

泰安市 2023 年初中学业水平考试数学试题

一、选择题

1. $-\frac{2}{3}$ 的倒数是 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】根据乘积是 1 的两个数叫做互为倒数解答.

【详解】解: $\because \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 1$,

$\therefore -\frac{2}{3}$ 的倒数是 $-\frac{3}{2}$,

故选: D.

【点睛】本题考查倒数的定义, 掌握互为倒数的两个数积为 1, 是解题的关键.

2. 下列运算正确的是 ()

- A. $2a + 3b = 5ab$ B. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$
C. $(ab^2)^3 = a^3b^5$ D. $3a^3 \cdot (-4a^2) = -12a^5$

【答案】D

【解析】

【分析】A、不能合并, 本选项错误; B、利用完全平方公式展开得到结果, 即可作出判断; C 和 D、利用积的乘方及幂的乘方运算法则计算得到结果, 即可作出判断.

【详解】解: $2a$ 和 $3b$ 不是同类项, 不能合并, 故 A 选项错误, 不符合题意;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故 B 选项错误, 不符合题意;

$(ab^2)^3 = a^3b^6$, 故 C 选项错误, 不符合题意;

$3a^3 \cdot (-4a^2) = -12a^5$, 故 D 选项正确, 符合题意;

故选: D.

【点睛】此题考查了完全平方公式, 合并同类项, 同底数幂的除法, 积的乘方与幂的乘方, 熟练掌握完全平方公式是解本题的关键.

3. 2023 年 1 月 17 日, 国家航天局公布了我国嫦娥五号月球样品的科研成果. 科学家们通过对月球样品的研

究，精确测定了月球的年龄是 20.3 亿年，数据 20.3 亿年用科学记数法表示为（ ）



- A. 2.03×10^8 年 B. 2.03×10^9 年 C. 2.03×10^{10} 年 D. 20.3×10^9 年

【答案】B

【解析】

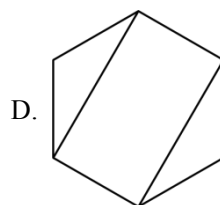
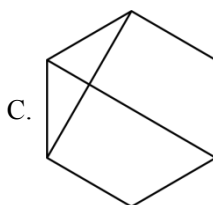
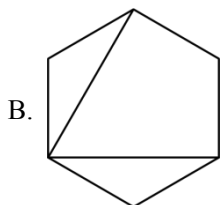
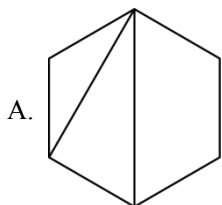
【分析】科学记数法的表现形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同，当原数绝对值大于等于 10 时， n 是正数，当原数绝对值小于 1 时 n 是负数；由此进行求解即可得到答案.

【详解】解：20.3 亿年 = 2030000000 年 = 2.03×10^9 年，

故选 B.

【点睛】本题主要考查了科学记数法，解题的关键在于能够熟练掌握科学记数法的定义.

4. 小亮以四种不同的方式连接正六边形的两条对角线，得到如下四种图形，则既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】D

【解析】

【分析】根据轴对称图形的概念：如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形；根据中心对称图形的概念：在平面内，把一个图形绕着某个点旋转 180 度后与原图重合，即可得到答案.

【详解】解：A、既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故该选项不符合题意；

B、既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故该选项不符合题意；

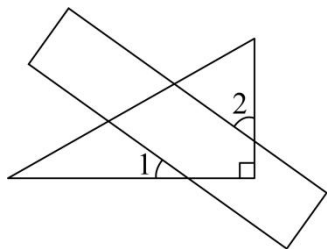
C、既不是轴对称图形也不是中心对称图形，故该选项不符合题意；

D、是轴对称图形也是中心对称图形，故该选项符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查了轴对称图形和中心对称图形，掌握概念是解题关键.

5. 把一块直角三角板和一把直尺如图放置，若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数等于 ()



A. 65°

B. 55°

C. 45°

D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】如图所示，过点 O 作 $OE \parallel AB$ ，则 $OE \parallel AB \parallel CD$ ，由平行线的性质得到 $\angle EOC = \angle 2$ ， $\angle AOE = \angle 1$ ，进而推出 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ，由此即可得到答案.

【详解】解：如图所示，过点 O 作 $OE \parallel AB$ ，

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore OE \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle EOC = \angle 2$, $\angle AOE = \angle 1$,

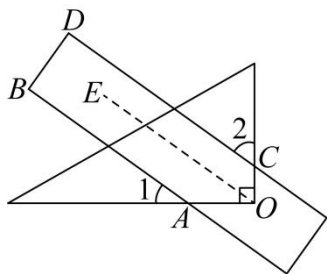
$\because \angle AOC = \angle EOC + \angle AOE = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\because \angle 1 = 35^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 90^\circ - \angle 1 = 55^\circ$,

故选 B.



【点睛】本题主要考查了平行线的性质与判定，正确作出辅助线是解题的关键.

6. 为了解学生的身体素质状况，国家每年都会进行中小学生身体素质抽测. 在今天的抽测中，某校九年级二班随机抽取了10名男生进行引体向上测试，他们的成绩（单位：个）如下：7，11，10，11，6，14，11，10，11，9. 根据这组数据判断下列结论中错误的是 ()

A. 这组数据的众数是11

B. 这组数据的中位数是10

C. 这组数据的平均数是10

D. 这组数据的方差是4.6

【答案】B

【解析】

【分析】根据众数的定义，中位数，平均数，方差的计算方法即可求解.

【详解】解：A、这组数据中出现次数最多的是11，故众数是11，正确，不符合题意；

B、这组数据重新排序为：6，7，9，10，10，11，11，11，11，14，故中位数是 $\frac{10+11}{2}=10.5$ ，错误，符合题意；

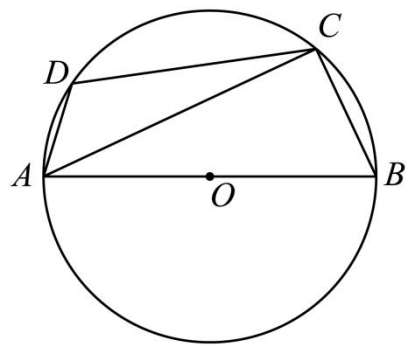
C、这组数据的平均数是 $\frac{7+11+10+11+6+14+11+10+11+9}{10}=\frac{100}{10}=10$ ，故平均数是10，正确，不符合题意；

D、这组数据的平均数是10，方差是 $S^2=\frac{[(10-7)^2+(10-11)^2+\cdots+(10-9)^2]}{10}=4.6$ ，故方差是4.6，正确，不符合题意；

故选：B.

【点睛】本题主要考查调查与统计中的相关概念和计算，掌握众数的概念，中位数，平均数，方差的计算方法是解题的关键.

7. 如图，AB是 $\odot O$ 的直径，D，C是 $\odot O$ 上的点， $\angle ADC=115^\circ$ ，则 $\angle BAC$ 的度数是（ ）

A. 25° B. 30° C. 35° D. 40°

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆内接四边形对角互补和直径所对圆周角等于90度求解即可.

【详解】解： $\because \angle ADC=115^\circ$ ， $\therefore \angle B=65^\circ$ ， $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

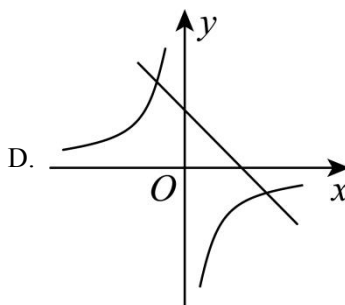
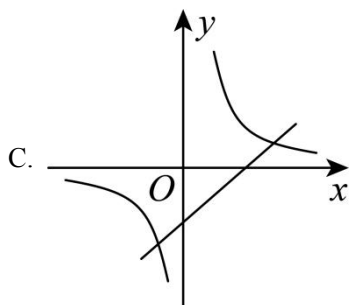
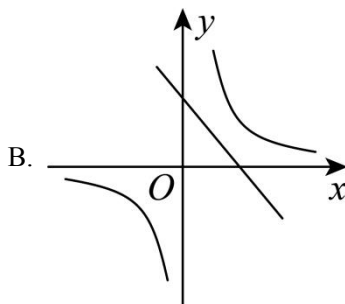
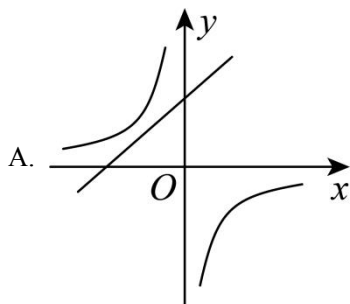
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ,$$

故选：A.

【点睛】本题考查圆的性质，涉及到圆内接四边形对角互补和直径所对圆周角等于 90 度，熟记知识点是关键.

8. 一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ (a, b 为常数且均不等于 0) 在同一坐标系内的图象可能是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】先根据一次函数图象确定 a, b 的符号，进而求出 ab 的符号，由此可以确定反比例函数图象所在的象限，看是否一致即可.

【详解】解：A、 $\because$ 一次函数图象经过第一、二、三象限，

$$\therefore a > 0, b > 0,$$

$$\therefore ab > 0,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象见过第一、三象限，这与图形不符合，故 A 不符合题意；

B、 $\because$ 一次函数图象经过第一、二、四象限，

$$\therefore a < 0, b > 0,$$

$$\therefore ab < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象见过第二、四象限，这与图形不符合，故 B 不符合题意；

C、 $\because$ 一次函数图象经过第一、三、四象限，

$$\therefore a > 0, b < 0,$$

$$\therefore ab < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象经过第二、四象限，这与图形不符合，故 C 不符合题意；

D、 $\because$ 一次函数图象经过第一、二、四象限，

$$\therefore a < 0, b > 0,$$

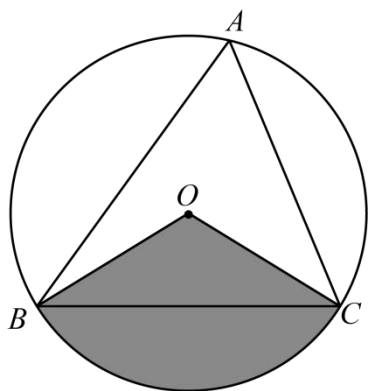
$$\therefore ab < 0,$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象经过第二、四象限，这与图形符合，故 D 符合题意；

故选 D.

【点睛】本题主要考查了一次函数与反比例函数图象和性质，熟练掌握相关性质与函数图象的关系是解决本题的关键.

9. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，半径为 4，连接 OB ， OC ， OA ，若 $\angle CAO = 40^\circ$ ， $\angle ACB = 70^\circ$ ，则阴影部分的面积是（ ）



A. $\frac{4}{3}\pi$

B. $\frac{8}{3}\pi$

C. $\frac{16}{3}\pi$

D. $\frac{32}{3}\pi$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据等腰三角形的性质以及三角形内角和定理求得 $\angle BOC = 180^\circ - 30^\circ \times 2 = 120^\circ$ ，再根据扇形的面积公式即可求解.

【详解】解： $\because OC = OB$ ， $OA = OC$ ， $\angle CAO = 40^\circ$ ，

$$\therefore \angle OCA = \angle OAC = 40^\circ, \angle OCB = \angle OBC,$$

$$\therefore \angle ACB = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB = \angle ACB - \angle ACO = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 30^\circ \times 2 = 120^\circ,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = \pi r^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} = \pi \times 4^2 \times \frac{1}{3} = \frac{16}{3} \pi,$$

故选：C.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质、三角形内角和定理以及扇形的面积公式等知识，求出 $\angle BOC = 120^\circ$ 是解答的关键.

10. 《九章算术》是我国古代数学的经典著作，书中有一个问题：“今有黄金九枚，白银一十一枚，称之重适等，交易其一，金轻十三两，问金、银各重几何？”意思是：甲袋中装有黄金 9 枚（每枚黄金重量相同），乙袋中装有白银 11 枚（每枚白银重量相同），称重两袋相等，两袋互相交换 1 枚后，甲袋比乙袋轻了 13 两（袋子重量忽略不计），问黄金、白银每枚各重多少两？设每枚黄金重 x 两，每枚白银重 y 两. 根据题意得（ ）

A.
$$\begin{cases} 11x = 9y, \\ (10y + x) - (8x + y) = 13. \end{cases}$$

B.
$$\begin{cases} 10y + x = 8x + y, \\ 9x + 13 = 11y. \end{cases}$$

C.
$$\begin{cases} 9x = 11y, \\ (10y + x) - (8x + y) = 13. \end{cases}$$

D.
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (8x + y) - (10y + x) = 13. \end{cases}$$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意可得等量关系：① 9 枚黄金的重量 = 11 枚白银的重量；② (10 枚白银的重量 + 1 枚黄金的重量) - (1 枚白银的重量 + 8 枚黄金的重量) = 13 两，根据等量关系列出方程组即可.

【详解】解：设每枚黄金重 x 两，每枚白银重 y 两，

由题意得，
$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases},$$

故选 C.

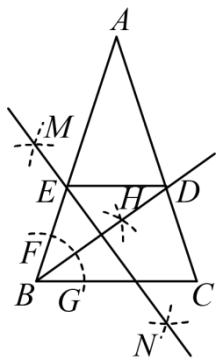
【点睛】本题主要考查了从实际问题中抽象出二元一次方程组，正确理解题意找到等量关系是解题的关键.

11. 如图， $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$. 以点 B 为圆心，任意长为半径作弧，交 AB 于点 F ，交 BC 于点 G ，分别以点 F 和点 G 为圆心，大于 $\frac{1}{2}FG$ 的长为半径作弧，两弧相交于点 H ，作射线 BH

交 AC 于点 D ；分别以点 B 和点 D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧，两弧相交于 M 、 N 两点，作直线

MN 交 AB 于点 E ，连接 DE . 下列四个结论：① $\angle AED = \angle ABC$ ；② $BC = AE$ ；③ $ED = \frac{1}{2}BC$ ；④ 当 $AC = 2$

时， $AD = \sqrt{5} - 1$. 其中正确结论的个数是（ ）



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】根据等腰三角形两底角相等与 $\angle A = 36^\circ$ ，得到 $\angle ABC = \angle C = 72^\circ$ ，根据角平分线定义得到 $\angle ABD = \angle CBD = 36^\circ$ ，根据线段垂直平分线性质的得到 $EB = ED$ ，得到 $\angle EBD = \angle EDB$ ，推出 $\angle EDB = \angle CBD$ ，得到 $DE \parallel BC$ ，推出 $\angle AED = \angle ABC$ ，①正确；根据等角对等边得到 $AD = AE$ ， $AD = BD$ ，根据三角形外角性质得到 $\angle BDC = 72^\circ = \angle C$ ，得到 $BC = BD$ ，推出 $BC = AE$ ，②正确；根据 $\triangle AED \sim \triangle ABC$ ，得到 $\frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD + DC}$ ，推出 $ED = \frac{\sqrt{5}-1}{2}BC$ ，③错误；根据 $AC = 2$ 时，

$CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AD$ ，得到 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}AD = 2 - AD$ ，推出 $AD = \sqrt{5}-1$ ，④正确。

【详解】 $\because \triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle A = 36^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ,$$

由作图知， BD 平分 $\angle ABC$ ， MN 垂直平分 BD ，

$$\therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 36^\circ, \quad EB = ED,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EDB,$$

$$\therefore \angle EDB = \angle CBD,$$

$$\therefore DE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ABC, \quad \text{①正确};$$

$$\angle ADE = \angle C,$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADE,$$

$$\therefore AD = AE,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$$\because \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 72^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle C,$$

$$\therefore BC = BD,$$

$$\therefore BC = AE, \text{ ②正确;}$$

$$\text{设 } ED = x, \quad BC = a,$$

$$\text{则 } AD = a, \quad BE = x,$$

$$\therefore CD = BE = x,$$

$$\because \triangle AED \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{ED}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{AD + DC},$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{a}{a+x},$$

$$\therefore x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$\because x > 0,$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

$$\text{即 } ED = \frac{\sqrt{5}-1}{2}BC, \text{ ③错误;}$$

$$\text{当 } AC = 2 \text{ 时, } CD = 2 - AD,$$

$$\because CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2}AD,$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}-1}{2}AD = 2 - AD,$$

$$\therefore AD = \sqrt{5} - 1, \text{ ④正确}$$

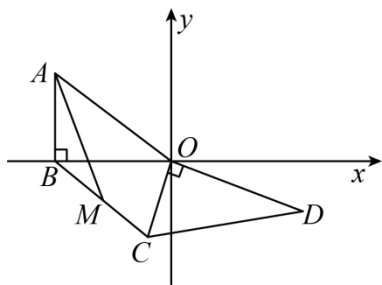
$$\therefore \text{正确的有①②④, 共 3 个.}$$

故选: C.

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形, 相似三角形, 解决问题的关键是熟练掌握等腰三角形判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 角平分线的定义和线段垂直平分线的性质.

12. 如图, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle AOB$ 的一条直角边 OB 在 x 轴上, 点 A 的坐标为 $(-6, 4)$; $\text{Rt}\triangle COD$ 中, $\angle COD = 90^\circ$, $OD = 4\sqrt{3}$, $\angle D = 30^\circ$, 连接 BC , 点 M 是 BC 中点, 连接 AM . 将 $\text{Rt}\triangle COD$ 以点

O 为旋转中心按顺时针方向旋转，在旋转过程中，线段 AM 的最小值是（ ）



A. 3

B. $6\sqrt{2}-4$ C. $2\sqrt{13}-2$

D. 2

【答案】A

【解析】

【分析】如图所示，延长 BA 到 E ，使得 $AE = AB$ ，连接 OE ， CE ，根据点 A 的坐标为 $(-6,4)$ 得到 $BE = 8$ ，

再证明 AM 是 $\triangle BCE$ 的中位线，得到 $AM = \frac{1}{2}CE$ ；解 $\text{Rt}\triangle COD$ 得到 $OC = 4$ ，进一步求出点 C 在以 O

为圆心，半径为 4 的圆上运动，则当点 M 在线段 OE 上时， CE 有最小值，即此时 AM 有最小值，据此求出 CE 的最小值，即可得到答案.

【详解】解：如图所示，延长 BA 到 E ，使得 $AE = AB$ ，连接 OE ， CE ，

$\because \text{Rt}\triangle AOB$ 的一条直角边 OB 在 x 轴上，点 A 的坐标为 $(-6,4)$ ，

$\therefore AB = 4$ ， $OB = 6$ ，

$\therefore AE = AB = 4$ ，

$\therefore BE = 8$ ，

$\because$ 点 M 为 BC 中点，点 A 为 BE 中点，

$\therefore AM$ 是 $\triangle BCE$ 的中位线，

$\therefore AM = \frac{1}{2}CE$ ；

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中， $\angle COD = 90^\circ$ ， $OD = 4\sqrt{3}$ ， $\angle D = 30^\circ$ ，

$\therefore OC = \frac{\sqrt{3}}{3}OD = 4$ ，

$\therefore$ 将 $\text{Rt}\triangle COD$ 以点 O 为旋转中心按顺时针方向旋转，

$\therefore$ 点 C 在以 O 为圆心，半径为 4 的圆上运动，

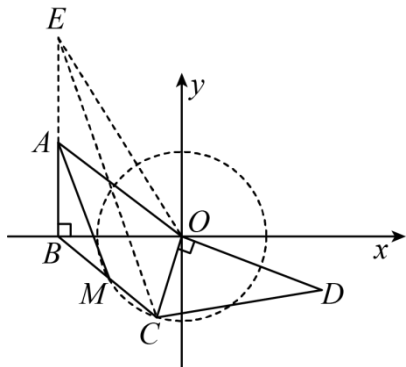
$\therefore$ 当点 M 在线段 OE 上时， CE 有最小值，即此时 AM 有最小值，

$$\therefore OE = \sqrt{BE^2 + OB^2} = 10,$$

$\therefore CE$ 的最小值为 $10-4=6$,

$\therefore AM$ 的最小值为 3,

故选 A.



【点睛】 本题主要考查了一点到圆上一点的最值问题，勾股定理，三角

形中位线定理, 坐标与图形, 含 30° 角的直角三角形的性质等等, 正确作出辅助线是解题的关键.

二、填空题

13. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - a = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $a > -4$ ## $-4 < a$

【解析】

【分析】利用一元二次方程根的判别式求解即可.

【详解】解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - a = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \cdot (-a) > 0,$$

$$\therefore a > -4,$$

故答案为: $a > -4$.

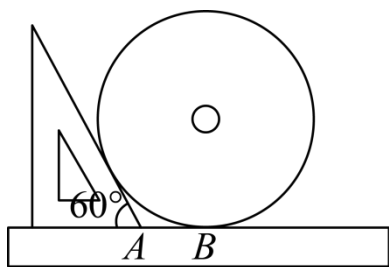
【点睛】 本题主要考查了一元二次方程根的判别式，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ ，若

$\Delta = b^2 - 4ac > 0$, 则方程有两个不相等的实数根, 若 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, 则方程有两个相等的实数根, 若

$\Delta = b^2 - 4ac < 0$, 则方程没有实数根.

14. 为了测量一个圆形光盘的半径, 小明把直尺、光盘和三角尺按图所示放置于桌面上, 并量出 $AB = 4\text{cm}$,

则这张光盘的半径是 $\quad$ cm. (精确到 0.1cm. 参考数据: $\sqrt{3} \approx 1.73$)

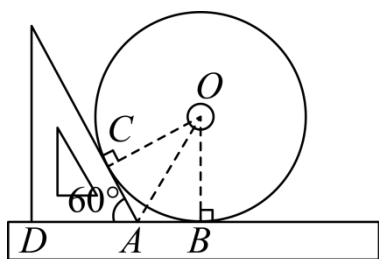


【答案】 6.9

【解析】

【分析】 设光盘的圆心为 O ，三角尺和光盘的切点为 C ，连接 OC ， OB ， OA ，经过圆外一点 A 的两条直线 AC ， AB 都与圆 O 相切，所以 OA 为 $\angle BAC$ 的角平分线， $\angle OAC = \angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC = 60^\circ$ ，同时由切线的性质得到 $OC \perp AC$ ， $OB \perp AB$ ，在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中， $\tan \angle OAB = \tan 60^\circ = \frac{OB}{AB}$ ，求出 $OB = 4\sqrt{3}\text{cm}$ ，即为圆的半径，进而确定出圆的直径.

【详解】 解：设光盘的圆心为 O ，三角尺和光盘的切点为 C ，连接 OC ， OB ， OA ，如下图所示：



$\because AC$ ， AB 分别为圆 O 的切线，

$\therefore OA$ 为 $\angle BAC$ 的角平分线，即 $OC \perp AC$ ， $OB \perp AB$ ，

又 $\because \angle CAD = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle OAC = \angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC = 60^\circ,$$

在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中， $\angle OAB = 60^\circ$ ， $AB = 4\text{cm}$ ，

$$\therefore \tan \angle OAB = \tan 60^\circ = \frac{OB}{AB}, \quad \frac{OB}{4} = \sqrt{3},$$

$$\therefore OB = 4\sqrt{3}\text{cm} \approx 6.9\text{cm},$$

则这张光盘的半径为 6.9cm ；

故答案为：6.9.

【点睛】 此题考查了切线的性质，切线长定理，锐角三角函数定义，以及特殊角的三角函数值，熟练掌握

性质及定理是解本题的关键.

15. 二次函数 $y = -x^2 - 3x + 4$ 的最大值是_____.

【答案】 $\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】利用配方法把二次函数一般式化为顶点式，即可求解.

【详解】解：利用配方法，将一般式化成顶点式：

$$y = -x^2 - 3x + 4 = -(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{25}{4}$$

∵ 二次函数开口向下，

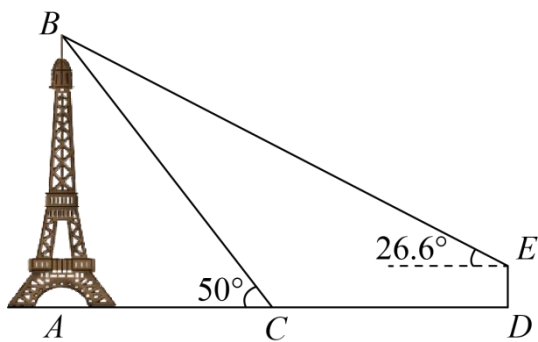
∴ 顶点处取最大值，

即当 $x = -\frac{3}{2}$ 时，最大值为 $\frac{25}{4}$.

故答案为： $\frac{25}{4}$.

【点睛】本题考查二次函数的相关知识. 将一般式化为顶点式，顶点处取到最值. 其中配方法是解决问题的关键，也是易错点.

16. 在一次综合实践活动中，某学校数学兴趣小组对一电视发射塔的高度进行了测量. 如图，在塔前 C 处，测得该塔顶端 B 的仰角为 50° ，后退 60m ($CD = 60\text{m}$) 到 D 处有一平台，在高 2m ($DE = 2\text{m}$) 的平台上的 E 处，测得 B 的仰角为 26.6° . 则该电视发射塔的高度 AB 为_____ m . (精确到 1m . 参考数据： $\tan 50^\circ \approx 1.2, \tan 26.6^\circ \approx 0.5$)



【答案】 55

【解析】

【分析】如图所示，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，则四边形 $ADEF$ 是矩形，可得到 $AF = DE = 2\text{m}$ ， $EF = AD$ ；设 $BF = x\text{m}$ ，则 $AB = (x + 2)\text{m}$ ，解 $\text{Rt}\triangle ABC$ 得到 $AC \approx \frac{5}{6}(x + 2)\text{m}$ ，解 $\text{Rt}\triangle BEF$ 得到 $EF \approx 2x\text{m}$ ，进而建立方程 $2x = \frac{5}{6}(x + 2) + 60$

，解方程即可得到答案.

【详解】解：如图所示，过点 E 作 $EF \perp AB$ 于 F ，

由题意得， $AB \perp AD$ ， $DE \perp AD$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADEF$ 是矩形，

$\therefore AF = DE = 2\text{m}$ ， $EF = AD$ ，

设 $BF = x\text{m}$ ，则 $AB = AF + BF = (x + 2)\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\tan \angle ACB = \frac{AB}{AC}$ ，

$\therefore AC = \frac{AB}{\tan \angle ACB} = \frac{x + 2}{\tan 50^\circ} \approx \frac{5}{6}(x + 2)\text{m}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中， $\tan \angle BEF = \frac{BF}{EF}$ ，

$\therefore EF = \frac{BF}{\tan \angle BEF} = \frac{x}{\tan 26.6^\circ} \approx 2x\text{m}$ ，

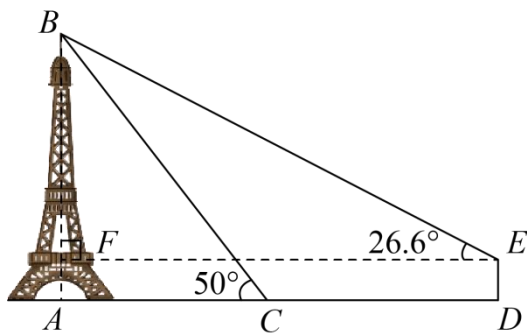
$\therefore EF = AD$ ，

$\therefore 2x = \frac{5}{6}(x + 2) + 60$ ，

$\therefore x \approx 53$ ，

$\therefore AB = x + 2 \approx 55\text{m}$ ，

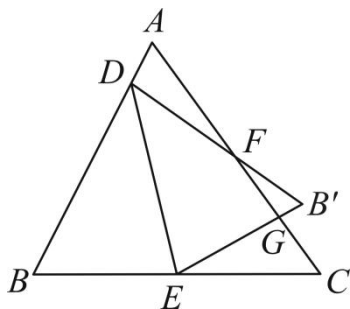
故答案为：55.



【点睛】本题主要考查了解直角三角形的实际应用，矩形的性

质与判定等等，正确理解题意作出辅助线是解题的关键.

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC = 16$ ，点 D 在 AB 上，点 E 在 BC 上，点 B 关于直线 DE 的轴对称点为点 B' ，连接 DB' ， EB' ，分别与 AC 相交于 F 点， G 点，若 $AF = 8$ ， $DF = 7$ ， $B'F = 4$ ，则 CG 的长度为_____.



【答案】 4.5

【解析】

【分析】 根据等边对等角和折叠的性质证明 $\angle A = \angle B'$ ，进而证明 $\triangle AFD \sim \triangle B'FG$ ，则 $\frac{AF}{B'F} = \frac{DF}{GF}$ ，然后代值计算求出 $GF = 3.5$ ，则 $CG = AC - AF - GF = 4.5$ 。

【详解】 解： $\because AC = BC = 16$ ，

$\therefore \angle A = \angle B$ ，

由折叠的性质可得 $\angle B = \angle B'$ ，

$\therefore \angle A = \angle B'$ ，

又 $\because \angle AFD = \angle B'FG$ ，

$\therefore \triangle AFD \sim \triangle B'FG$ ，

$\therefore \frac{AF}{B'F} = \frac{DF}{GF}$ ，即 $\frac{8}{4} = \frac{7}{GF}$ ，

$\therefore GF = 3.5$ ，

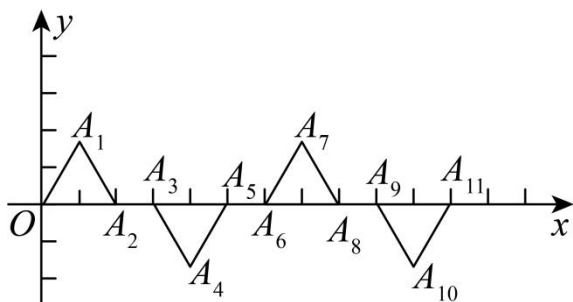
$\therefore CG = AC - AF - GF = 4.5$ ，

故答案为： 4.5。

【点睛】 本题主要考查了折叠的性质，相似三角形的性质与判定，等边对等角等等，证明 $\triangle AFD \sim \triangle B'FG$ 是解题的关键。

18. 已知， $\triangle OA_1A_2, \triangle A_3A_4A_5, \triangle A_6A_7A_8, \dots$ 都是边长为 2 的等边三角形，按下图所示摆放。点

$A_2, A_3, A_5, \dots$ 都在 x 轴正半轴上，且 $A_2A_3 = A_5A_6 = A_8A_9 = \dots = 1$ ，则点 A_{2023} 的坐标是_____。



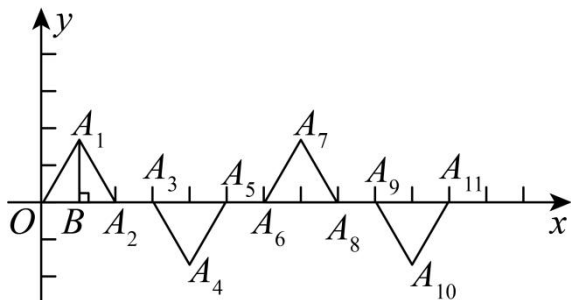
【答案】 $(2023, -\sqrt{3})$

【解析】

【分析】 先确定前几个点的坐标，然后归纳规律，按规律解答即可.

【详解】 解：由图形可得： $A_2(2, 0), A_3(3, 0), A_5(5, 0), A_6(6, 0), A_8(8, 0), A_9(9, 0)$,

如图：过 A_1 作 $A_1B \perp x$ 轴，



$\therefore \triangle OA_1A_2$,

$\therefore OB = \cos 60^\circ \times OA_1 = 1, A_1B = \sin 60^\circ \times OA_1 = \sqrt{3}$,

$\therefore A_1(1, \sqrt{3})$,

同理： $A_4(4, -\sqrt{3}), A_7(7, \sqrt{3}), A_{10}(10, -\sqrt{3})$,

$\therefore A_{3n-1}(3n-1, 0), A_{3n}(3n, 0), A_{3n+1}(3n+1, \sqrt{3})$ ($3n+1$) 为偶数, $A_{3n+1}(3n+1, -\sqrt{3})$ 为奇数;

$\therefore 2023 \div 3 = 674 \dots 1$, 2023 为奇数

$\therefore A_{2023}(2023, -\sqrt{3})$.

故答案为 $(2023, -\sqrt{3})$.

【点睛】 本题主要考查了等边三角形的性质、解直角三角形、坐标规律等知识点，先求出几个点、发现规律是解答本题的关键.

三、解答题

19. (1) 化简： $\left(2 - \frac{x-1}{x+2}\right) \div \frac{x^2+10x+25}{x^2-4}$;

(2) 解不等式组： $\begin{cases} 2x+7 > 3 \\ \frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{2} \end{cases}$.

【答案】 (1) $\frac{x-2}{x+5}$; (2) $-2 < x < 5$

【解析】

【分析】(1) 根据分式的混合计算法则求解即可；

(2) 先求出每个不等式的解集，再根据“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）”求出不等式组的解集即可．

【详解】解：(1) $\left(2 - \frac{x-1}{x+2}\right) \div \frac{x^2+10x+25}{x^2-4}$

$$= \left(\frac{2x+4}{x+2} - \frac{x-1}{x+2}\right) \div \frac{(x+5)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \frac{x+5}{x+2} \cdot \frac{(x+2)(x-2)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{x-2}{x+5};$$

(2)
$$\begin{cases} 2x+7 > 3 & \text{①} \\ \frac{x+1}{3} > \frac{x-1}{2} & \text{②} \end{cases}$$

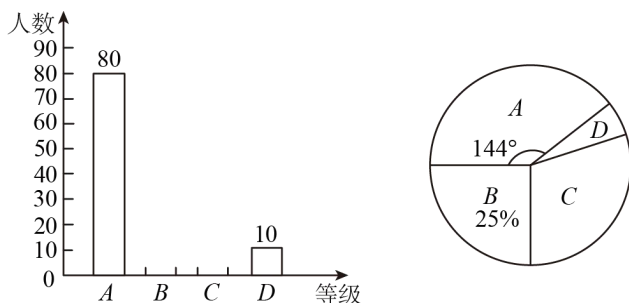
解不等式①得： $x > -2$ ，

解不等式②得： $x < 5$ ，

∴ 不等式组的解集为 $-2 < x < 5$

【点睛】 本题主要考查了分式的混合计算，解一元一次不等式组，正确计算是解题的关键．

20. 2022年10月16日至10月22日，中国共产党第二十次全国代表大会在北京召开．为激励青少年争做党的事业接班人，某市团市委在党史馆组织了“红心永向党”为主题的知识竞赛，依据得分情况将获奖结果分为四个等级：A级为特等奖，B级为一等奖，C级为二等奖，D级为优秀奖．并将统计结果绘制成了如图所示的两幅不完整的统计图．



请根据相关信息解答下列问题：

(1) 本次竞赛共有_____名选手获奖，扇形统计图中扇形C的圆心角度数是_____度；

(2) 补全条形统计图；

(3) 若该党史馆有一个入口，三个出口，请用树状图或列表法，求参赛选手小丽和小颖由馆内恰好从同一出口走出的概率。

【答案】(1) 200, 108

(2) 见解析 (3) $\frac{1}{3}$

【解析】

【分析】(1) 用 A 级的人数除以其人数占比即可求出获奖选手的总数，进而求出 B 级的人数，由此即可求出 C 级的人数，再用 360 度乘以 C 级的人数占比即可得到答案；

(2) 求出 B 级的人数，然后补全统计图即可；

(3) 先列出表格得到所有等可能性的结果数，再找到符合题意得结果数，最后依据概率计算公式求解即可。

【小问 1 详解】

解： $80 \div \frac{144^\circ}{360^\circ} = 200$ 名，

$\therefore$ 本次竞赛共有 200 名选手获奖，

$\therefore C$ 级的人数为 $200 - 80 - 200 \times 25\% - 10 = 60$ 名，

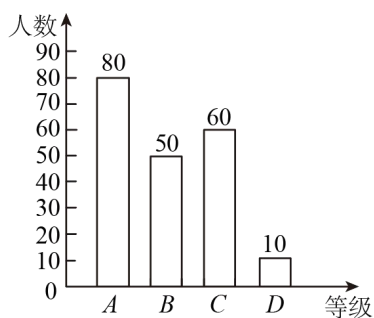
$\therefore$ 扇形统计图中扇形 C 的圆心角度数是 $360^\circ \times \frac{60}{200} = 108$ 度，

故答案为：200, 108；

【小问 2 详解】

解： B 级的人数为 $200 \times 25\% = 50$ 名，

补全统计图如下：



【小问 3 详解】

解：设这三个出口分别用 E 、 F 、 G 表示，列表如下：

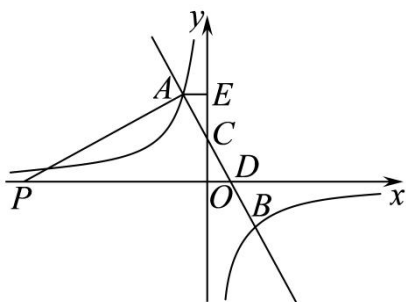
	E	F	G
E	(E, E)	(F, E)	(G, E)
F	(E, F)	(F, F)	(G, F)
G	(E, G)	(F, G)	(G, G)

由表格可知一共有 9 种等可能性的结果数，其中参赛选手小丽和小颖由馆内恰好从同一出口走出的结果数有 3 种，

$$\therefore \text{参赛选手小丽和小颖由馆内恰好从同一出口走出的概率} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

【点睛】本题主要考查了扇形统计图与条形统计图信息相关联，树状图法或列表法求解概率，正确读懂统计图，画出树状图或列出表格是解题的关键.

21. 如图，一次函数 $y_1 = -2x + 2$ 的图象与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 的图象分别交于点 A，点 B，与 y 轴，x 轴分别交于点 C，点 D，作 $AE \perp y$ 轴，垂足为点 E， $OE = 4$.



- (1) 求反比例函数的表达式；
- (2) 在第二象限内，当 $y_1 < y_2$ 时，直接写出 x 的取值范围；
- (3) 点 P 在 x 轴负半轴上，连接 PA ，且 $PA \perp AB$ ，求点 P 坐标.

【答案】(1) $y = -\frac{4}{x}$;

(2) $-1 < x < 0$;

(3) $(-9, 0)$.

【解析】

【分析】(1) 求出点 A 坐标，即可求出反比例函数解析式；

(2) 观察图象特点，即可得出取值范围；

(3) 先证明三角形相似，再根据相似三角形的性质求出线段 PD 长，最后由线段和差即可求出 OP 的长.

【小问 1 详解】

$\because OE = 4$, $AE \perp y$ 轴,

$\therefore E(0,4)$ ，点 A 的纵坐标为 4，

$\therefore$ 点 A 在 $y_1 = -2x + 2$ 图象上，

$\therefore$ 当 $y = 4$ 时， $4 = -2x + 2$ ，解得： $x = -1$ ，

$\therefore$ 点 A 坐标为 $(-1, 4)$ ，

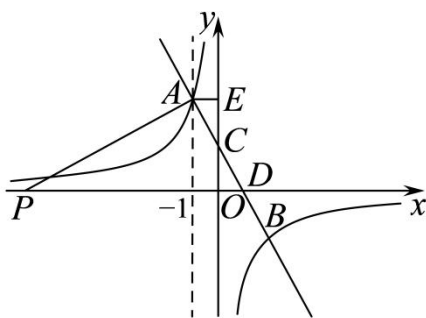
$\therefore$ 反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 的图象过点 A，

$\therefore k = -1 \times 4 = -4$ ，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为： $y = -\frac{4}{x}$ ；

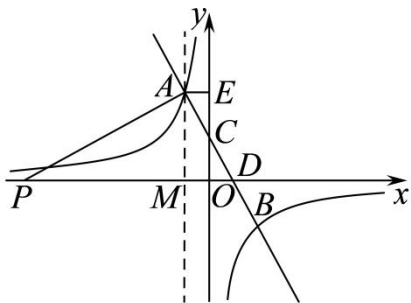
【小问 2 详解】

如图，在第二象限内，当 $y_1 < y_2$ 时， $-1 < x < 0$ ，



【小问 3 详解】

如图，过 A 作 $AM \perp x$ 轴于点 M，



$\therefore AE \perp y$ 轴，

$\therefore \angle AEO = \angle EOM = \angle OMA = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 AEOM 是矩形，

$\therefore AM = OE = 4$ ， $OM = AE = 1$ ，

$\therefore PA \perp AB$ ，

$\therefore \angle PAD = 90^\circ$ ，即： $\angle PAM + \angle DAM = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DAM + \angle ADM = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle PAM = \angle ADM,$$

$$\therefore \angle DAM = \angle APD,$$

$$\therefore \triangle PAD \sim \triangle AMD,$$

$$\therefore \frac{AD}{MD} = \frac{PD}{AD},$$

由 $y = -2x + 2$ 得： $y = 0$ 时， $-2x + 2 = 0$ ， 解得： $x = 1$ ，

$$\therefore \text{点 } D(1, 0),$$

$$\therefore AD = \sqrt{(-1-1)^2 + (4-0)^2} = 2\sqrt{5}, \quad MD = 2,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{5}}{2} = \frac{PD}{2\sqrt{5}},$$

$$\therefore PD = 10,$$

$$\therefore \text{点 } P(-9, 0).$$

【点睛】 此题考查了一次函数和反比例函数的性质、求解反比例函数解析式、根据图象确定自变量 x 的取值范围，相似三角形的判定等知识，注重数形结合是解答本题的关键。

22. 为进行某项数学综合与实践活动，小明到一个批发兼零售的商店购买所需工具，该商店规定一次性购买该工具达到一定数量后可以按批发价付款，否则按零售价付款。小明如果给学校九年级学生每人购买一个，只能按零售价付款，需用 3600 元；如果多购买 60 个，则可以按批发价付款，同样需用 3600 元，若按批发价购买 60 个与按零售价购买 50 个所付款相同，求这个学校九年级学生有多少人？

【答案】 这个学校九年级学生有 300 人。

【解析】

【分析】 设零售价为 x 元，批发价为 y ，然后根据题意列二元一次方程组求得零售价为 12 元，然后用 3600 除以零售价即可解答。

【详解】 解：设零售价为 x 元，批发价为 y ，
根据题意可得：

$$\begin{cases} 50x = 60y \\ \frac{3600}{y} = \frac{3600}{x} + 60 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = 12 \\ y = 10 \end{cases},$$

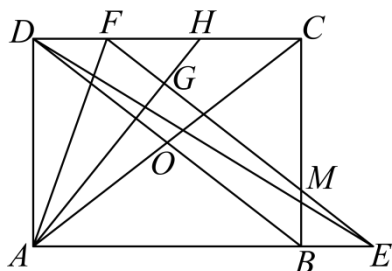
则学校九年级学生 $3600 \div 12 = 300$ 人。

答：这个学校九年级学生有 300 人。

【点睛】 本题主要考查了二元一次方程组的应用，审清题意、列二元一次方程组求得零售价是解答本题的

关键.

23. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 点 F 是 DC 边上的一点, 连接 AF , 将 $\triangle ADF$ 沿直线 AF 折叠, 点 D 落在点 G 处, 连接 AG 并延长交 DC 于点 H , 连接 FG 并延长交 BC 于点 M , 交 AB 的延长线于点 E , 且 $AC = AE$.



(1) 求证: 四边形 $DBEF$ 是平行四边形;

(2) 求证: $FH = ME$.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 证明见解析

【解析】

【分析】(1) 根据矩形的性质和折叠的性质证明 $AD = AG$, $AE = BD$, $\angle AGE = \angle DAB = 90^\circ$, 由此即可证明 $\text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle GEA$ 得到 $\angle AEG = \angle DBA$, 进而推出 $BD \parallel EF$, 再由 $BE \parallel DF$, 即可证明四边形 $DBEF$ 是平行四边形;

(2) 由(1)的结论可得 $BE = DF$, 进一步证明 $BE = GF$, 再证明 $\triangle FGH \cong \triangle EBM$, 即可证明 $FH = ME$.

【小问1详解】

证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AB \parallel CD, AD = BC, \angle ADC = \angle ABC = \frac{1}{2} \angle BAD = 90^\circ, AC = BD,$$

由折叠的性质可得 $AD = AG$, $\angle AGF = \angle ADF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AGE = \angle DAB = 90^\circ,$$

$$\therefore AC = AE, AC = BD,$$

$$\therefore AE = BD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABD \cong \text{Rt}\triangle GEA (\text{HL}),$$

$$\therefore \angle AEG = \angle DBA,$$

$$\therefore BD \parallel EF,$$

$$\text{又} \because BE \parallel DF,$$

$\therefore$ 四边形 $DBEF$ 是平行四边形;

【小问 2 详解】

证明：∵ 四边形 $DBEF$ 是平行四边形，

$$\therefore BE = DF,$$

由折叠的性质可得 $GF = DF$ ，

$$\therefore BE = GF,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle HFG = \angle E,$$

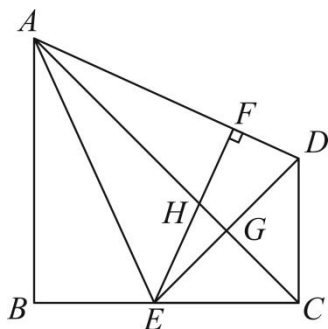
$$\text{又} \because \angle FGH = 180^\circ - \angle AGF = 90^\circ = \angle MBE,$$

$$\therefore \triangle FGH \cong \triangle EBM (\text{ASA}),$$

$$\therefore FH = ME.$$

【点睛】本题主要考查了矩形于折叠问题，平行四边形的性质与判定，全等三角形的性质与判定等等，熟练掌握相关知识是解题的关键。

24. 如图， $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 是两个等腰直角三角形， $EF \perp AD$ 。



(1) 当 $AF = DF$ 时，求 $\angle AED$ ；

(2) 求证： $\triangle EHG \sim \triangle ADG$ ；

(3) 求证： $\frac{AE}{EH} = \frac{AC}{HC}$ 。

【答案】(1) 60°

(2) 见详解 (3) 见详解

【解析】

【分析】(1) 先证明 $EA = ED$ ，再证明 GC 是线段 ED 的垂直平分线，即有 $EA = AD = DE$ ，即 $\triangle EAD$ 是等边三角形，问题得解；

(2) 根据垂直可得 $\angle AGE = \angle AGD = \angle AFH = 90^\circ$ ，又根据 $\angle EHG = \angle AHF$ ，可得 $\angle HEG = \angle HAF$ ，即可证明；

(3) 过 H 点作 $HK \perp BC$ 于点 K ，先表示出 $\angle EHK = 45^\circ - \angle HEG$ ，根据 GC 是线段 ED 的垂直平分线，

可得 $\angle EAG = \angle DAG$ ，即可得 $\angle BAE = 45^\circ - \angle HEG = \angle EHK$ ，进而可得 $\triangle ABE \sim \triangle HKE$ ，则有 $\frac{AE}{HE} = \frac{AB}{HK}$ ，结合 $AB = BC$ ， $HK = KC$ ，可得 $\frac{AE}{HE} = \frac{AB}{HK} = \frac{BC}{KC}$ ，再证明 $\triangle ABC \sim \triangle HKE$ ，即可证明。

【小问 1 详解】

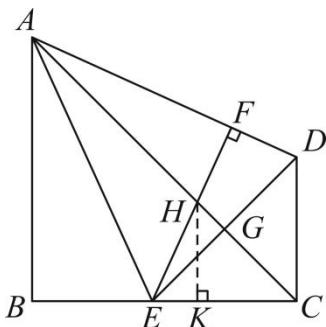
$\because EF \perp AD$ ，
 $\therefore \angle EFA = \angle EFD = 90^\circ$ ，
 $\because EF = EF$ ， $AF = DF$ ，
 $\therefore \triangle EFA \cong \triangle EFD$ ，
 $\therefore EA = ED$ ，
 $\because \triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 是两个等腰直角三角形，
 $\therefore \angle ACB = \angle BAC = 45^\circ = \angle CED = \angle CDE$ ， $AB = BC$ ，
 $\therefore \angle EGC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CED = 90^\circ$ ，
 $\therefore GC \perp DE$ ，
 $\therefore$ 等腰直角 $\triangle CDE$ 中， $EG = GD$ ，
 $\therefore GC$ 是线段 ED 的垂直平分线，
 $\therefore EA = AD$ ，
 $\therefore EA = AD = DE$ ，即 $\triangle EAD$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle AED = 60^\circ$ ；

【小问 2 详解】

在 (1) 中有 $GC \perp DE$ ， $EF \perp AD$ ，
 $\therefore \angle AGE = \angle AGD = \angle AFH = 90^\circ$ ，
 又 $\because \angle EHG = \angle AHF$ ，
 $\therefore \angle HEG = \angle HAF$ ，
 $\therefore \triangle EHG \sim \triangle ADG$ ；

【小问 3 详解】

过 H 点作 $HK \perp BC$ 于点 K ，如图，



$$\because HK \perp BC, \angle BCH = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle HKB = \angle HKC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle KHC = \angle KCH = 45^\circ, \text{ 即是等腰 Rt}\triangle KHC,$$

$$\therefore HK = KC,$$

$$\because \angle EHK = 180^\circ - \angle HKE - \angle HEK, \angle DEC = 45^\circ, \angle HEK = \angle HEG + \angle DEC,$$

$$\therefore \angle EHK = 45^\circ - \angle HEG,$$

$$\because GC \text{ 是线段 } ED \text{ 的垂直平分线},$$

$$\therefore \angle EAG = \angle DAG,$$

$$\text{在 (1) 中已证明 } \angle HEG = \angle DAG,$$

$$\therefore \angle HEG = \angle EAG,$$

$$\because \angle BAE = \angle BAC - \angle EAG = 45^\circ - \angle EAG,$$

$$\therefore \angle BAE = 45^\circ - \angle HEG = \angle EHK,$$

$$\because \angle B = \angle HKE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle HKE,$$

$$\therefore \frac{AE}{HE} = \frac{AB}{HK},$$

$$\because AB = BC, HK = KC,$$

$$\therefore \frac{AE}{HE} = \frac{AB}{HK} = \frac{BC}{KC},$$

$$\because HK \perp BC, AB \perp BC,$$

$$\therefore HK \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle HKC,$$

$$\therefore \frac{BC}{KC} = \frac{AC}{HC},$$

$$\therefore \frac{AE}{HE} = \frac{AC}{HC}.$$

【点睛】 本题主要考查了等腰三角形的性质性质，相似三角形的判定与性质，等边三角形的判定与性质，作出科学的辅助线，是解答本题的关键.

25. 如图 1，二次函数 $y = ax^2 + bx + 4$ 的图象经过点 $A(-4, 0), B(-1, 0)$.

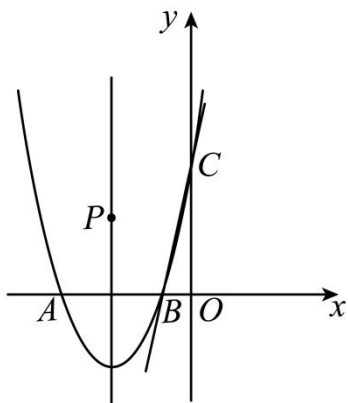


图1

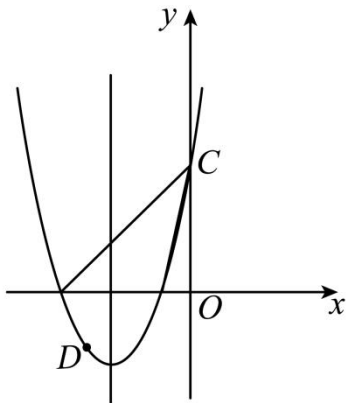


图2

- (1) 求二次函数的表达式；
- (2) 若点 P 在二次函数对称轴上，当 $\triangle BCP$ 面积为 5 时，求 P 坐标；
- (3) 小明认为，在第三象限抛物线上有一点 D ，使 $\angle DAB + \angle ACB = 90^\circ$ ；请判断小明的说法是否正确，如果正确，请求出 D 的坐标；如果不正确，请说明理由。

【答案】(1) $y = x^2 + 5x + 4$

(2) $\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$ 或 $\left(-\frac{5}{2}, -16\right)$

(3) 正确， $D\left(-\frac{8}{3}, -\frac{20}{9}\right)$

【解析】

【分析】(1) 直接运用待定系数法求解即可；

(2) 首先求出直线 BC 解析式，然后通过设 P 点坐标，并表示对应 Q 点坐标，从而利用“割补法”计算 $\triangle BCP$ 的面积表达式并建立方程求解即可；

(3) 首先连接 AC ， BC ，设 AC 与对称轴交点为 K ，对称轴与 x 轴交点为 H ，连接 BK ，延长 AD 与对称轴交于点 M ，根据已知信息求出 $\tan \angle CBK$ ，然后推出 $\angle DAB = \angle CBK$ ，从而在 $\text{Rt}\triangle AHM$ 中求出 HM ，确定出 M 点坐标，再求出直线 AM 解析式，通过与抛物线解析式联立，求出交点 D 的坐标即可。

【小问 1 详解】

解：将 $A(-4, 0)$ ， $B(-1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 4$ 得：

$$\begin{cases} 16a - 4b + 4 = 0 \\ a - b + 4 = 0 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线解析式为： $y = x^2 + 5x + 4$ ；

【小问 2 详解】

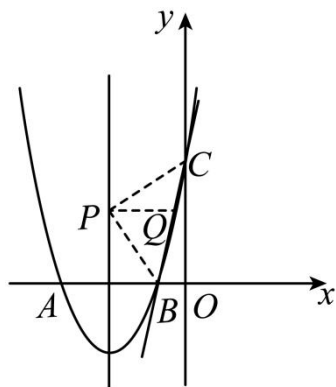
解：由抛物线 $y = x^2 + 5x + 4$ 可知，其对称轴为直线 $x = -\frac{5}{2}$ ， $C(0,4)$ ，

设直线 BC 解析式为： $y = kx + c$ ，

将 $B(-1,0)$ ， $C(0,4)$ 代入解得： $\begin{cases} k = 4 \\ c = 4 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 直线 BC 解析式为： $y = 4x + 4$ ，

此时，如图所示，作 $PQ \parallel x$ 轴，交 BC 于点 Q ，



$\because$ 点 P 在二次函数对称轴上，

$\therefore$ 设 $P\left(-\frac{5}{2}, m\right)$ ，则 $Q\left(\frac{m-4}{4}, m\right)$ ，

$$\therefore PQ = \left| \frac{m-4}{4} - \left(-\frac{5}{2}\right) \right| = \left| \frac{m+6}{4} \right|,$$

$$\therefore S_{\triangle BCP} = \frac{1}{2} PQ (y_C - y_B) = \frac{1}{2} \times \left| \frac{m+6}{4} \right| \times 4 = \left| \frac{m+6}{2} \right|,$$

$\therefore$ 要使得 $\triangle BCP$ 面积为 5，

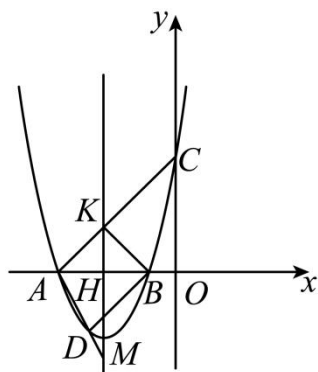
$$\therefore \left| \frac{m+6}{2} \right| = 5, \text{ 解得: } m = 4 \text{ 或 } m = -16,$$

$\therefore P$ 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$ 或 $\left(-\frac{5}{2}, -16\right)$ ；

【小问 3 详解】

解：正确， $D\left(-\frac{8}{3}, -\frac{20}{9}\right)$ ，理由如下：

如图所示，连接 AC ， BC ，设 AC 与对称轴交点为 K ，对称轴与 x 轴交点为 H ，连接 BK ，延长 AD 与对称轴交于点 M ，



由 (1)、(2) 可得 $OA = OC = 4$, $\angle AOC = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CAO = 45^\circ, \quad AC = 4\sqrt{2},$$

根据抛物线的对称性, $AK = BK$,

$$\therefore \angle KAB = \angle KBA = 45^\circ, \quad \angle AKB = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 3,$$

$$\therefore AK = BK = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore CK = AC - AK = \frac{5\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{在 Rt}\triangle CKB \text{ 中, } \tan \angle CBK = \frac{CK}{BK} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \angle CBK + \angle ACB = 90^\circ \text{ 且 } \angle DAB + \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle CBK,$$

$$\therefore \tan \angle DAB = \tan \angle CBK = \frac{5}{3},$$

$$\text{即: 在 Rt}\triangle AHM \text{ 中, } \frac{HM}{AH} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore AH = -\frac{5}{2} - (-4) = \frac{3}{2},$$

$$\therefore HM = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right),$$

设直线 AM 解析式为: $y = sx + t$,

$$\text{将 } A(-4, 0)、M\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right) \text{ 代入解得: } \begin{cases} s = -\frac{5}{3} \\ t = -\frac{20}{3} \end{cases},$$

∴ 直线 AM 解析式为： $y = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{3}$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = x^2 + 5x + 4 \\ y = -\frac{5}{3}x - \frac{20}{3} \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = -\frac{8}{3} \\ y = -\frac{20}{9} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -4 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (不合题, 舍去)}$$

∴ 小明说法正确, D 的坐标为 $D\left(-\frac{8}{3}, -\frac{20}{9}\right)$.

【点睛】 本题考查二次函数综合问题, 包括“割补法”计算面积, 以及解直角三角形等, 掌握二次函数的性质, 并熟练运用解三角形的方法进行数形结合分析是解题关键.

