

2023 年枣庄市初中学业水平考试

数学

注意事项：

1. 本试题分第 I 卷和第 II 卷两部分，第 I 卷为选择题，30 分；第 II 卷为非选择题，90 分；全卷共 6 页，满分 120 分。考试时间为 120 分钟。
2. 答卷时，考生务必将第 I 卷和第 II 卷的答案填涂或书写在答题卡指定位置上，并在本页上方空白处写上姓名和准考证号，考试结束，将试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题 共 30 分）

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的。

1. 下列各数中比 1 大的数是（ ）

- A. 2 B. 0 C. -1 D. -3

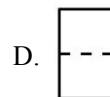
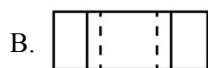
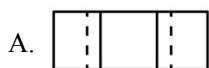
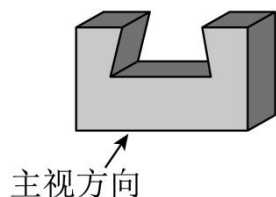
【答案】A

【解析】

【详解】试题分析：根据正数大于 0，0 大于负数，两个负数，绝对值大的反而小可得题目选项中的各数中比 1 大的数是 2，故选 A.

考点：有理数的大小比较.

2. 榫卯是古代中国建筑、家具及其它器械的主要结构方式，是我国工艺文化精神的传奇；凸出部分叫榫，凹进部分叫卯，下图是某个部件“卯”的实物图，它的主视图是（ ）

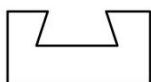


【答案】C

【解析】

【分析】根据主视图是从前向后观察到的图形，进行判断即可.

【详解】解：由题意，得：“卯”的主视图为：



故选 C.

【点睛】本题考查三视图，熟练掌握三视图的画法，是解题的关键.

3. 随着全球新一轮科技革命和产业变革的蓬勃发展，新能源汽车已经成为全球汽车产业转型发展的主要方向，根据中国乘用车协会的统计数据，2023 年第一季度，中国新能源汽车销量为 159 万辆，同比增长 26.2%，其中 159 万用科学记数法表示为 ()

- A. 1.59×10^6 B. 15.9×10^5 C. 159×10^4 D. 1.59×10^2

【答案】A

【解析】

【分析】根据科学记数法的表示方法进行表示即可.

【详解】解：159 万 $= 1590000 = 1.59 \times 10^6$ ；

故选 A.

【点睛】本题考查科学记数法，熟练掌握科学记数法的表示方法： $a \times 10^n$ ($1 \leq |a| < 10$)， n 为整数，是解题的关键.

4. 我国元朝朱世杰所著的《算学启蒙》一书是中国较早的数学著作之一，书中记载一道问题：“良马日行二百四十里，驽马日行一百五十里，驽马先行一十二日，问良马几何追及之？”题意是：快马每天走 240 里，慢马每天走 150 里，慢马先走 12 天，试问快马几天可以追上慢马？若设快马 x 天可以追上慢马，则下列方程正确的是 ()

- A. $240x + 150x = 150 \times 12$ B. $240x - 150x = 240 \times 12$
C. $240x + 150x = 240 \times 12$ D. $240x - 150x = 150 \times 12$

【答案】D

【解析】

【分析】设快马 x 天可以追上慢马，根据路程=速度×时间，即可得出关于 x 的一元一次方程，此题得解.

【详解】解：设快马 x 天可以追上慢马，

依题意，得： $240x - 150x = 150 \times 12$.

故选：D.

【点睛】本题考查了由实际问题抽象出一元一次方程，找准等量关系，正确列出一元一次方程是解题的关键.

5. 下列运算结果正确的是 ()

- A. $x^4 + x^4 = 2x^8$ B. $(-2x^2)^3 = -6x^6$ C. $x^6 \div x^3 = x^3$ D. $x^2 \cdot x^3 = x^6$

【答案】C

【解析】

【分析】根据积的乘方，同底数幂的乘法，除法法则，合并同类项法则，逐一进行计算即可得出结论.

【详解】解：A、 $x^4 + x^4 = 2x^4$ ，选项计算错误，不符合题意；B、 $(-2x^2)^3 = -8x^6$ ，选项计算错误，不符合题意；C、 $x^6 \div x^3 = x^3$ ，选项计算正确，符合题意；D、 $x^2 \times x^3 = x^5$ ，选项计算错误，不符合题意；

故选 C.

【点睛】本题考查积的乘方，同底数幂的乘法，除法，合并同类项. 熟练掌握相关运算法则，是解题的关键.

6. 4月23日是世界读书日，学校举行“快乐阅读，健康成长”读书活动. 小明随机调查了本校七年级30名同学近4个月内每人阅读课外书的数量，数据如下表所示：

人数	6	7	10	7
课外书数量（本）	6	7	9	12

则阅读课外书数量的中位数和众数分别是（ ）

A. 8, 9

B. 10, 9

C. 7, 12

D. 9, 9

【答案】D

【解析】

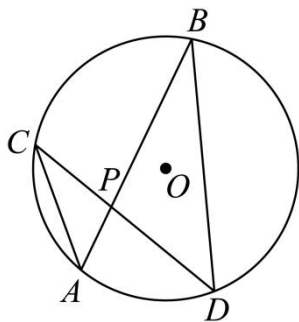
【分析】利用中位数，众数的定义即可解决问题. 中位数：把一组数据按从小到大的顺序排列，在中间的一个数字（或者两个数字的平均值）叫做这组数据的中位数. 众数：在一组数据中出现次数最多的数.

【详解】解：中位数为第15个和第16个的平均数为： $\frac{9+9}{2} = 9$ ，众数为9.

故选：D.

【点睛】本题考查了中位数和众数，解题的关键是掌握平均数、中位数和众数的概念.

7. 如图，在 $\odot O$ 中，弦 AB ， CD 相交于点 P ，若 $\angle A = 48^\circ$ ， $\angle APD = 80^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数为（ ）



- A. 32° B. 42° C. 48° D. 52°

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆周角定理，可以得到 $\angle D$ 的度数，再根据三角形外角的性质，可以求出 $\angle B$ 的度数.

【详解】解： $\because \angle A = \angle D$, $\angle A = 48^\circ$,

$$\therefore \angle D = 48^\circ,$$

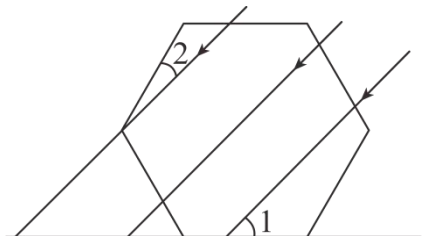
$$\because \angle APD = 80^\circ, \angle APD = \angle B + \angle D,$$

$$\therefore \angle B = \angle APD - \angle D = 80^\circ - 48^\circ = 32^\circ,$$

故选：A.

【点睛】本题考查圆周角定理、三角形外角的性质，解答本题的关键是求出 $\angle D$ 的度数.

8. 如图，一束太阳光线平行照射在放置于地面的正六边形上，若 $\angle 1 = 44^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数为 ()



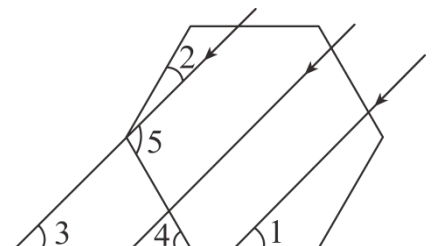
- A. 14° B. 16° C. 24° D. 26°

【答案】B

【解析】

【分析】如图，求出正六边形的一个内角和一个外角的度数，得到 $\angle 4 = 60^\circ$, $\angle 2 + \angle 5 = 120^\circ$ ，平行线的性质，得到 $\angle 3 = \angle 1 = 44^\circ$ ，三角形的外角的性质，得到 $\angle 5 = \angle 3 + \angle 4 = 104^\circ$ ，进而求出 $\angle 2$ 的度数.

【详解】解：如图：



$\therefore$ 正六边形的一个外角的度数为： $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$,

$\therefore$ 正六边形的一个内角的度数为： $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$,

即： $\angle 4 = 60^\circ, \angle 2 + \angle 5 = 120^\circ$,

$\therefore$ 一束太阳光线平行照射在放置于地面的正六边形上， $\angle 1 = 44^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle 1 = 44^\circ$,

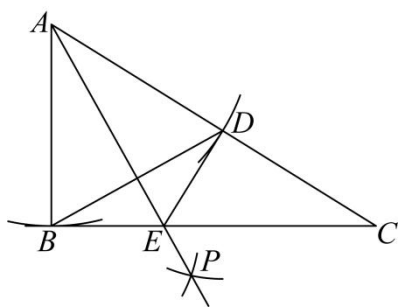
$\therefore \angle 5 = \angle 3 + \angle 4 = 104^\circ$,

$\therefore \angle 2 = 120^\circ - \angle 5 = 16^\circ$;

故选 B.

【点睛】本题考查正多边形的内角和、外角和的综合应用，平行线的性质. 熟练掌握多边形的外角和是 360° ，是解题的关键.

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，以点 A 为圆心，以 AB 的长为半径作弧交 AC 于点 D ，连接 BD ，再分别以点 B, D 为圆心，大于 $\frac{1}{2}BD$ 的长为半径作弧，两弧交于点 P ，作射线 AP 交 BC 于点 E ，连接 DE ，则下列结论中不正确的是 ()



A. $BE = DE$

B. $AE = CE$

C. $CE = 2BE$

D. $\frac{S_{\triangle EDC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】利用等腰三角形的性质和线段垂直平分线的性质可以判断①的正确；利用等边三角形的性质结合①的结论和等腰三角形的三线合一的性质可以判断②正确；利用直角三角形中 30° 度角所对的直角边等于斜边的一半判断③的正确；利用相似三角形的面积比等于相似比的平方即可判断④的错误.

【详解】解：由题意得： $AB = AD$ ， AP 为 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle BAC = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，

$\therefore AP$ 为 BD 的垂直平分线,

$\therefore BE = DE$, 故 A 的结论正确;

$\because \triangle ABD$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ABD = 60^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$,

$\therefore \angle DBE = 30^\circ$,

$\because BE = DE$,

$\therefore \angle EDB = \angle EBD = 30^\circ$,

$\therefore \angle ADE = \angle ADB + \angle EDB = 90^\circ$,

$\therefore DE \perp AC$.

$\because \angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$,

$\therefore AC = 2AB$,

$\because AB = AD$,

$\therefore AD = CD$,

$\therefore DE$ 垂直平分线段 AC ,

$\therefore AE = CE$, 故 B 的结论正确;

$\because \text{Rt}\triangle CDE$ 中, $\angle C = 30^\circ$,

$\therefore CE = 2DE$,

$\because BE = DE$,

$\therefore CE = 2BE$, 故 C 的结论正确.

$\because \angle EDC = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle C = \angle C$,

$\therefore \triangle CDE \sim \triangle CBA$,

$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBA}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2$,

$\because AD = AB$,

$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DE}{AD} = \tan \angle DAE = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore \frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle CBA}} = \left(\frac{DE}{AB}\right)^2 = \frac{1}{3}$,

故 D 的结论错误;

故选: D.

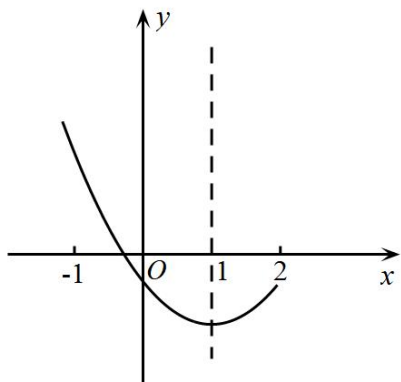
【点睛】 本题主要考查了含 30° 角的直角三角形的性质, 角平分线, 线段垂直平分线的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 等边三角形的判定与性质, 等腰三角形的性质, 熟练掌握含 30° 角的直角三角形的性质

和相似三角形的判定与性质是解题的关键.

10. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象如图所示, 对称轴是直线 $x = 1$, 下列结论: ① $abc < 0$; ② 方

程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根大于 2 且小于 3; ③ 若 $(0, y_1), (\frac{3}{2}, y_2)$ 是抛物线上的两点, 那么

$y_1 < y_2$; ④ $11a + 2c > 0$; ⑤ 对于任意实数 m , 都有 $m(am + b) \geq a + b$, 其中正确结论的个数是 ()



A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】根据抛物线的开口方向, 对称轴, 与 y 轴的交点位置, 判断①; 对称性判断②; 增减性, 判断③; 对称轴和特殊点判断④; 最值判断⑤.

【详解】解: $\because$ 抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 与 y 轴交于负半轴,

$\therefore a > 0, b = -2a < 0, c < 0$,

$\therefore abc > 0$; 故①错误;

由图可知, 抛物线与 x 轴的一个交点的横坐标的取值范围为: $-1 < x < 0$,

$\because$ 抛物线关于直线 $x = 1$ 对称,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的一个交点的横坐标的取值范围为: $2 < x < 3$,

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 必有一个根大于 2 且小于 3; 故②正确;

$\because a > 0$,

$\therefore$ 抛物线上的点离对称轴的距离越远, 函数值越大,

$\because (0, y_1), (\frac{3}{2}, y_2)$ 是抛物线上的两点, 且 $|0 - 1| > |\frac{3}{2} - 1|$,

$\therefore y_1 > y_2$; 故③错误;

$$\therefore a > 0, b = -2a$$

$$\therefore 11a + 2c = 5a + 2a - 2b + 2c = 5a + 2(a - b + c),$$

由图象知： $x = -1$ ， $y = a - b + c > 0$ ，

$$\therefore 11a + 2c = 5a + 2(a - b + c) > 0; \text{ 故④正确；}$$

$\therefore a > 0$ ，对称轴为直线 $x = 1$ ，

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时，函数值最小为： $a + b + c$ ，

$\therefore$ 对于任意实数 m ，都有 $am^2 + bm + c \geq a + b + c$ ，

即： $am^2 + bm \geq a + b$ ，

$\therefore m(am + b) \geq a + b$ ；故⑤正确；

综上：正确的有 3 个；

故选 C.

【点睛】 本题考查二次函数的图象和性质，正确的识图，熟练掌握二次函数的性质，是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题，大题共 6 小题，每小题填对得 3 分，共 18 分，只填写最后结果.

11. 计算 $(\sqrt{2023} - 1)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 3

【解析】

【分析】 根据零指数幂和负整数指数幂的计算法则求解即可.

【详解】 解： $(\sqrt{2023} - 1)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

$$= 1 + 2$$

$$= 3$$

故答案为： 3.

【点睛】 本题主要考查了零指数幂和负整数指数幂，正确计算是解题的关键，注意非零底数的零指数幂的结果为 1.

12. 若 $x = 3$ 是关 x 的方程 $ax^2 - bx = 6$ 的解，则 $2023 - 6a + 2b$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 2019

【解析】

【分析】将 $x=3$ 代入方程，得到 $3a-b=2$ ，利用整体思想代入求值即可.

【详解】解： $\because x=3$ 是关 x 的方程 $ax^2-bx=6$ 的解，

$$\therefore a \cdot 3^2 - 3b = 6, \text{ 即: } 3a - b = 2,$$

$$\therefore 2023 - 6a + 2b$$

$$= 2023 - 2(3a - b)$$

$$= 2023 - 2 \times 2$$

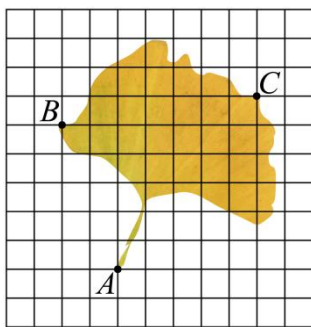
$$= 2023 - 4$$

$$= 2019;$$

故答案为：2019.

【点睛】本题考查方程的解，代数式求值. 熟练掌握方程的解是使等式成立的未知数的值，是解题的关键.

13. 银杏是著名的活化石植物，其叶有细长的叶柄，呈扇形. 如图是一片银杏叶标本，叶片上两点 B ， C 的坐标分别为 $(-3,2)$ ， $(4,3)$ ，将银杏叶绕原点顺时针旋转 90° 后，叶柄上点 A 对应点的坐标为_____.



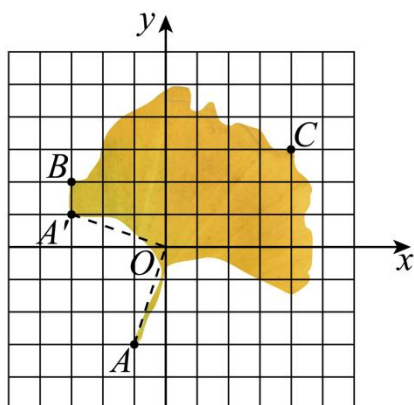
【答案】 $(-3,1)$

【解析】

【分析】根据点的坐标，确定坐标系的位置，再根据旋转的性质，进行求解即可.

【详解】解： $\because B$ ， C 的坐标分别为 $(-3,2)$ ， $(4,3)$ ，

$\therefore$ 坐标系的位置如图所示：



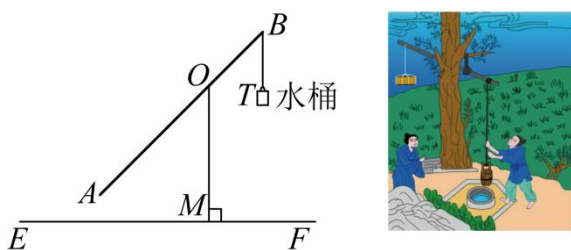
∴ 点 A 的坐标为： $(-1, -3)$ ，

连接 OA ，将 OA 绕点 O 顺时针旋转 90° 后，如图，叶柄上点 A 对应点的坐标为 $(-3, 1)$ ；

故答案为： $(-3, 1)$

【点睛】本题考查坐标与旋转．解题的关键是确定原点的位置，熟练掌握旋转的性质．

14. 如图所示，桔棒是一种原始的汲水工具，它是在一根竖立的架子上加上一根细长的杠杆，末端悬挂一重物，前端悬挂水桶．当人把水桶放入水中打满水以后，由于杠杆末端的重力作用，便能轻易把水提升至所需处，若已知：杠杆 $AB = 6$ 米， $AO:OB = 2:1$ ，支架 $OM \perp EF$ ， $OM = 3$ 米， AB 可以绕着点 O 自由旋转，当点 A 旋转到如图所示位置时 $\angle AOM = 45^\circ$ ，此时点 B 到水平地面 EF 的距离为_____米．(结果保留根号)

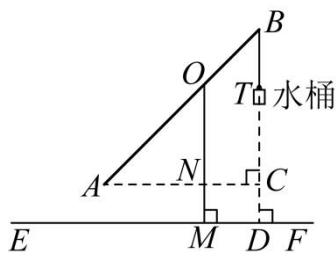


【答案】 $(3 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 3)$

【解析】

【分析】过点 B 作 $BD \perp EF$ 于点 D ，过点 A 作 $AC \perp BD$ 交 BD 于点 C ，交 OM 于点 N ，易得四边形 $MDCN$ 为矩形，分别解 $\text{Rt}\triangle ANO$ ， $\text{Rt}\triangle ACB$ ，求出 ON, BC, CD 的长，利用 $BD = BC + CD$ 进行求解即可．

【详解】解：过点 B 作 $BD \perp EF$ 于点 D ，过点 A 作 $AC \perp BD$ 交 BD 于点 C ，交 OM 于点 N ，



$$\therefore OM \perp EF,$$

$$\therefore OM \parallel BC,$$

$$\therefore AN \perp OM,$$

$\therefore$ 四边形 $MDCN$ 为矩形,

$$\therefore MN = CD,$$

$$\therefore AB = 6, AO : OB = 2 : 1,$$

$$\therefore AO = \frac{2}{3} AB = 4,$$

在 $\text{Rt}\triangle ANO$ 中, $AO = 4$, $\angle AOM = 45^\circ$,

$$\therefore ON = OA \cdot \cos 45^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};$$

$$\therefore CD = MN = OM - ON = 3 - 2\sqrt{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACB$ 中, $AB = 6$, $\angle AOM = 45^\circ$,

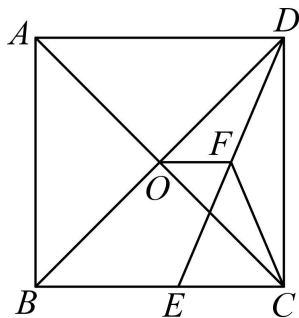
$$\therefore BC = AB \cdot \cos 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2};$$

$$\therefore BD = BC + CD = 3\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \text{ (米)};$$

故答案为: $3 + \sqrt{2}$.

【点睛】 本题考查解直角三角形的实际应用, 矩形的性质与判定. 解题的关键是添加辅助线, 构造直角三角形.

15. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , E 为 BC 上一点, $CE = 7$, F 为 DE 的中点, 若 $\triangle CEF$ 的周长为 32, 则 OF 的长为_____.



【答案】 $\frac{17}{2}$

【解析】

【分析】利用斜边上的中线等于斜边的一半和 $\triangle CEF$ 的周长，求出 CF, EF 的长，进而求出 DE 的长，勾股定理求出 CD 的长，进而求出 BE 的长，利用三角形的中位线定理，即可得解.

【详解】解： $\because CE = 7, \triangle CEF$ 的周长为 32,

$$\therefore CF + EF = 32 - 7 = 25.$$

$\because F$ 为 DE 的中点,

$$\therefore DF = EF.$$

$\because \angle BCD = 90^\circ,$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}DE,$$

$$\therefore EF = CF = \frac{1}{2}DE = 12.5,$$

$$\therefore DE = 2EF = 25,$$

$$\therefore CD = \sqrt{DE^2 - CE^2} = 24.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore BC = CD = 24, O \text{ 为 } BD \text{ 的中点},$$

$\therefore OF$ 是 $\triangle BDE$ 的中位线,

$$\therefore OF = \frac{1}{2}(BC - CE) = \frac{1}{2}(24 - 7) = \frac{17}{2}.$$

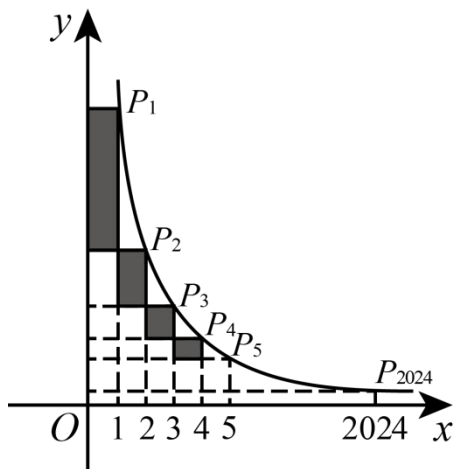
故答案为: $\frac{17}{2}$.

【点睛】本题考查正方形的性质，斜边上的中线，三角形的中位线定理. 熟练掌握斜边上的中线等于斜边的一半，是解题的关键.

16. 如图，在反比例函数 $y = \frac{8}{x} (x > 0)$ 的图象上有 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2024}$ 等点，它们的横坐标依次为 1, 2, 3, $\dots$,

2024, 分别过这些点作 x 轴与 y 轴的垂线, 图中所构成的阴影部分的面积从左到右依次为 $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{2023}$,

则 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2023} =$ _____.



【答案】 $\frac{2023}{253}$

【解析】

【分析】 求出 $P_1, P_2, P_3, P_4 \dots$ 的纵坐标, 从而可计算出 $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$ 的高, 进而求出 $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$, 从而得出 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$ 的值.

【详解】 当 $x=1$ 时, P_1 的纵坐标为 8,

当 $x=2$ 时, P_2 的纵坐标为 4,

当 $x=3$ 时, P_3 的纵坐标为 $\frac{8}{3}$,

当 $x=4$ 时, P_4 的纵坐标为 2,

当 $x=5$ 时, P_5 的纵坐标为 $\frac{8}{5}$,

...

则 $S_1 = 1 \times (8 - 4) = 8 - 4$;

$S_2 = 1 \times (4 - \frac{8}{3}) = 4 - \frac{8}{3}$;

$S_3 = 1 \times (\frac{8}{3} - 2) = \frac{8}{3} - 2$;

$S_4 = 1 \times (2 - \frac{8}{5}) = 2 - \frac{8}{5}$;

...

$$S_n = \frac{8}{n} - \frac{8}{n+1};$$

$$S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n = 8 - 4 + 4 - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} - 2 + 2 - \frac{8}{5} + \dots + \frac{8}{n} - \frac{8}{n+1} = 8 - \frac{8}{n+1} = \frac{8n}{n+1},$$

$$\therefore S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{2023} = \frac{8 \times 2023}{2024} = \frac{2023}{253}.$$

故答案为: $\frac{2023}{253}$.

【点睛】 本题考查了反比例函数与几何的综合应用，解题的关键是求出 $S_n = \frac{8}{n} - \frac{8}{n+1}$.

三、解答题：本大题共 8 小题，共 72 分，解答时，要写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 先化简，再求值： $\left(a - \frac{a^2}{a^2-1}\right) \div \frac{a^2}{a^2-1}$ ，其中 a 的值从不等式组 $-1 < a < \sqrt{5}$ 的解集中选取一个合适的整数.

【答案】 $\frac{a^2 - a - 1}{a}, \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】 先根据分式的混合运算法则，进行化简，再选择一个合适的整数，代入求值即可.

【详解】 解： 原式 $= \left(\frac{a^3 - a}{a^2 - 1} - \frac{a^2}{a^2 - 1}\right) \div \frac{a^2}{a^2 - 1}$

$$= \frac{a(a^2 - a - 1)}{a^2 - 1} \cdot \frac{a^2 - 1}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 - a - 1}{a};$$

$$\because a^2 \neq 0, a^2 - 1 \neq 0,$$

$$\therefore a \neq 0, a \neq \pm 1,$$

$$\because \sqrt{4} = 2 < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3,$$

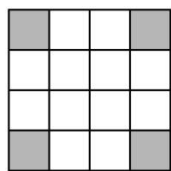
$$\therefore -1 < a < \sqrt{5} \text{ 的整数解有: } 0, 1, 2,$$

$$\because a \neq 0, a \neq \pm 1,$$

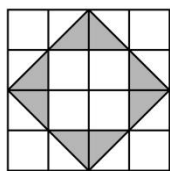
$$\therefore a = 2, \text{ 原式} = \frac{2^2 - 2 - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题考查分式的化简求值，求不等式组的整数解．熟练掌握相关运算法则，正确的进行计算，是解题的关键．

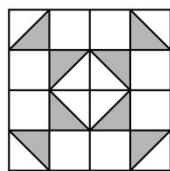
18. (1) 观察分析：在一次数学综合实践活动中，老师向同学们展示了图①，图②，图③三幅图形，请你结合自己所学的知识，观察图中阴影部分构成的图案，写出三个图案都具有的两个共同特征：_____，_____.



图①

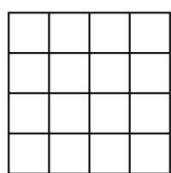


图②

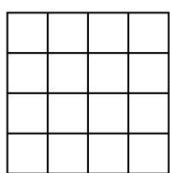


图③

(2) 动手操作：请在图④中设计一个新的图案，使其满足你在 (1) 中发现的共同特征.



图④



备用图

【答案】(1) 观察发现四个图形都是轴对称图形，且面积相等；(2) 见解析

【解析】

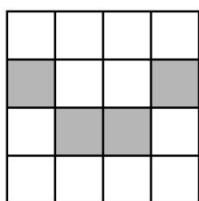
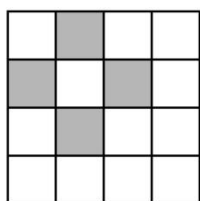
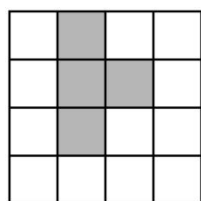
【分析】(1) 应从对称方面，阴影部分的面积等方面入手思考；

(2) 应画出既是轴对称图形，且面积为 4 的图形.

【详解】解：(1) 观察发现四个图形都是轴对称图形，且面积相等；

故答案为：观察发现四个图形都是轴对称图形，且面积相等；

(2) 如图：



【点睛】此题主要考查了利用轴对称图形设计图案，关键是掌握利用轴对称的作图方法来作图，通过变换对称轴来得到不同的图案.

19. 对于任意实数 a, b ，定义一种新运算：
$$a \ast b = \begin{cases} a - b & (a \geq 2b) \\ a + b - 6 & (a < 2b) \end{cases}$$
，例如： $3 \ast 1 = 3 - 1 = 2$ ，

$5 \ast 4 = 5 + 4 - 6 = 3$ ．根据上面的材料，请完成下列问题：

(1) $4 \ast 3 =$ _____， $(-1) \ast (-3) =$ _____；

(2) 若 $(3x + 2) \ast (x - 1) = 5$ ，求 x 的值．

【答案】(1) 1；2；

$$(2) \ x = 1,$$

【解析】

【分析】(1) 原式利用题中的新定义计算即可求出值；

(2) 已知等式利用已知的新定义进行分类讨论并列出方程，再计算求出 x 的值即可．

【小问 1 详解】

$$\because 4 < 3 \times 2,$$

$$\therefore 4 * 3 = 4 + 3 - 6 = 1,$$

$$\because -1 > (-3) \times 2$$

$$\therefore (-1) * (-3) = -1 - (-3) = 2;$$

故答案为：1；2；

【小问 2 详解】

若 $3x + 2 \geq 2(x - 1)$ 时，即 $x \geq -4$ 时，则

$$(3x + 2) - (x - 1) = 5,$$

解得： $x = 1$ ，

若 $3x + 2 < 2(x - 1)$ 时，即 $x < -4$ 时，则

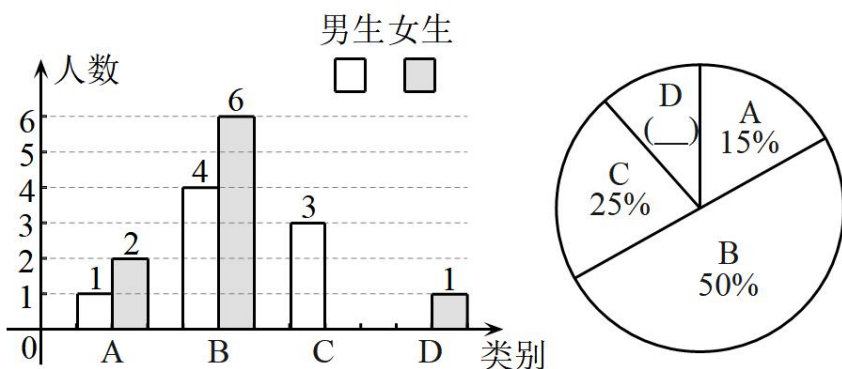
$$(3x + 2) + (x - 1) - 6 = 5,$$

解得： $x = \frac{5}{2}$ ，不合题意，舍去，

$$\therefore x = 1,$$

【点睛】此题考查了实数的新定义运算及解一元一次方程，弄清题中的新定义是解本题的关键．

20. 《义务教育课程方案》和《义务教育劳动课程标准（2022 年版）》正式发布，劳动课正式成为中小学的一门独立课程，日常生活劳动设定四个任务群： A 清洁与卫生， B 整理与收纳， C 家用器具使用与维护， D 烹饪与营养．学校为了较好地开设课程，对学生最喜欢的任务群进行了调查，并将调查结果绘制成以下两幅不完整的统计图．



请根据统计图解答下列问题：

- (1) 本次调查中，一共调查了_____名学生，其中选择“C 家用器具使用与维护”的女生有_____名，“D 烹饪与营养”的男生有_____名。
- (2) 补全上面的条形统计图和扇形统计图；
- (3) 学校想从选择“C 家用器具使用与维护”的学生中随机选取两名学生作为“家居博览会”的志愿者，请用画树状图或列表法求出所选的学生恰好是一名男生和一名女生的概率。

【答案】(1) 20, 2, 1

(2) 图见解析 (3) $\frac{3}{5}$

【解析】

【分析】(1) 利用 A 组人数除以所占的百分比求出总数，总数乘以 C 组的百分比，求出 C 组人数，进而求出 C 组女生人数，总数乘以 D 组的百分比，求出 D 组的人数，进而求出 D 组男生人数；

(2) 根据 (1) 中所求数据，补全图形即可；

(3) 利用列表法求出概率即可。

【小问 1 详解】

解： $(1+2) \div 15\% = 20$ (人)，

$\therefore$ 一共调查了 20 人；

$\therefore$ C 组人数为： $20 \times 25\% = 5$ (人)，

$\therefore$ C 组女生有： $5 - 3 = 2$ (人)；

由扇形统计图可知：D 组的百分比为 $1 - 15\% - 25\% - 50\% = 10\%$ ，

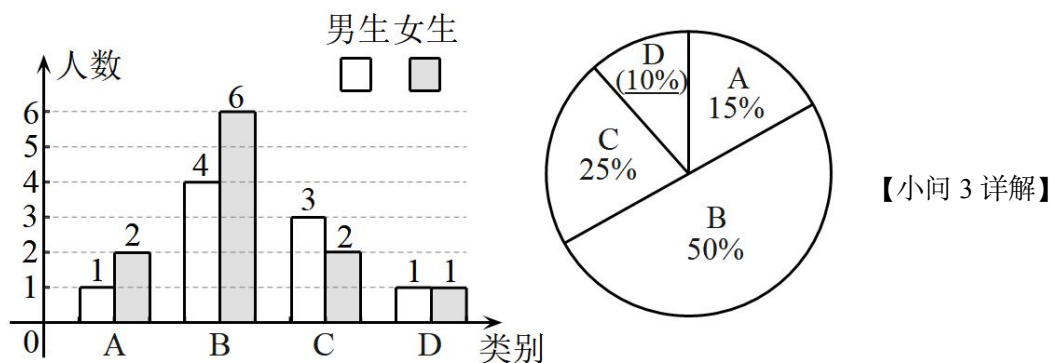
$\therefore$ D 组人数为： $20 \times 10\% = 2$ (人)，

$\therefore$ D 组男生有： $2 - 1 = 1$ (人)；

故答案为：20, 2, 1

【小问 2 详解】

补全图形如下：



用 A, B, C 表示 3 名男生，用 D, E 表示两名女生，列表如下：

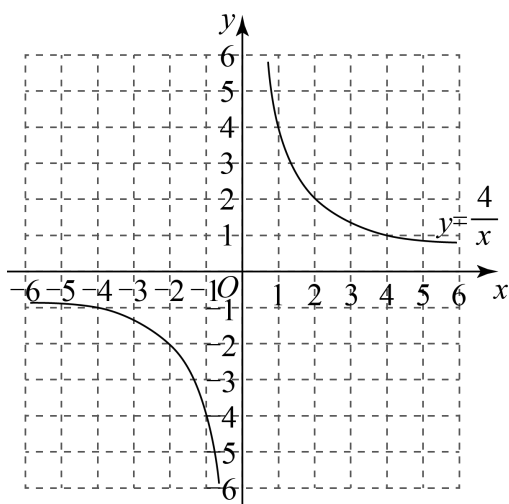
	A	B	C	D	E
A		(A, B)	(A, C)	(A, D)	(A, E)
B	(B, A)		(B, C)	(B, D)	(B, E)
C	(C, A)	(C, B)		(C, D)	(C, E)
D	(D, A)	(D, B)	(D, C)		(D, E)
E	(E, A)	(E, B)	(E, C)	(E, D)	

共有 20 种等可能的结果，其中所选的学生恰好是一名男生和一名女生的结果有 12 种，

$$\therefore P = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

【点睛】 本题考查扇形图与条形图的综合应用，以及利用列表法求概率．从统计图中有效的获取信息，利用频数除以百分比求出总数，熟练掌握列表法求概率，是解题的关键．

21. 如图，一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于 $A(m, 1), B(-2, n)$ 两点．



- (1) 求一次函数的表达式，并在所给的平面直角坐标系中画出这个一次函数的图象；
- (2) 观察图象，直接写出不等式 $kx + b < \frac{4}{x}$ 的解集；
- (3) 设直线 AB 与 x 轴交于点 C ，若 $P(0, a)$ 为 y 轴上的一动点，连接 AP, CP ，当 $\triangle APC$ 的面积为 $\frac{5}{2}$ 时，求点 P 的坐标。

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x - 1$ ，图见解析

(2) $x < -2$ 或 $0 < x < 4$

(3) $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$ 或 $P\left(0, -\frac{7}{2}\right)$

【解析】

【分析】(1) 先根据反比例函数的解析式，求出 A, B 的坐标，待定系数法，求出一一次函数的解析式即可，连接 AB ，画出一一次函数的图象即可；

(2) 图象法求出不等式的解集即可；

(3) 分点 P 在 y 轴的正半轴和负半轴，两种情况进行讨论求解。

【小问 1 详解】

解： $\because$ 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与反比例函数 $y = \frac{4}{x}$ 的图象交于 $A(m, 1), B(-2, n)$ 两点，

$$\therefore m = -2n = 4,$$

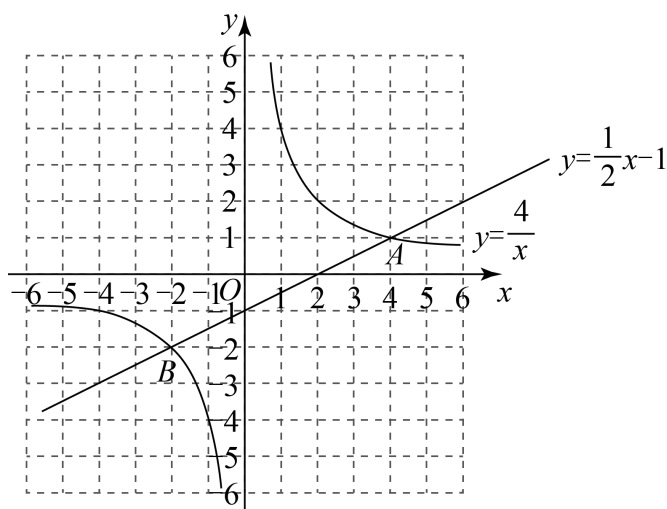
$$\therefore m = 4, n = -2,$$

$$\therefore A(4, 1), B(-2, -2),$$

$$\therefore \begin{cases} 4k+b=1 \\ -2k+b=-2 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 1,$$

图象如图所示:

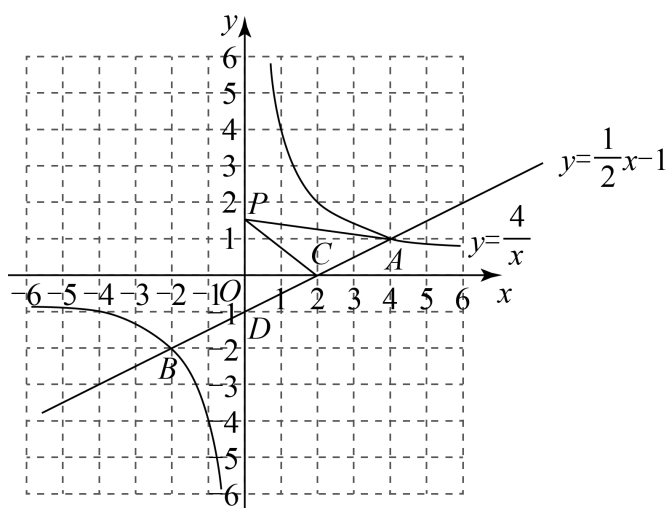


【小问 2 详解】

解: 由图象可知: 不等式 $kx+b < \frac{4}{x}$ 的解集为 $x < -2$ 或 $0 < x < 4$;

【小问 3 详解】

解: 当点 P 在 y 轴正半轴上时:



设直线 AB 与 y 轴交于点 D ,

$$\therefore y = \frac{1}{2}x - 1,$$

当 $x=0$ 时, $y=-1$, 当 $y=0$ 时, $x=2$,

$$\therefore C(2, 0), D(0, -1),$$

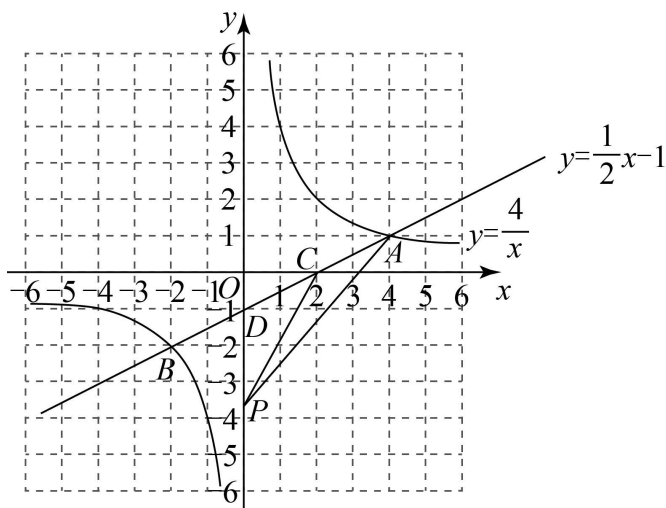
$$\therefore PD = a + 1,$$

$$\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle APD} - S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times (a+1) \times 4 - \frac{1}{2} \times (a+1) \times 2 = \frac{5}{2},$$

$$\text{解得: } a = \frac{3}{2};$$

$$\therefore P\left(0, \frac{3}{2}\right);$$

当点 P 在 y 轴负半轴上时:



$$PD = |-1 - a|,$$

$$\therefore S_{\triangle APC} = S_{\triangle APD} - S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} \times |-1 - a| \times 4 - \frac{1}{2} \times |-1 - a| \times 2 = \frac{5}{2}$$

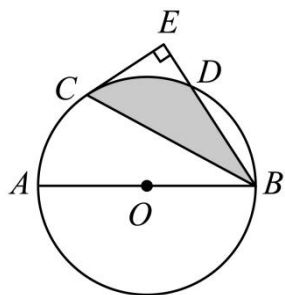
$$\text{解得: } a = -\frac{7}{2} \text{ 或 } a = \frac{3}{2} \text{ (不合题意, 舍去);}$$

$$\therefore P\left(0, -\frac{7}{2}\right).$$

$$\text{综上: } P\left(0, \frac{3}{2}\right) \text{ 或 } P\left(0, -\frac{7}{2}\right).$$

【点睛】 本题考查一次函数与反比例函数的综合应用. 正确的求出函数解析式, 利用数形结合和分类讨论的思想进行求解, 是解题的关键.

22. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 是 $\widehat{AD}$ 的中点, 过点 C 做射线 BD 的垂线, 垂足为 E .



- (1) 求证: CE 是 $\odot O$ 切线;
- (2) 若 $BE = 3$, $AB = 4$, 求 BC 的长;
- (3) 在 (2) 的条件下, 求阴影部分的面积 (用含有 π 的式子表示).

【答案】(1) 见解析;

(2) $BC = 2\sqrt{3}$;

(3) $\frac{2}{3}\pi$

【解析】

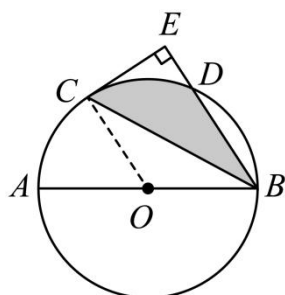
【分析】(1) 连接 OC , 证明 $OC \parallel BE$, 即可得到结论;

(2) 连接 AC , 证明 $\triangle ACB \sim \triangle CEB$, 从而可得 $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BE}$, 再代入求值即可;

(2) 连接 OD , CD , 证明 $CD \parallel AB$, 从而可得 $S_{\triangle COD} = S_{\triangle CBD}$, 求出扇形 COD 的面积即可得到阴影部分的面积.

【小问 1 详解】

证明: 连接 OC ,



$\because$ 点 C 是 $\widehat{AD}$ 的中点,,

$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{DC},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EBC,$$

$$\because OC = OB,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle OCB,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle OCB,$$

$$\therefore OC \parallel BE,$$

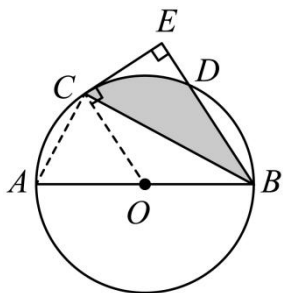
$$\therefore BE \perp CE,$$

$$\therefore \text{半径 } OC \perp CE,$$

$$\therefore CE \text{ 是 } \odot O \text{ 切线};$$

【小问 2 详解】

连接 AC ,



$$\therefore AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle EBC,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle CEB,$$

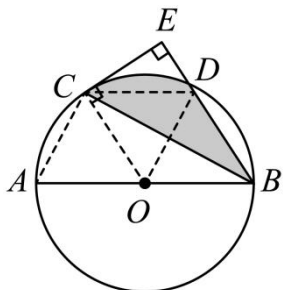
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BE},$$

$$\therefore \frac{4}{BC} = \frac{BC}{3},$$

$$\therefore BC = 2\sqrt{3};$$

【小问 3 详解】

连接 OD , CD ,



$$\therefore AB = 4,$$

$$\therefore OC = OB = 2,$$

$$\therefore \text{在 } Rt\triangle BCE \text{ 中, } BC = 2\sqrt{3}, BE = 3,$$

$$\therefore \cos \angle CBE = \frac{BE}{BC} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle CBE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle COD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 60^\circ,$$

$$\therefore OC = OD,$$

$\therefore \triangle COD$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle CDO = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle CDO = \angle AOC,$$

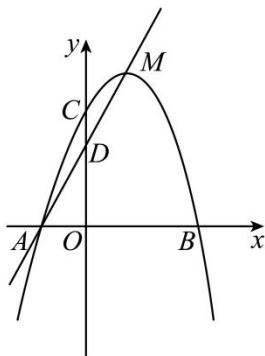
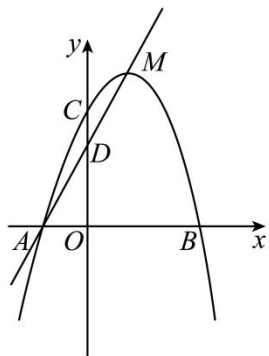
$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore S_{\triangle COD} = S_{\triangle CBD},$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\text{扇形} COD} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi,$$

【点睛】 本题主要考查了相似三角形的性质及判定、切线的判定以及扇形面积的求法，熟练掌握切线的判定定理以及扇形面积的求法是解答此题的关键.

23. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$, $C(0, 3)$ 两点，并交 x 轴于另一点 B ，点 M 是抛物线的顶点，直线 AM 与轴交于点 D .



备用图

- (1) 求该抛物线的表达式;
- (2) 若点 H 是 x 轴上一动点，分别连接 MH , DH ，求 $MH + DH$ 的最小值;
- (3) 若点 P 是抛物线上一动点，问在对称轴上是否存在点 Q ，使得以 D , M , P , Q 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请直接写出所有满足条件的点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$

(2) $\sqrt{37}$

(3) 存在, $Q(1,3)$ 或 $Q(1,1)$ 或 $Q(1,5)$

【解析】

【分析】(1) 待定系数法求出函数解析式即可;

(2) 作点 D 关于 x 轴的对称点 D' , 连接 $D'M$, $D'M$ 与 x 轴的交点即为点 H , 进而得到 $MH + DH$ 的最小值为 $D'M$ 的长, 利用两点间距离公式进行求解即可;

(3) 分 DM , DP , MP 分别为对角线, 三种情况进行讨论求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过 $A(-1,0), C(0,3)$ 两点,

$$\therefore \begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ c = 3 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3;$$

【小问 2 详解】

$$\therefore y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$$\therefore M(1,4),$$

设直线 $AM: y = kx + m (k \neq 0)$,

$$\text{则: } \begin{cases} -k + m = 0 \\ k + m = 4 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 2 \\ m = 2 \end{cases},$$

$$\therefore AM: y = 2x + 2,$$

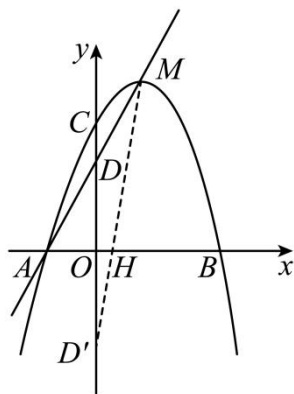
当 $x = 0$ 时, $y = 2$,

$$\therefore D(0,2);$$

作点 D 关于 x 轴的对称点 D' , 连接 $D'M$,

则: $D'(0,-2)$, $MH + DH = MH + D'H \geq D'M$,

$\therefore$ 当 M, H, D' 三点共线时, $MH + DH$ 有最小值为 $D'M$ 的长,



$$\therefore D'(0, -2), M(1, 4),$$

$$\therefore D'M = \sqrt{1^2 + (4+2)^2} = \sqrt{37},$$

即: $MH + DH$ 的最小值为: $\sqrt{37}$;

【小问 3 详解】

解: 存在;

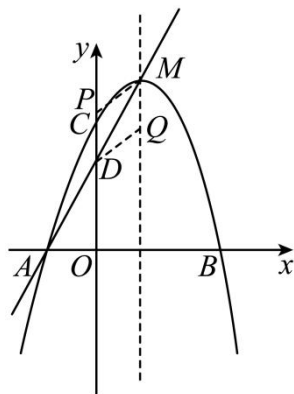
$$\because y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4,$$

$\therefore$ 对称轴为直线 $x = 1$,

设 $P(p, t)$, $Q(1, n)$,

当以 D, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形时:

$$\textcircled{1} DM \text{ 为对角线时: } \begin{cases} 1+p=0+1 \\ t+n=4+2 \end{cases},$$



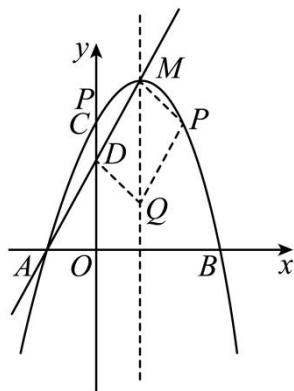
$$\therefore \begin{cases} p=0 \\ t+n=6 \end{cases},$$

当 $p=0$ 时, $t=3$,

$$\therefore n=3,$$

$$\therefore Q(1,3);$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } DP \text{ 为对角线时: } \begin{cases} 0+p=1+1 \\ 2+t=4+n \end{cases},$$



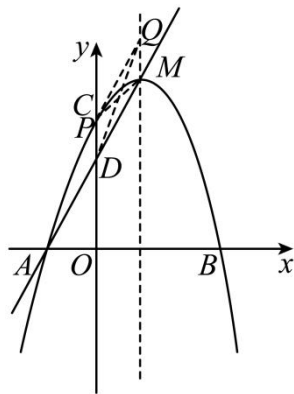
$$\therefore \begin{cases} p=2 \\ 2+t=4+n \end{cases},$$

$$\text{当 } p=2 \text{ 时, } t=-2^2+2\times 2+3=3,$$

$$\therefore n=1,$$

$$\therefore Q(1,1);$$

$$\textcircled{3} \text{ 当 } MP \text{ 为对角线时: } \begin{cases} 1+p=0+1 \\ 4+t=2+n \end{cases},$$



$$\therefore \begin{cases} p=0 \\ n-t=2 \end{cases},$$

$$\text{当 } p=0 \text{ 时, } t=3,$$

$$\therefore n=3,$$

$$\therefore Q(1,5);$$

综上：当以 D, M, P, Q 为顶点的四边形是平行四边形时， $Q(1,3)$ 或 $Q(1,1)$ 或 $Q(1,5)$ 。

【点睛】本题考查二次函数的综合应用，是中考常见的压轴题。正确的求出函数解析式，熟练掌握二次函数的性质，利用数形结合和分类讨论的思想进行求解，是解题的关键。

24. 问题情境：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 17$ ， $BC = 30$ ， AD 是 BC 边上的中线。如图 2，将 $\triangle ABC$ 的两个顶点 B, C 分别沿 EF, GH 折叠后均与点 D 重合，折痕分别交 AB, AC, BC 于点 E, G, F, H 。

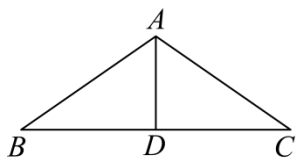


图1

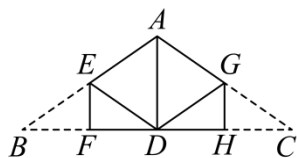


图2

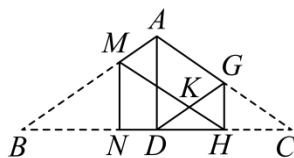


图3

猜想证明：

(1) 如图 2，试判断四边形 $AEDG$ 的形状，并说明理由。

问题解决：

(2) 如图 3，将图 2 中左侧折叠的三角形展开后，重新沿 MN 折叠，使得顶点 B 与点 H 重合，折痕分别交 AB, BC 于点 M, N ， BM 的对应线段交 DG 于点 K ，求四边形 $MKGA$ 的面积。

【答案】(1) 四边形 $AEDG$ 是菱形，理由见解析

(2) 30

【解析】

【分析】(1) 利用等腰三角形的性质和折叠的性质，得到 $AE = DE = DG = AG$ ，即可得出结论。

(2) 先证明四边形 $AMKG$ 为平行四边形，过点 H 作 $HE \perp CG$ 于点 E ，等积法得到 $CG \cdot HE$ 的积，推出四边形 $MKGA$ 的面积 $= CG \cdot HE$ ，即可得解。

【小问 1 详解】

解：四边形 $AEDG$ 是菱形，理由如下：

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线，

$$\therefore AD \perp BC, BD = CD = \frac{1}{2}BC,$$

$\because$ 将 $\triangle ABC$ 的两个顶点 B, C 分别沿 EF, GH 折叠后均与点 D 重合，

$$\therefore EF \perp BC, GH \perp BC, BE = DE, CG = CD, BF = FD = \frac{1}{2}BD, CH = DH = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore EF \parallel AD,$$

$$\therefore \frac{BF}{FD} = \frac{BE}{AE} = 1,$$

$$\therefore BE = AE = \frac{1}{2}AB,$$

$$\text{同法可得: } CG = AG = \frac{1}{2}AC,$$

$$\therefore AE = DE, AG = DG,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore AE = DE = DG = AG,$$

$\therefore$ 四边形 $AEDG$ 是菱形;

【小问 2 详解】

解: $\because$ 折叠,

$$\therefore \angle GDC = \angle C, \angle MHB = \angle B,$$

$$\therefore AB = AC,$$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

$$\therefore \angle GDC = \angle B, \angle MHB = \angle C,$$

$$\therefore MH \parallel AC, DG \parallel AB,$$

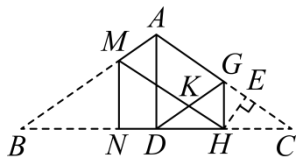
$\therefore$ 四边形 $AMKG$ 为平行四边形,

$$\therefore AB = AC = 17, BC = 30,$$

$$\text{由 (1) 知: } BD = CD = \frac{1}{2}BC = 15, DH = CH = \frac{15}{2}, DG = AG = \frac{1}{2}AB = \frac{17}{2},$$

$$\therefore GH = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{2}\right)^2} = 4,$$

过点 H 作 $HE \perp CG$ 于点 E ,



$$\therefore S_{\triangle CHG} = \frac{1}{2}CH \cdot HG = \frac{1}{2}CG \cdot HE,$$

$$\therefore CG \cdot HE = \frac{15}{2} \times 4 = 30,$$

$$\therefore \text{四边形 } MKGA \text{ 的面积} = AG \cdot HE, \quad AG = CG,$$

$$\therefore \text{四边形 } MKGA \text{ 的面积} = CG \cdot HE = 30.$$

【点睛】 本题考查等腰三角形的性质，折叠的性质，平行线分线段对应成比例，菱形的判定，平行四边形的判定和性质。熟练掌握相关知识点，并灵活运用，是解题的关键。

