

济宁市 2023 年初中学业水平考试

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 实数 $\pi, 0, -\frac{1}{3}, 1.5$ 中无理数是 ()

- A. π B. 0 C. $-\frac{1}{3}$ D. 1.5

【答案】A

【解析】

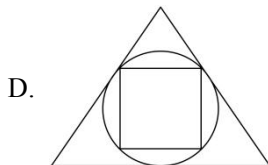
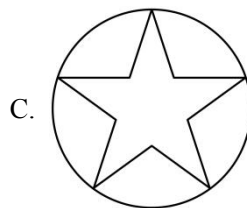
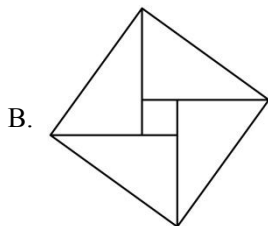
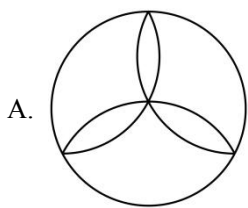
【分析】根据无理数的概念求解．

【详解】解：实数 $\pi, 0, -\frac{1}{3}, 1.5$ 中， π 是无理数，而 $0, -\frac{1}{3}, 1.5$ 是有理数；

故选 A.

【点睛】本题主要考查无理数，熟练掌握无理数的概念是解题的关键．

2. 下列图形中，是中心对称图形的是 ()



【答案】B

【解析】

【分析】在一个平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形；由此判断即可得出答案．

【详解】选项 A、C、D 中的图形不是中心对称图形，故选项 A、C、D 不符合题意；

选项 B 中的图形是中心对称图形，故 B 符合题意．

故选：B.

【点睛】本题考查了中心对称图形的定义，在一个平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形．

3. 下列各式运算正确的是 ()

A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $x^{12} \div x^2 = x^6$ C. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ D. $(x^2y)^3 = x^6y^3$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘除、完全平方公式、积的乘方逐个计算即可.

【详解】A. $x^2 \times x^3 = x^5$, 所以 A 选项不符合题意;

B. $x^{12} \div x^2 = x^{10}$, 所以 B 选项不符合题意;

C. $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$, 所以 C 选项不符合题意;

D. $(x^2y)^3 = x^6y^3$, 所以 D 选项符合题意.

故选: D.

【点睛】此题主要考查了同底数幂的乘除、完全平方公式、积的乘方, 熟记运算法则是解题关键.

4. 若代数式 $\frac{\sqrt{x}}{x-2}$ 有意义, 则实数 x 的取值范围是 ()

A. $x \neq 2$ B. $x \geq 0$ C. $x \geq 2$ D. $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据二次根式有意义的条件和分式有意义的条件得到不等式组, 解不等式组即可得到答案.

【详解】解: $\because$ 代数式 $\frac{\sqrt{x}}{x-2}$ 有意义,

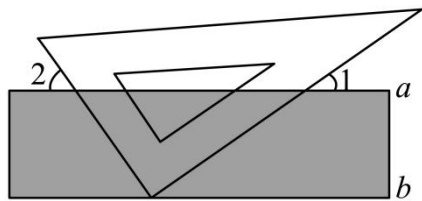
$$\therefore \begin{cases} x \geq 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases},$$

解得 $x \geq 0$ 且 $x \neq 2$,

故选: D

【点睛】此题考查了二次根式有意义的条件和分式有意义的条件, 熟练掌握相关知识是解题的关键.

5. 如图, a, b 是直尺的两边, $a \parallel b$, 把三角板的直角顶点放在直尺的 b 边上, 若 $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



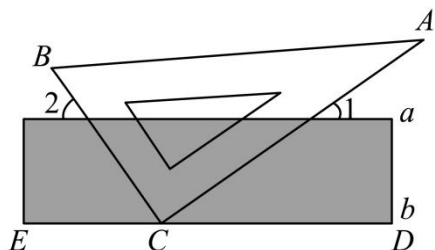
A. 65° B. 55° C. 45° D. 35°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线的性质及平角可进行求解.

【详解】解：如图：



$$\therefore a \parallel b, \angle 1 = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle 1 = 35^\circ, \angle BCE = \angle 2,$$

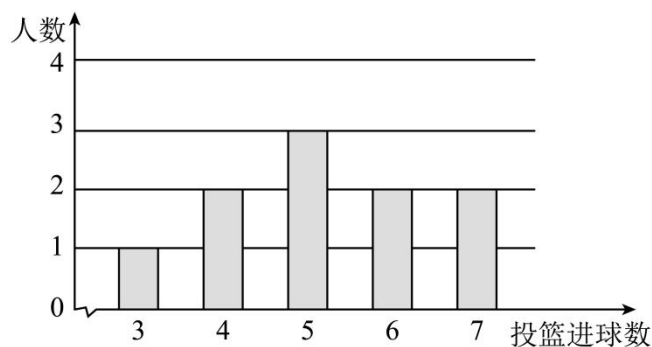
$$\therefore \angle BCE + \angle ACB + \angle ACD = 180^\circ, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCE = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ = \angle 2;$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查平行线的性质，熟练掌握平行线的性质是解题的关键.

6. 为检测学生体育锻炼效果，从某班随机抽取 10 名学生进行篮球定时定点投篮检测，投篮进球数统计如图所示. 对于这 10 名学生的定时定点投篮进球数，下列说法中错误的是（ ）



A. 中位数是 5

B. 众数是 5

C. 平均数是 5.2

D. 方差是 2

【答案】D

【解析】

【分析】根据中位数、众数、平均数、方差定义逐个计算即可.

【详解】根据条形统计图可得，

从小到大排列第 5 和第 6 人投篮进球数都是 5，故中位数是 5，选项 A 不符合题意；

投篮进球数是 5 的人数最多，故众数是 5，选项 B 不符合题意；

平均数 $= \frac{3+4 \times 2+5 \times 3+6 \times 2+7 \times 2}{10} = 5.2$ ，故选项 C 不符合题意；

方差 $= \frac{(3-5.2)^2 + (4-5.2)^2 \times 2 + (5-5.2)^2 \times 3 + (6-5.2)^2 \times 2 + (7-5.2)^2 \times 2}{10} = 1.56$ ，故选项 D 符合题

意；

故选：D.

【点睛】本题考查了中位数、众数、平均数、方差和条形统计图的知识，解答本题的关键在于读懂题意，从图表中筛选出可用的数据，然后整合数据进行求解即可.

7. 下列各式从左到右的变形，因式分解正确的是 ()

A. $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$

B. $a^2 - 4a + 4 = a(a-4) + 4$

C. $5ax^2 - 5ay^2 = 5a(x+y)(x-y)$

D. $a^2 - 2a - 8 = (a-2)(a+4)$

【答案】C

【解析】

【分析】根据因式分解的概念可进行排除选项.

【详解】解：A、 $(a+3)^2 = a^2 + 6a + 9$ ，属于整式的乘法，故不符合题意；

B、 $a^2 - 4a + 4 = a(a-4) + 4$ ，不符合几个整式乘积的形式，不是因式分解；故不符合题意；

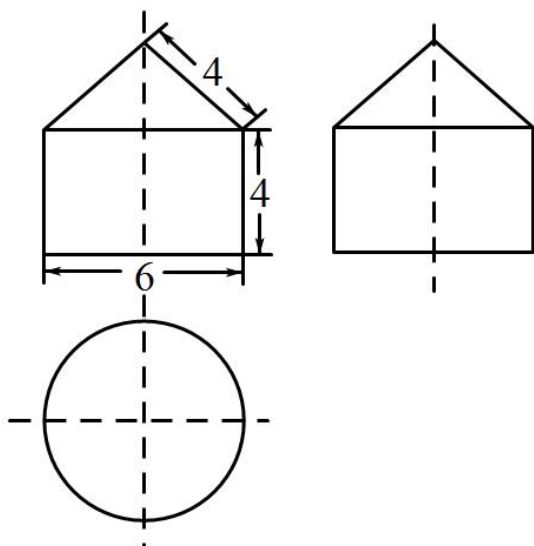
C、 $5ax^2 - 5ay^2 = 5a(x+y)(x-y)$ ，属于因式分解，故符合题意；

D、因为 $(a-2)(a+4) = a^2 + 2a - 8 \neq a^2 - 2a - 8$ ，所以因式分解错误，故不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题主要考查因式分解，熟练掌握因式分解的概念是解题的关键.

8. 一个几何体的三视图如下，则这个几何体的表面积是 ()

A. 39π B. 45π C. 48π D. 54π

【答案】B

【解析】

【分析】先根据三视图还原出几何体，再利用圆锥的侧面积公式和圆柱的侧面积公式计算即可.

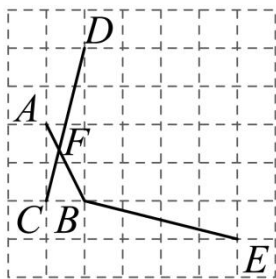
【详解】根据三视图可知，该几何体上面是底面直径为 6，母线为 4 的圆锥，下面是底面直径为 6，高为 4 的圆柱，该几何体的表面积为：

$$S = \pi \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 + 6\pi \times 4 + \pi \times \left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = 12\pi + 24\pi + 9\pi = 45\pi.$$

故选 B.

【点睛】本题主要考查了简单几何体的三视图以及圆锥的侧面积公式和圆柱的侧面积公式，根据三视图还原出几何体是解决问题的关键.

9. 如图，在正方形方格中，每个小正方形的边长都是一个单位长度，点 A, B, C, D, E 均在小正方形方格的顶点上，线段 AB, CD 交于点 F ，若 $\angle CFB = \alpha$ ，则 $\angle ABE$ 等于（ ）

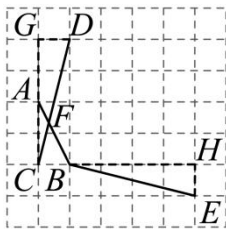
A. $180^\circ - \alpha$ B. $180^\circ - 2\alpha$ C. $90^\circ + \alpha$ D. $90^\circ + 2\alpha$

【答案】C

【解析】

【分析】根据三角形外角的性质及平行线的性质可进行求解.

【详解】解：如图，



由图可知： $GD = EH = 1$, $CG = BH = 4$, $\angle CGD = \angle BHE = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle CGD \cong \triangle BHE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle GCD = \angle HBE,$$

$$\therefore CG \parallel BD,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle ABD,$$

$$\therefore \angle CFB = \angle CAB + \angle GCD = \alpha,$$

$$\therefore \alpha = \angle ABD + \angle HBE,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABD + \angle DBH + \angle HBE = 90^\circ + \alpha;$$

故选 C.

【点睛】 本题主要考查全等三角形的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

10. 已知一列均不为 1 的数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 满足如下关系： $a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1}$, $a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2}$,

$a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3}, \dots, a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, 若 $a_1 = 2$, 则 a_{2023} 的值是 ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. -3

D. 2

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据题意可把 $a_1 = 2$ 代入求解 $a_2 = -3$, 则可得 $a_3 = -\frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_5 = 2 \dots\dots$; 由此可得规律求解.

【详解】 解： $\because a_1 = 2$,

$$\therefore a_2 = \frac{1+2}{1-2} = -3, \quad a_3 = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad a_5 = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2, \quad \dots\dots;$$

由此可得规律为按 $2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 四个数字一循环,

$$\therefore 2023 \div 4 = 505 \dots 3,$$

$$\therefore a_{2023} = a_3 = -\frac{1}{2};$$

故选 A.

【点睛】 本题主要考查数字规律，解题的关键是得到数字的一般规律.

二、填空题：本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分.

11. 一个函数过点 $(1,3)$ ，且 y 随 x 增大而增大，请写出一个符合上述条件的函数解析式_____.

【答案】 $y = 3x$ (答案不唯一)

【解析】

【分析】 根据题意及函数的性质可进行求解.

【详解】 解： 由一个函数过点 $(1,3)$ ，且 y 随 x 增大而增大，可知该函数可以为 $y = 3x$ (答案不唯一)；

故答案为 $y = 3x$ (答案不唯一).

【点睛】 本题主要考查正比例函数的性质，熟练掌握正比例函数的性质是解题的关键.

12. 已知一个多边形的内角和为 540° ，则这个多边形是_____边形.

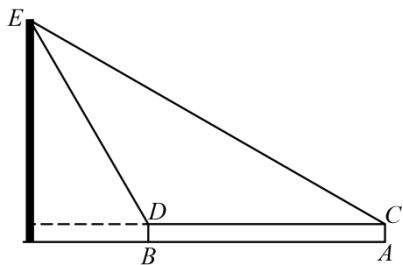
【答案】 5

【解析】

【详解】 设这个多边形是 n 边形，由题意得，

$$(n-2) \times 180^\circ = 540^\circ, \text{ 解之得, } n=5.$$

13. 某数学活动小组要测量一建筑物的高度，如图，他们在建筑物前的平地上选择一点 A，在点 A 和建筑物之间选择一点 B，测得 $AB = 30\text{m}$. 用高 1m ($AC = 1\text{m}$) 的测角仪在 A 处测得建筑物顶部 E 的仰角为 30° ，在 B 处测得仰角为 60° ，则该建筑物的高是_____m.

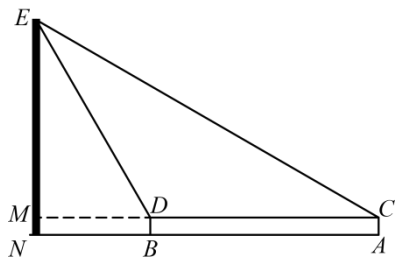


【答案】 $(15\sqrt{3}+1)$ 或 $(1+15\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 结合三角形外角和等腰三角形的判定求得 $ED = CD$ ，然后根据特殊角的三角函数值解直角三角形.

【详解】 解： 由题意可得： 四边形 $MNBD$ ， 四边形 $DBAC$ ， 四边形 $MNAC$ 均为矩形，



$$\therefore AB = CD = 30, \quad MN = AC = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle EMC$ 中, $\angle ECD = 30^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle EDM$ 中, $\angle EDM = 60^\circ$,

$$\therefore \angle DEC = \angle EDM - \angle ECD = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = \angle ECD,$$

$$\therefore ED = CD = 30,$$

在 $\text{Rt}\triangle EDM$ 中, $\frac{EM}{ED} = \sin 60^\circ$, 即 $\frac{EM}{30} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $EM = 15\sqrt{3}$,

$$\therefore EN = EM + MN = (15\sqrt{3} + 1)\text{m}$$

故答案为: $(15\sqrt{3} + 1)$.

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用--仰角俯角问题, 要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

14. 已知实数 m 满足 $m^2 - m - 1 = 0$, 则 $2m^3 - 3m^2 - m + 9 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】8

【解析】

【分析】由题意易得 $m^2 - m = 1$, 然后整体代入求值即可.

【详解】解: $\because m^2 - m - 1 = 0$,

$$\therefore m^2 - m = 1,$$

$$\therefore 2m^3 - 3m^2 - m + 9$$

$$= 2m(m^2 - m) - m^2 - m + 9$$

$$= 2m - m^2 - m + 9$$

$$= m - m^2 + 9$$

$$= -(m^2 - m) + 9$$

$$= -1 + 9$$

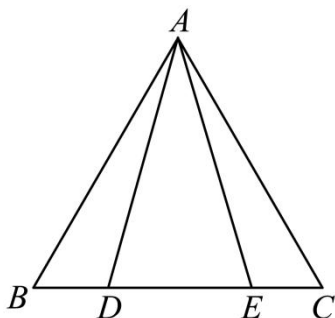
$$= 8;$$

故答案为 8.

【点睛】本题主要考查因式分解及整体思想，熟练掌握利用整体思维及因式分解求解整式的值.

15. 如图， $\triangle ABC$ 是边长为 6 的等边三角形，点 D, E 在边 BC 上，若 $\angle DAE = 30^\circ$ ， $\tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ，则

$BD =$ _____.



【答案】 $3 - \sqrt{3}$

【解析】

【分析】过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，根据等边三角形的性质可得 $\angle BAC = 60^\circ$ ，再由 $AH \perp BC$ ，可得 $\angle BAD + \angle DAH = 30^\circ$ ，再根据 $\angle BAD + \angle EAC = 30^\circ$ ，可得 $\angle DAH = \angle EAC$ ，从而可得 $\tan \angle DAH = \tan \angle EAC = \frac{1}{3}$ ，利用锐角三角函数求得 $AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$ ，再由 $\frac{DH}{AH} = \frac{DH}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ ，求

得 $DH = \sqrt{3}$ ，即可求得结果.

【详解】解：过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore AB = AC = BC = 6$ ， $\angle BAC = 60^\circ$ ，

$\because AH \perp BC$ ，

$\therefore \angle BAH = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD + \angle DAH = 30^\circ$ ，

$\because \angle DAE = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAD + \angle EAC = 30^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAH = \angle EAC,$$

$$\therefore \tan \angle DAH = \tan \angle EAC = \frac{1}{3},$$

$$\therefore BH = \frac{1}{2} AB = 3,$$

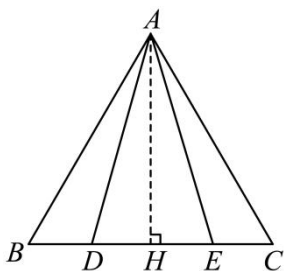
$$\therefore AH = AB \cdot \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{DH}{AH} = \frac{DH}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore DH = \sqrt{3},$$

$$\therefore BD = BH - DH = 3 - \sqrt{3},$$

故答案为： $3 - \sqrt{3}$.



【点睛】 本题考查等边三角形的性质、锐角三角函数，熟练掌握等边三角形的性

质证明 $\angle DAH = \angle EAC$ 是解题的关键.

三、解答题： 本大题共 7 小题， 共 55 分.

16. 计算： $\sqrt{12} - 2\cos 30^\circ + |\sqrt{3} - 2| + 2^{-1}$.

【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】

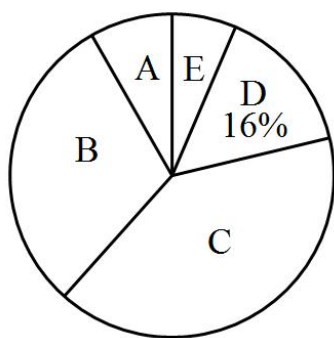
【分析】 根据二次根式的运算、特殊三角函数值及负指数幂可进行求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】 解： 原式} &= 2\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{3} - \sqrt{3} + \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

【点睛】 本题主要考查二次根式的运算、特殊三角函数值及负指数幂，熟练掌握各个运算是解题的关键.

17. 某学校为扎实推进劳动教育，把学生参与劳动教育情况纳入积分考核. 学校随机抽取了部分学生的劳动积分（积分用 x 表示）进行调查，整理得到如下不完整的统计表和扇形统计图.

等级	劳动积分	人数
A	$x \geq 90$	4
B	$80 \leq x < 90$	m
C	$70 \leq x < 80$	20
D	$60 \leq x < 70$	8
E	$x < 60$	3



请根据以上图表信息，解答下列问题：

- (1) 统计表中 $m =$ _____， C 等级对应扇形的圆心角的度数为 _____；
- (2) 学校规定劳动积分大于等于 80 的学生为“劳动之星”。若该学校共有学生 2000 人，请估计该学校“劳动之星”大约有多少人；
- (3) A 等级中有两名男同学和两名女同学，学校从 A 等级中随机选取 2 人进行经验分享，请用列表法或画树状图法，求恰好抽取一名男同学和一名女同学的概率。

【答案】 (1) 15, 144°

(2) 该学校“劳动之星”大约有 760 人

(3) $\frac{2}{3}$

【解析】

【分析】 (1) 根据统计图可得抽取学生的总人数为 50 人，然后可得 m 的值，进而问题可求解；

(2) 根据题意易知大于等于 80 的学生所占比，然后问题可求解；

(3) 根据列表法可进行求解概率。

【小问 1 详解】

解：由统计图可知： D 等级的人数有 8 人，所占比为 16%，

$\therefore$ 抽取学生的总人数为 $8 \div 16\% = 50$ (人)，

$\therefore m = 50 - 4 - 20 - 8 - 3 = 15$, C 等级对应扇形的圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{20}{50} = 144^\circ$;

故答案为 15, 144° ;

【小问 2 详解】

解：由题意得：

$$2000 \times \frac{4+15}{50} = 760 \text{ (人)},$$

答：该学校“劳动之星”大约有 760 人

【小问 3 详解】

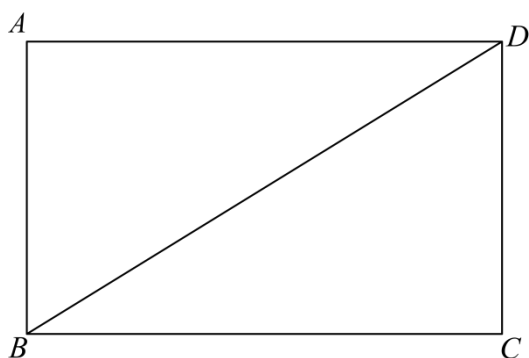
解：由题意可列表如下：

	男 1	男 2	女 1	女 2
男 1	/	男 1 男 2	男 1 女 1	男 1 女 2
男 2	男 1 男 2	/	男 2 女 1	男 2 女 2
女 1	男 1 女 1	男 2 女 1	/	女 1 女 2
女 2	男 1 女 2	男 2 女 2	女 1 女 2	/

从 A 等级两名男同学和两名女同学中随机选取 2 人进行经验分享，共有 12 种情况，恰好抽取一名男同学和一名女同学共有 8 种情况，所以抽取一名男同学和一名女同学的概率为 $P = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

【点睛】 本题主要考查扇形统计图与统计表、概率，熟练掌握扇形统计图及利用列表法求解概率是解题的关键.

18. 如图， BD 是矩形 $ABCD$ 的对角线.



(1) 作线段 BD 的垂直平分线 (要求：尺规作图，保留作图痕迹，不必写作法和证明)；

(2) 设 BD 的垂直平分线交 AD 于点 E ，交 BC 于点 F ，连接 BE ， DF 。

①判断四边形 $BEDF$ 的形状，并说明理由；

②若 $AB = 5$ ， $BC = 10$ ，求四边形 $BEDF$ 的周长.

【答案】(1) 图见详解

(2) ①四边形 $BEDF$ 是菱形，理由见详解；②四边形 $BEDF$ 的周长为 25

【解析】

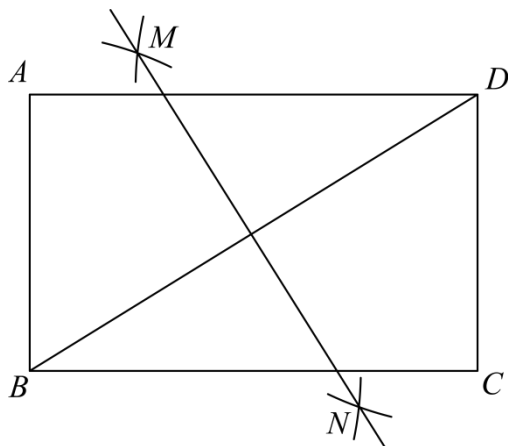
【分析】(1) 分别以点 B 、 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 为半径画弧，分别交于点 M 、 N ，连接 MN ，则问题可求解；

(2) ①由题意易得 $\angle EDO = \angle FBO$ ，易得 $\triangle EOD \cong \triangle FOB$ (ASA)，然后可得四边形 $BEDF$ 是平行四边形，进而问题可求证；

②设 $BE = ED = x$ ，则 $AE = 10 - x$ ，然后根据勾股定理可建立方程进行求解.

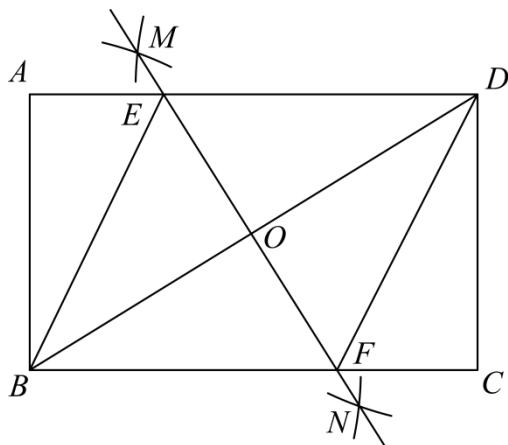
【小问 1 详解】

解：所作线段 BD 的垂直平分线如图所示：



【小问 2 详解】

解：①四边形 $BEDF$ 是菱形，理由如下：如图，



由作图可知： $OB = OD$ ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle EDO = \angle FBO$ ，

$$\because \angle EOD = \angle FCB,$$

$$\therefore \triangle EOD \cong \triangle FOB (\text{ASA}),$$

$$\therefore ED = FB,$$

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

$\because EF$ 是 BD 的垂直平分线,

$$\therefore BE = ED,$$

$\therefore$ 四边形 $BEDF$ 是菱形;

② $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $BC = 10$,

$$\therefore \angle A = 90^\circ, AD = BC = 10,$$

由①可设 $BE = ED = x$, 则 $AE = 10 - x$,

$$\because AB = 5,$$

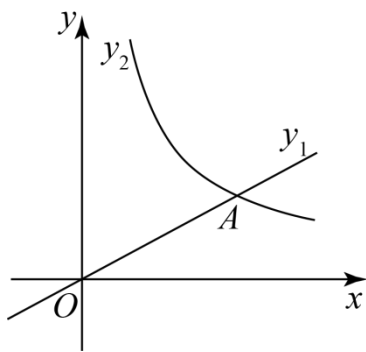
$$\therefore AB^2 + AE^2 = BE^2, \text{ 即 } 25 + (10 - x)^2 = x^2,$$

解得: $x = 6.25$,

$$\therefore \text{四边形 } BEDF \text{ 的周长为 } 6.25 \times 4 = 25.$$

【点睛】 本题主要考查矩形的性质、菱形的性质与判定、勾股定理及线段垂直平分线的性质, 熟练掌握矩形的性质、菱形的性质与判定、勾股定理及线段垂直平分线的性质是解题的关键.

19. 如图, 正比例函数 $y_1 = \frac{1}{2}x$ 和反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像交于点 $A(m, 2)$.



(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 将直线 OA 向上平移 3 个单位后, 与 y 轴交于点 B , 与 $y_2 = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图像交于点 C , 连接 AB , AC ,

求 $\triangle ABC$ 的面积.

【答案】 (1) $y_2 = \frac{8}{x}$

(2) 3

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求函数解析式；

(2) 根据平移的性质求得平移后函数解析式，确定 B 点坐标，然后待定系数法求直线 AB 的解析式，从而利用三角形面积公式分析计算.

【小问 1 详解】

解：把 $A(m, 2)$ 代入 $y_1 = \frac{1}{2}x$ 中， $\frac{1}{2}m = 2$,

解得 $m = 4$,

$\therefore A(4, 2)$,

把 $A(4, 2)$ 代入 $y_2 = \frac{k}{x} (x > 0)$ 中， $\frac{k}{4} = 2$,

解得 $k = 8$,

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y_2 = \frac{8}{x}$;

【小问 2 详解】

解：将直线 OA 向上平移 3 个单位后，其函数解析式为 $y = \frac{1}{2}x + 3$,

当 $x = 0$ 时， $y = 3$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 3)$,

设直线 AB 的函数解析式为 $y_{AB} = mx + n$,

将 $A(4, 2)$, $B(0, 3)$ 代入可得 $\begin{cases} 4m + n = 2 \\ n = 3 \end{cases}$,

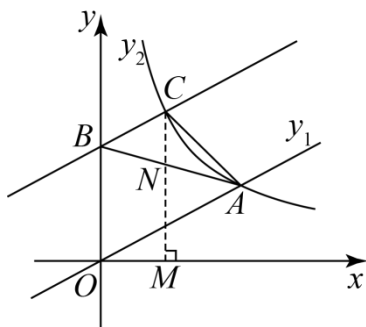
解得 $\begin{cases} m = -\frac{1}{4} \\ n = 3 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 AB 的函数解析式为 $y_{AB} = -\frac{1}{4}x + 3$,

联立方程组 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 3 \\ y = \frac{8}{x} \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x_1 = -8 \\ y_1 = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

$\therefore C$ 点坐标为 $(2, 4)$,

过点 C 作 $CM \perp x$ 轴，交 AB 于点 N ,



在 $y_{BC} = -\frac{1}{4}x + 3$ 中, 当 $x = 2$ 时, $y = \frac{5}{2}$,

$$\therefore CN = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 4 = 3.$$

【点睛】本题考查一次函数和反比例函数的交点问题, 掌握待定系数法求函数解析式, 运用数形结合思想解题是关键.

20. 为加快公共领域充电基础设施建设, 某停车场计划购买 A, B 两种型号的充电桩. 已知 A 型充电桩比 B 型充电桩的单价少 0.3 万元, 且用 15 万元购买 A 型充电桩与用 20 万元购买 B 型充电桩的数量相等.

(1) A, B 两种型号充电桩的单价各是多少?

(2) 该停车场计划共购买 25 个 A, B 型充电桩, 购买总费用不超过 26 万元, 且 B 型充电桩的购买数量不少于 A 型充电桩购买数量的 $\frac{1}{2}$. 问: 共有哪几种购买方案? 哪种方案所需购买总费用最少?

【答案】(1) A 型充电桩的单价为 0.9 万元, B 型充电桩的单价为 1.2 万元

(2) 共有三种方案: 方案一: 购买 A 型充电桩 14 个, 购买 B 型充电桩 11 个; 方案二: 购买 A 型充电桩 15 个, 购买 B 型充电桩 10 个; 方案三: 购买 A 型充电桩 16 个, 购买 B 型充电桩 9 个; 方案三总费用最少.

【解析】

【分析】(1) 根据“用 15 万元购买 A 型充电桩与用 20 万元购买 B 型充电桩的数量相等”列分式方程求解;

(2) 根据“购买总费用不超过 26 万元, 且 B 型充电桩的购买数量不少于 A 型充电桩购买数量的 $\frac{1}{2}$ ”列不等式组确定取值范围, 从而分析计算求解

【小问 1 详解】

解: 设 B 型充电桩的单价为 x 万元, 则 A 型充电桩的单价为 $(x - 0.3)$ 万元, 由题意可得:

$$\frac{15}{x - 0.3} = \frac{20}{x},$$

解得 $x = 1.2$,

经检验: $x = 1.2$ 是原分式方程的解,

$$x - 0.3 = 0.9,$$

答：A 型充电桩的单价为 0.9 万元，B 型充电桩的单价为 1.2 万元；

【小问 2 详解】

解：设购买 A 型充电桩 a 个，则购买 B 型充电桩 $(25-a)$ 个，由题意可得：

$$\begin{cases} 0.9a + 1.2(25-a) \leq 26 \\ 25-a \geq \frac{1}{2}a \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{40}{3} \leq a \leq \frac{50}{3},$$

$\therefore a$ 须为非负整数，

$\therefore a$ 可取 14, 15, 16,

$\therefore$ 共有三种方案：

方案一：购买 A 型充电桩 14 个，购买 B 型充电桩 11 个，购买费用为 $0.9 \times 14 + 1.2 \times 11 = 25.8$ (万元)；

方案二：购买 A 型充电桩 15 个，购买 B 型充电桩 10 个，购买费用为 $0.9 \times 15 + 1.2 \times 10 = 25.5$ (万元)；

方案三：购买 A 型充电桩 16 个，购买 B 型充电桩 9 个，购买费用为 $0.9 \times 16 + 1.2 \times 9 = 25.2$ (万元)，

$\therefore 25.2 < 25.5 < 25.8$

$\therefore$ 方案三总费用最少.

【点睛】 本题主要考查了分式方程的应用，一元一次不等式组的应用，理解题意，找准等量关系列出分式方程和一元一次不等式组是解决问题的关键.

21. 如图，已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， $CD = CB$ ， BE 切 $\odot O$ 于点 B ，过点 C 作 $CF \perp OE$ 交 BE 于点 F ，若 $EF = 2BF$.

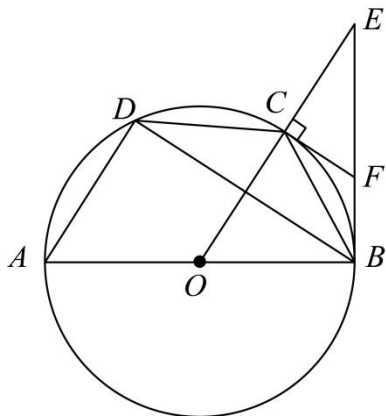


图1

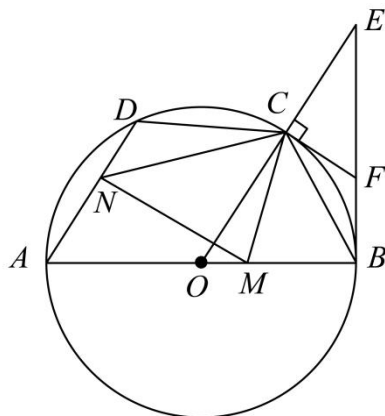


图2

(1) 如图 1，连接 BD ，求证： $\triangle ADB \cong \triangle OBE$ ；

(2) 如图 2， N 是 AD 上一点，在 AB 上取一点 M ，使 $\angle MCN = 60^\circ$ ，连接 MN ．请问：三条线段 MN ， BM ， DN 有怎样的数量关系？并证明你的结论.

【答案】 (1) 见解析 (2) $MN = BM + DN$ ，证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据 $CF \perp OE$ ， OC 是半径，可得 CF 是 $\odot O$ 的切线，根据 BE 是 $\odot O$ 的切线，由切线长定理可得 $BF = CF$ ，进而根据 $\sin E = \frac{CF}{EF} = \frac{1}{2}$ ，得出 $\angle E = 30^\circ$ ， $\angle EOB = 60^\circ$ ，根据 $CD = CB$ 得出 $\widehat{CD} = \widehat{CB}$ ，根据垂径定理的推论得出 $OC \perp BD$ ，进而得出 $\angle ADB = 90^\circ = \angle EBO$ ，根据含 30° 角的直角三角形的性质，得出 $AD = BO = \frac{1}{2}AB$ ，即可证明 $\triangle ABD \cong \triangle OEB$ (AAS)；

(2) 延长 ND 至 H 使得 $DH = BM$ ，连接 CH ， BD ，根据圆内接四边形对角互补得出 $\angle HDC = \angle MBC$ ，证明 $\triangle HDC \cong \triangle MBC$ (SAS)，结合已知条件证明 $NC = NC$ ，进而证明 $\triangle CNH \cong \triangle CNM$ (SAS)，得出 $NH = MN$ ，即可得出结论。

【小问 1 详解】

证明： $\because CF \perp OE$ ， OC 是半径，

$\therefore CF$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\because BE$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore BF = CF$ ，

$\because EF = 2BF$

$\therefore EF = 2CF$ ，

$\therefore \sin E = \frac{CF}{EF} = \frac{1}{2}$

$\therefore \angle E = 30^\circ$ ， $\angle EOB = 60^\circ$ ，

$\because CD = CB$

$\therefore \widehat{CD} = \widehat{CB}$ ，

$\therefore OC \perp BD$ ，

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ = \angle EBO$ ，

$\because \angle E + \angle EBD = 90^\circ$ ， $\angle ABD + \angle EBD = 90^\circ$

$\therefore \angle E = \angle ABD = 30^\circ$ ，

$\therefore AD = BO = \frac{1}{2}AB$ ，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle OEB$ (AAS)；

【小问 2 详解】

$MN = BM + DN$ ，理由如下，

延长 ND 至 H 使得 $DH = BM$ ，连接 CH ， BD ，如图所示

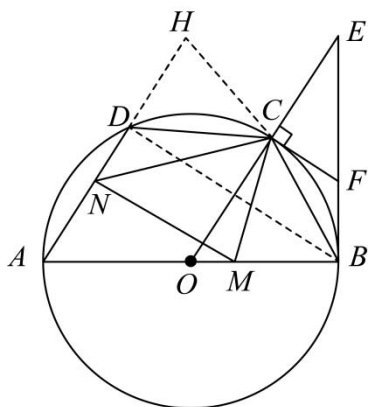


图2

$$\therefore \angle CBM + \angle NDC = 180^\circ, \angle HDC + \angle NDC = 180^\circ$$

$$\therefore \angle HDC = \angle MBC,$$

$$\because CD = CB, \quad DH = BM$$

$$\therefore \Delta HDC \cong_{\Delta} MBC \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle BCM = \angle DCH, \quad CM = CH$$

由 (1) 可得 $\angle ABD = 30^\circ$,

又 AB 是直径, 则 $\angle ADB = 90^\circ$,

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCB = 180^\circ - \angle A = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle MCN = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCM + \angle NCD = 120^\circ - \angle NCM = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DCH + NCD = \angle NCH = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle NCH = \angle NCM,$$

$$\therefore NC = NC,$$

$$\therefore \Delta CNH \cong \Delta CNM \text{ (SAS)},$$

$$\therefore NH = MN,$$

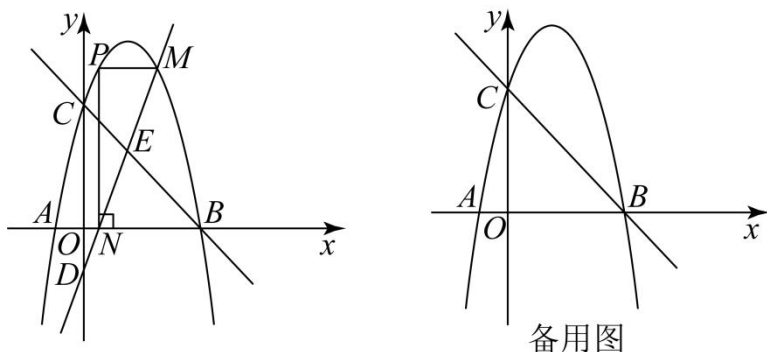
$$\therefore MN = DN + DH = DN + BM \text{ .}$$

即 $MN = BM + DN$.

【点睛】本题考查了切线的判定，切线长定理，垂径定理的推论，全等三角形的性质与判定，根据特殊角的三角函数值求角度，圆周角定理，圆内接四边形对角互补，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键.

22. 如图, 直线 $y = -x + 4$ 交 x 轴于点 B , 交 y 轴于点 C , 对称轴为 $x = \frac{3}{2}$ 的抛物线经过 B, C 两点, 交 x 轴

负半轴于点 A ． P 为抛物线上一动点，点 P 的横坐标为 m ，过点 P 作 x 轴的平行线交抛物线于另一点 M ，作 x 轴的垂线 PN ，垂足为 N ，直线 MN 交 y 轴于点 D ．



- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 若 $0 < m < \frac{3}{2}$ ，当 m 为何值时，四边形 $CDNP$ 是平行四边形？
- (3) 若 $m < \frac{3}{2}$ ，设直线 MN 交直线 BC 于点 E ，是否存在这样的 m 值，使 $MN = 2ME$ ？若存在，求出此时 m 的值；若不存在，请说明理由．

【答案】(1) $y = -x^2 + 3x + 4$

$$(2) m = \frac{6 - \sqrt{21}}{3}$$

$$(3) \text{ 存在, } m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ 或 } m = \frac{5 - \sqrt{181}}{6}$$

【解析】

【分析】(1) 利用待定系数法求函数解析式；

(2) 结合平行四边形的性质，通过求直线 MN 的函数解析式，列方程求解；

(3) 分 3 种情况求解：当 $-1 < m < \frac{3}{2}$ 时；当 $m = -1$ 时；当 $m < -1$ 时；根据 $MN = 2ME$ ，确定 E 点坐标，从而利用一次函数图象上点的特征计算求解．

【小问 1 详解】

解：在直线 $y = -x + 4$ 中，当 $x = 0$ 时， $y = 4$ ，当 $y = 0$ 时， $x = 4$ ，

$\therefore$ 点 $B(4, 0)$ ，点 $C(0, 4)$ ，

设抛物线的解析式为 $y = a\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + k$ ，

$$\text{把点 } B(4,0), \text{ 点 } C(0,4) \text{ 代入可得 } \begin{cases} a\left(4-\frac{3}{2}\right)^2 + k = 0 \\ a\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + k = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -1 \\ k = \frac{25}{4} \end{cases},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} = -x^2 + 3x + 4;$$

【小问 2 详解】

$$\text{解: 由题意, } P(m, -m^2 + 3m + 4),$$

$$\therefore PN = -m^2 + 3m + 4,$$

当四边形 $CDNP$ 是平行四边形时, $PN = CD$,

$$\therefore OD = -m^2 + 3m + 4 - 4 = -m^2 + 3m,$$

$$\therefore D(0, m^2 - 3m), \quad N(m, 0),$$

设直线 MN 的解析式为 $y = k_1x + m^2 - 3m$,

$$\text{把 } N(m, 0) \text{ 代入可得 } k_1m + m^2 - 3m = 0,$$

$$\text{解得 } k_1 = 3 - m,$$

$$\therefore \text{直线 } MN \text{ 的解析式为 } y = (3 - m)x + m^2 - 3m,$$

又 $\therefore$ 过点 P 作 x 轴的平行线交抛物线于另一点 M , 且抛物线对称轴为 $x = \frac{3}{2}$,

$$\therefore M(3 - m, -m^2 + 3m + 4)$$

$$\therefore (3 - m)^2 + m^2 - 3m = -m^2 + 3m + 4,$$

$$\text{解得 } m_1 = \frac{6 + \sqrt{21}}{3} \text{ (不合题意, 舍去)}, \quad m_2 = \frac{6 - \sqrt{21}}{3};$$

【小问 3 详解】

解: 存在, 理由如下.

$$\text{由题意, } P(m, -m^2 + 3m + 4),$$

$$\therefore M(3-m, -m^2+3m+4), N(m, 0).$$

当 $-1 < m < \frac{3}{2}$ 时, 点 P 在 x 轴的上方,

$$\because MN = 2ME,$$

$\therefore$ 点 E 为线段 MN 的中点,

$$\therefore x_E = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{3-m+m}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_E = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-m^2+3m+4}{2},$$

$$\therefore E\left(\frac{3}{2}, \frac{-m^2+3m+4}{2}\right),$$

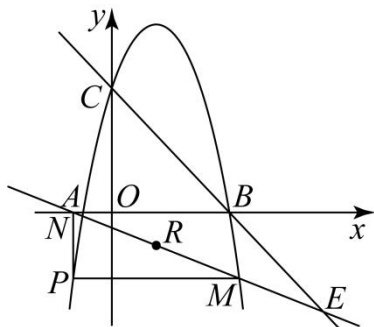
代入 $y = -x + 4$ 整理得, $m^2 - 3m + 1 = 0$,

$$\text{解得 } m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ (不合题意, 舍去)}, \quad m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

当 $m = -1$ 时, 点 P 在 x 轴上, 此时点 E 与点 M 重合, 所以此种情况不存在;

当 $m < -1$ 时, 点 P 在 x 轴的下方, 点 E 在射线 NM 上,

如图, 设线段 NM 的中点为 R ,



$$\therefore x_R = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{3-m+m}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_R = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-m^2+3m+4}{2},$$

$$\therefore R\left(\frac{3}{2}, \frac{-m^2+3m+4}{2}\right).$$

$$\because MN = 2ME,$$

$\therefore M$ 为 RE 的中点,

$$\therefore x_M = \frac{x_R + x_N}{2}, \quad y_M = \frac{y_R + y_N}{2},$$

$$\therefore E\left(\frac{9}{2}-2m, -\frac{3}{2}m^2 + \frac{9}{2}m + 6\right),$$

代入 $y = -x + 4$ 整理得, $3m^2 - 5m - 13 = 0$,

解得 $m_3 = \frac{5+\sqrt{181}}{6}$ (不合题意, 舍去), $m_4 = \frac{5-\sqrt{181}}{6}$.

综上可知, 存在 $m = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $m = \frac{5-\sqrt{181}}{6}$, 使 $MN = 2ME$.

【点睛】 本题考查一次函数和二次函数的综合应用, 掌握待定系数法求函数解析式, 利用数形结合思想和方程思想解题是关键.

