点.



(1) 求直线 $y = kx + b$ 的解析式;

(2) 在双曲线 $y = \frac{m}{x}$ 上任取两点 $M(x_1, y_1)$ 和 $N(x_2, y_2)$ ，若 $x_1 < x_2$ ，试确定 y_1 和 y_2 的大小关系，并写出判断过程；

(3) 请直接写出关于 x 的不等式 $kx + b > \frac{m}{x}$ 的解集.

【答案】(1) $y = -x + 1$

(2) 当 $x_1 < x_2 < 0$ 或 $0 < x_1 < x_2$ 时， $y_1 < y_2$ ；当 $x_1 < 0 < x_2$ 时， $y_1 > y_2$

(3) $x < -1$ 或 $0 < x < 2$

【解析】

【分析】(1) 将点 B 代入反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ，求得 $m = -2$ ，将点 A 代入 $y = -\frac{2}{x}$ ，得出 $A(2, -1)$ ，进而待定系数法求解析式即可求解；

(2) 根据反比例函数的性质，反比例函数在第二四象限，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，进而分类讨论即可求解；

(3) 根据函数图象即可求解.

【小问 1 详解】

解：将点 $B(-1, 2)$ 代入反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ，

$$\therefore m = -2,$$

$$\therefore y = -\frac{2}{x}$$

将点 $A(2, a)$ 代入 $y = -\frac{2}{x}$

$$\therefore A(2, -1),$$

将 $A(2, -1)$ ， $B(-1, 2)$ 代入 $y = kx + b$ ，得

$$\begin{cases} 2k + b = -1 \\ -k + b = 2 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} k = -1 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 1$$

【小问 2 详解】

$$\therefore y = -\frac{2}{x}, \quad k < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数在第二四象限，在每个象限内， y 随 x 的增大而增大，

∴ 当 $x_1 < x_2 < 0$ 或 $0 < x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$,

当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, 根据图象可得 $y_1 > y_2$,

综上所述, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 或 $0 < x_1 < x_2$ 时, $y_1 < y_2$; 当 $x_1 < 0 < x_2$ 时, $y_1 > y_2$,

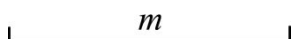
【小问3详解】

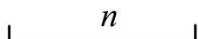
根据图象可知, $A(2, -1)$, $B(-1, 2)$, 当 $kx + b > \frac{m}{x}$ 时, $x < -1$ 或 $0 < x < 2$.

【点睛】 本题考查了一次函数与反比例函数综合, 一次函数与反比例函数交点问题, 待定系数法求一次函数的解析式, 反比例函数图象的性质, 熟练掌握反比例函数图象的性质是解题的关键.

20. (1) 已知线段 m, n , 求作 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使得 $\angle C = 90^\circ, CA = m, CB = n$; (请用尺规作图, 保留作图痕迹, 不写作法.)

(2) 求证: 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. (请借助上一小题所作图形, 在完善的基础上, 写出已知、求证与证明.)





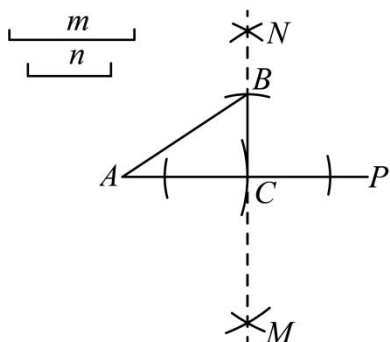
【答案】 (1) 见解析; (2) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 作射线 AP , 在 AP 上截取 $AC = m$, 过点 C 作 AC 的垂线 MN , 在 MN 上截取 $CB = n$, 连接 AB , 则 $\text{Rt}\triangle ABC$, 即为所求;

(2) 先根据题意画出图形, 再证明. 延长 CD 至 E 使 $CD = DE$, 连接 AE 、 BE , 因为 D 是 AB 的中点, 所以 $AD = BD$, 因为 $CD = DE$, 所以四边形 $ACBE$ 是平行四边形, 因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以四边形 $ACBE$ 是矩形, 根据矩形的性质可得出结论.

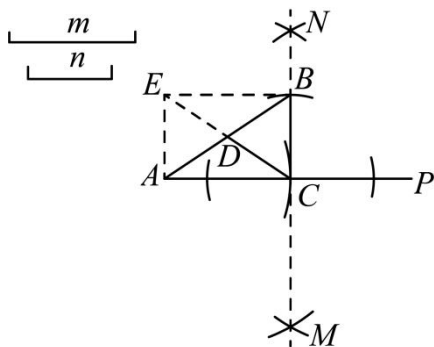
【详解】 (1) 如图所示, $\text{Rt}\triangle ABC$ 即为所求;



(2) 已知: 如图, CD 为 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中斜边 AB 上的中线, $\angle ACB = 90^\circ$,

求证: $CD = \frac{1}{2}AB$.

证明：延长 CD 并截取 $DE = CD$.



$\because CD$ 为 AB 边中线, $\therefore BD = AD$,

$\therefore$ 四边形 $ACBE$ 为平行四边形.

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

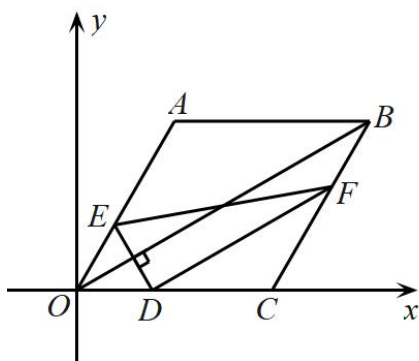
$\therefore$ 平行四边形 $ACBE$ 为矩形,

$\therefore AB = CE = 2CD$,

$\therefore CD = \frac{1}{2} AB$

【点睛】 本题考查了作直角三角形，直角三角形的性质，矩形的性质与判定，解答此题的关键是作出辅助线，构造出矩形，利用矩形的性质解答.

21. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的一边 OC 在 x 轴正半轴上，顶点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$ ，点 D 是边 OC 上的动点，过点 D 作 $DE \perp OB$ 交边 OA 于点 E ，作 $DF \parallel OB$ 交边 BC 于点 F ，连接 EF . 设 $OD = x$, $\triangle DEF$ 的面积为 S .



(1) 求 S 关于 x 的函数解析式;

(2) 当 x 取何值时, S 的值最大? 请求出最大值.

【答案】 (1) $S = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x$

(2) 当 $x = 2$ 时, S 的最大值为 $2\sqrt{3}$

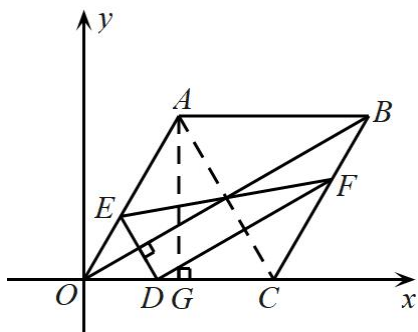
【解析】

【分析】(1) 过点 A 作 $AG \perp OC$ 于点 G, 连接 AC, 证明 $\triangle AOC$ 是等边三角形, 可得 $DE = x$, 进而证明 $\triangle CDF \sim \triangle COB$, 得出 $DF = \sqrt{3}(4-x)$, 根据三角形面积公式即可求解;

(2) 根据二次函数的性质即可求解.

【小问 1 详解】

解: 如图所示, 过点 A 作 $AG \perp OC$ 于点 G, 连接 AC,



∴ 顶点 A 的坐标为 $(2, 2\sqrt{3})$,

$$\therefore OA = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4, \quad OG = 2, \quad AG = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \angle AOG = \frac{OG}{AO} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle AOG = 60^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$$\therefore \angle BOC = \angle AOB = 30^\circ, \quad AC \perp BD \quad AO = OC,$$

$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle ACO = 60^\circ,$$

$$\therefore DE \perp OB,$$

$$\therefore DE \parallel AC,$$

$$\therefore \angle EDO = \angle ACO = 60^\circ$$

$\therefore \triangle EOD$ 是等边三角形,

$$\therefore ED = OD = x$$

$$\therefore DF \parallel OB,$$

$$\therefore \Delta CDF \sim_{\Delta} COB,$$

$$\therefore \frac{DF}{OB} = \frac{CD}{CO}$$

$$\because A(2, 2\sqrt{3}), AO = 4, \text{ 则 } B(6, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore OB = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{DF}{4\sqrt{3}} = \frac{4-x}{4}$$

$$\therefore DF = \sqrt{3}(4-x)$$

$$\therefore S = \frac{1}{2}x \times \sqrt{3}(4-x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x$$

$$\therefore S = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x (0 \leq x \leq 4)$$

【小问 2 详解】

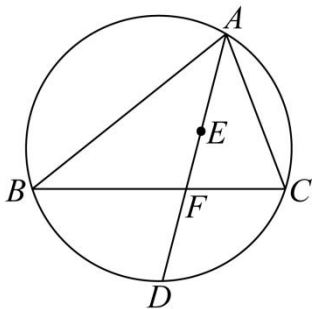
$$\text{解: } \therefore S = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 2\sqrt{3}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)^2 + 2\sqrt{3}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0,$$

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, S 的值最大, 最大值为 $2\sqrt{3}$.

【点睛】 本题考查了等边三角形的判定与性质, 菱形的性质, 坐标与图形, 特殊角的三角函数值, 二次函数的性质, 相似三角形的性质与判定, 熟练掌握以上知识是解题的关键.

22. 如图, 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心, AE 的延长线与边 BC 相交于点 F , 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 D .



(1) 求证: $S_{\triangle ABF} : S_{\triangle ACF} = AB : AC$;

(2) 求证: $AB : AC = BF : CF$;

(3) 求证: $AF^2 = AB \cdot AC - BF \cdot CF$;

(4) 猜想: 线段 DF, DE, DA 三者之间存在的等量关系. (直接写出, 不需证明.)

【答案】 (1) 见解析 (2) 见解析

(3) 见解析 (4) $DE^2 = DF \cdot AD$

【解析】

【分析】(1) 过点 F 作 $FH \perp AC, FG \perp AB$ ，垂足分别为 H, G ，则 $FG = FH$ ，进而表示出两个三角形的面积，即可求解；

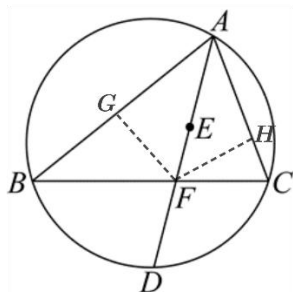
(2) 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，表示出两三角形的面积，即可求解；

(3) 连接 DB, DC ，证明 $\triangle BFD \sim \triangle AFC$ 得出 $BF \cdot CF = AF \cdot DF$ ，证明 $\triangle ABF \sim \triangle ADC$ ，得出 $AB \cdot AC = AD \cdot AF$ ，即可 $AB \cdot AC = (AF + DF) \cdot AF$ ，恒等式变形即可求解；

(4) 连接 BE ，证明 $\triangle ABD \sim \triangle BFD$ ，得出 $DB = DA \cdot DF$ ，证明 $\angle BED = \angle DBE$ ，得出 $DB = DE$ ，即可求解。

【小问 1 详解】

证明：如图所示，过点 F 作 $FH \perp AC, FG \perp AB$ ，垂足分别为 H, G ，



$\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$\therefore AD$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线，

$\because FH \perp AC, FG \perp AB$ ，

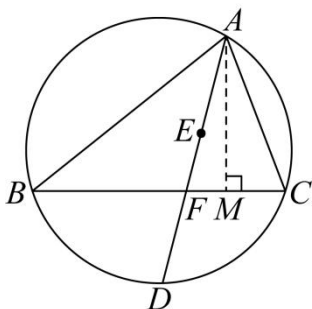
$\therefore FG = FH$ ，

$\because S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot FG, S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot FH$ ，

$\therefore S_{\triangle ABF} : S_{\triangle ACF} = AB : AC$ ；

【小问 2 详解】

证明：如图所示，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，



$$\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}BF \cdot AM, S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2}FC \cdot AM,$$

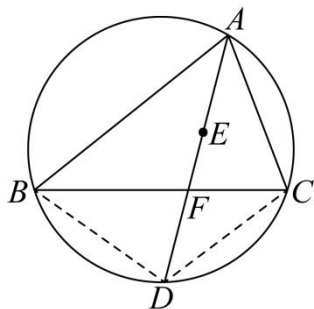
$$\therefore S_{\triangle ABF} : S_{\triangle ACF} = BF : FC,$$

$$\text{由 (1) 可得 } S_{\triangle ABF} : S_{\triangle ACF} = AB : AC,$$

$$\therefore AB : AC = BF : CF;$$

【小问 3 详解】

证明：连接 DB, DC ,



$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{AB}, \widehat{DC} = \widehat{DC}$$

$$\therefore \angle ACF = \angle BDF, \angle FAC = \angle FBD$$

$$\therefore \triangle BFD \sim \triangle AFC$$

$$\therefore \frac{BF}{AF} = \frac{DF}{CF},$$

$$\therefore BF \cdot CF = AF \cdot DF$$

$$\therefore \overbrace{AC} = AC,$$

$$\therefore \angle FBA = \angle ADC,$$

$$\text{又 } \angle BAD = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ADC,$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AC},$$

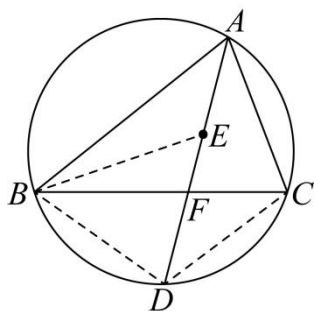
$$\therefore AB \cdot AC = AD \cdot AF;$$

$$\therefore AB \cdot AC = (AF + DF) \cdot AF = AF^2 + AF \cdot DF,$$

$$\therefore AF^2 = AB \cdot AC - BF \cdot CF,$$

【小问 4 详解】

解：如图所示，连接 BE ,



$\because$ 点 E 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$\therefore BE$ 是 $\angle BAC$ 的角平分线,

$\therefore \angle ABE = \angle FBE$,

$\because \angle CBD = \angle CAD = \angle BAD$, $\angle ADB = \angle BDF$

$\therefore \triangle ABD \sim \triangle BFD$,

$$\therefore \frac{DB}{DF} = \frac{DA}{DB},$$

$$\therefore DB^2 = DA \cdot DF,$$

$$\because \angle BED = \angle BAE + \angle ABE = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\angle DBE = \angle DBC + \angle FBE = \angle DAC + \angle FBE = \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC,$$

$$\therefore \angle BED = \angle DBE,$$

$$\therefore DB = DE,$$

$$\therefore DE^2 = DA \cdot DF.$$

【点睛】 本题考查了三角形内心的定义，同弧所对的圆周角相等，角平分线的性质与定义，相似三角形的性质与判定，三角形的外角性质，三角形的面积公式等知识，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

