

日照市 2023 年初中学业水平考试数学试题

(满分 120 分，时间 120 分钟)

注意事项：

1. 本试题分第 I 卷和第 II 卷两部分，共 6 页。答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座号等填写在答题卡规定的位置上。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。
2. 第 I 卷每小题选出答案后，必须用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，先用橡皮擦干净，再改涂其它答案标号。
3. 第 II 卷必须用 0.5 毫米黑色签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内，在试卷上答题不得分；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案。

第 I 卷 (选择题 36 分)

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将符合题目要求选项的字母代号填涂在答题卡相应位置上。

1. 计算： $2 - (-3)$ 的结果是 ()

- A. 5 B. 1 C. -1 D. -5

【答案】A

【解析】

【分析】把减法化为加法，即可求解。

【详解】解： $2 - (-3) = 2 + 3 = 5$ ，

故选 A.

【点睛】本题主要考查有理数的减法运算，掌握有理数的减法法则是关键。

2. 窗花是贴在窗子或窗户上的剪纸，是中国古老的传统民间艺术之一。下列窗花作品既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【答案】A

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义进行逐一判断即可：如果一个平面图形沿一条直线折叠，

直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心。

【详解】解：A、既是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项符合题意；

B、既不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项不符合题意；

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不符合题意；

故选 A.

【点睛】本题主要考查了轴对称图形和中心对称图形的识别，熟知二者的定义是解题的关键.

3. 芯片内部有数以亿计的晶体管，为追求更高质量的芯片和更低的电力功耗，需要设计 4 积更小的晶体管. 目前，某品牌手机自主研发了最新型号芯片，其晶体管栅极的宽度为 0.000000014 米，将数据 0.000000014 用科学记数法表示为 ()

A. 1.4×10^{-8}

B. 14×10^{-7}

C. 0.14×10^{-6}

D. 1.4×10^{-9}

【答案】A

【解析】

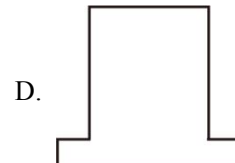
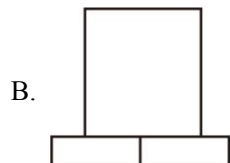
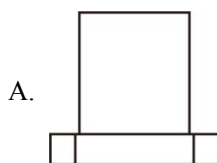
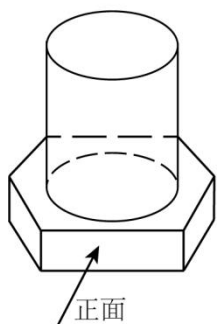
【分析】科学计数法的记数形式为： $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，当数值绝对值大于 1 时， n 是小数点向右移动的位数；当数值绝对值小于 1 时， n 是小数点向左移动的位数的相反数.

【详解】解： $0.000000014 = 1.4 \times 10^{-8}$ ，

故选 A.

【点睛】本题考查科学计数法，掌握科学计数法的记数形式是解题的关键.

4. 如图所示的几何体的俯视图可能是 ()



【答案】C

【解析】

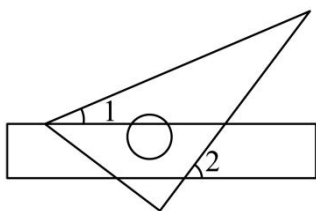
【分析】根据从上边看得到的图形是俯视图，可得答案.

【详解】解：从上边看，是一个六边形和圆形.

故选：C.

【点睛】本题考查了简单组合体的三视图，从上边看得到的图形是俯视图是解题关键.

5. 在数学活动课上，小明同学将含 30° 角的直角三角板的一个顶点按如图方式放置在直尺上，测得 $\angle 1 = 23^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ().

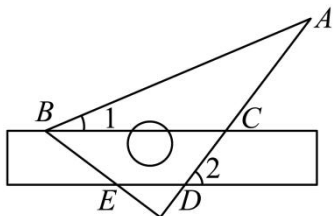
A. 23° B. 53° C. 60° D. 67°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线的性质和三角形的外角性质即可求解.

【详解】解：如图：



$$\because BC \parallel DE,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle BCD,$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } \angle BCD = \angle 1 + \angle A,$$

$$\because \angle A = 30^\circ,$$

$$\text{故 } \angle 2 = \angle BCD = \angle 1 + \angle A = 23^\circ + 30^\circ = 53^\circ,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了平行线的性质，三角形的外角性质，熟练掌握以上性质是解题的关键.

6. 下列计算正确的是 ()

A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$

B. $(-2m^2)^3 = -8m^6$

C. $(x+y)^2 = x^2 + y^2$

D. $2ab + 3a^2b = 5a^3b^2$

【答案】B

【解析】

【分析】根据整式乘法运算法则及加法法则逐一判断即可.

【详解】A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故错误；

B、 $(-2m^2)^3 = -8m^6$ ，故正确；

C、 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ，故错误；

D、 $2ab$ 、 $3a^2b$ 不是同类项，不能合并，故错误；

故选：B.

【点睛】本题考查整式乘法与加法运算法则，熟记基本的运算法则是解题关键.

7. 《九章算术》是中国古代重要的数学著作，其中“盈不足术”记载：今有共买鸡，人出九，盈十一；人出六，不足十六. 问人数鸡价各几何？译文：今有人合伙买鸡，每人出 9 钱，会多出 11 钱；每人出 6 钱，又差 16 钱. 问人数、买鸡的钱数各是多少？设人数为 x ，可列方程为（ ）

A. $9x+11=6x+16$ B. $9x-11=6x-16$ C. $9x+11=6x-16$ D. $9x-11=6x+16$

【答案】D

【解析】

【分析】设人数为 x ，根据每人出 9 钱，会多出 11 钱，可得鸡的价格为 $(9x-11)$ 钱，根据每人出 6 钱，又差 16 钱，可得鸡的价格为 $(6x+16)$ 钱，由此列出方程即可.

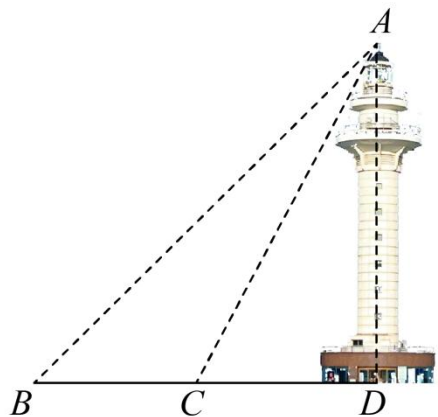
【详解】解：设人数为 x ，

由题意得， $9x-11=6x+16$ ，

故选 D.

【点睛】本题主要考查了从实际问题中抽象出一元一次方程，正确理解题意找到等量关系是解题的关键.

8. 日照灯塔是日照海滨港口城市的标志性建筑之一，主要为日照近海及进出日照港的船舶提供导航服务. 数学小组的同学要测量灯塔的高度，如图所示，在点 B 处测得灯塔最高点 A 的仰角 $\angle ABD = 45^\circ$ ，再沿 BD 方向前进至 C 处测得最高点 A 的仰角 $\angle ACD = 60^\circ$ ， $BC = 15.3\text{m}$ ，则灯塔的高度 AD 大约是（ ）（结果精确到 1m ，参考数据： $\sqrt{2} \approx 1.41$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$ ）



A. 31m

B. 36m

C. 42m

D. 53m

【答案】B

【解析】

【分析】在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中，得出 $AD = BD$ ，设 $AD = x$ ，则 $BD = x$ ， $CD = x - 15.3$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，

根据正切得出 $\tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{x}{x-15.3} = \sqrt{3}$ ，求解即可得出答案.

【详解】解：在 $\text{Rt}\triangle ADB$ 中， $\angle ABD = 45^\circ$ ，

$\therefore AD = BD$ ，

设 $AD = x$ ，则 $BD = x$ ， $CD = x - 15.3$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中， $\angle ACD = 60^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ACD = \frac{AD}{CD} = \frac{x}{x-15.3} = \sqrt{3},$$

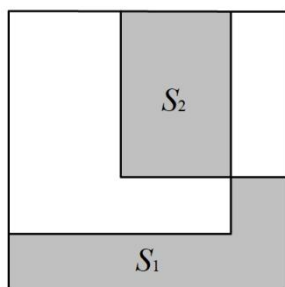
$$\therefore x \approx 36,$$

$\therefore$ 灯塔的高度 AD 大约是 36m.

故选：B.

【点睛】本题考查了解直角三角形中的仰俯角问题，解题的关键是弄清有关的直角三角形中的有关角的度数.

9. 已知直角三角形的三边 a, b, c 满足 $c > a > b$ ，分别以 a, b, c 为边作三个正方形，把两个较小的正方形放置在最大正方形内，如图，设三个正方形无重叠部分的面积为 S_1 ，均重叠部分的面积为 S_2 ，则 ()



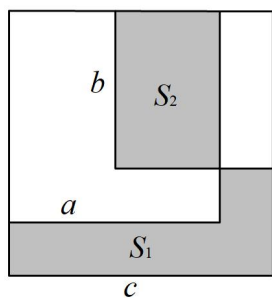
- A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 < S_2$ C. $S_1 = S_2$ D. S_1, S_2 大小无法确定

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，由勾股定理可得 $a^2 + b^2 = c^2$ ，易得 $c^2 - a^2 = b^2$ ，然后用 a, b, c 分别表示 S_1 和 S_2 ，即可获得答案.

【详解】解：如下图，



$\because a, b, c$ 为直角三角形的三边，且 $c > a > b$ 。

$$\therefore a^2 + b^2 = c^2,$$

$$\therefore c^2 - a^2 = b^2,$$

$$\therefore S_1 = (c^2 - a^2) - b(c - a) = b^2 - b(c - a) = b(a + b - c),$$

$$S_2 = b[b - (c - a)] = b(a + b - c),$$

$$\therefore S_1 = S_2.$$

故选：C.

【点睛】本题主要考查了勾股定理以及整式运算，结合题意正确表示出 S_1 和 S_2 是解题关键.

10. 若关于 x 的方程 $\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{3m}{2x-2}$ 解为正数，则 m 的取值范围是（ ）

- A. $m > -\frac{2}{3}$ B. $m < \frac{4}{3}$ C. $m > -\frac{2}{3}$ 且 $m \neq 0$ D. $m < \frac{4}{3}$ 且 $m \neq \frac{2}{3}$

【答案】D

【解析】

【分析】将分式方程化为整式方程解得 $x = \frac{4-3m}{2}$ ，根据方程的解是正数，可得 $\frac{4-3m}{2} > 0$ ，即可求出 m 的取值范围.

【详解】解： $\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{3m}{2x-2}$

$$2x - 2 \times 2(x-1) = 3m$$

$$2x - 4x + 4 = 3m$$

$$-2x = 3m - 4$$

$$x = \frac{4-3m}{2}$$

$\therefore$ 方程 $\frac{x}{x-1} - 2 = \frac{3m}{2x-2}$ 的解为正数，且分母不等于 0

$$\therefore \frac{4-3m}{2} > 0, \quad x = \frac{4-3m}{2} \neq 1$$

$$\therefore m < \frac{4}{3}, \quad \text{且 } m \neq \frac{2}{3}$$

故选：D.

【点睛】此题考查了解分式方程，根据分式方程的解的情况求参数，解不等式，将方程化为整式方程求出整式方程的解，列出不等式是解答此类问题的关键.

11. 在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx (a \neq 0)$ ，满足 $\begin{cases} 3a + b > 0 \\ a + b < 0 \end{cases}$ ，已知点 $(-3, m)$ ， $(2, n)$ ，

$(4, t)$ 在该抛物线上，则 m, n, t 的大小关系为 ()

A. $t < n < m$

B. $m < t < n$

C. $n < t < m$

D. $n < m < t$

【答案】C

【解析】

【分析】利用解不等式组可得 $-3a < b < -a$ 且 $a > 0$ ，即可判断二次函数的对称轴位置，再利用函数的增减性判断即可解题.

【详解】解不等式组可得： $-3a < b < -a$ ，且 $a > 0$

所以对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$ 的取值范围在 $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ ，

由对称轴位置可知到对称轴的距离最近的是 $(2, n)$ ，其次是 $(4, t)$ ，最远的是 $(-3, m)$ ，

即根据增减性可得 $n < t < m$,

故选 C.

【点睛】 本题考查二次函数的图像和性质, 求不等组的解集, 掌握二次函数的图像和性质是解题的关键.

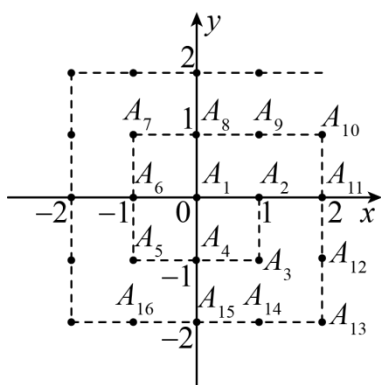
12. 数学家高斯推动了数学科学的发展, 被数学界誉为“数学王子”, 据传, 他在计算 $1+2+3+4+\cdots+100$

时, 用到了一种方法, 将首尾两个数相加, 进而得到 $1+2+3+4+\cdots+100 = \frac{100 \times (1+100)}{2}$. 人们借助于

这样的方法, 得到 $1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(1+n)}{2}$ (n 是正整数). 有下列问题, 如图, 在平面直角坐标系

中的一系列格点 $A_i(x_i, y_i)$, 其中 $i=1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$, 且 x_i, y_i 是整数. 记 $a_n = x_n + y_n$, 如 $A_1(0, 0)$, 即

$a_1 = 0, A_2(1, 0)$, 即 $a_2 = 1, A_3(1, -1)$, 即 $a_3 = 0, \cdots$, 以此类推. 则下列结论正确的是 ()



A. $a_{2023} = 40$

B. $a_{2024} = 43$

C. $a_{(2n-1)^2} = 2n - 6$

D. $a_{(2n-1)^2} = 2n - 4$

【答案】 B

【解析】

【分析】 利用图形寻找规律 $A_{2n-1}(n-1, n-1)$, 再利用规律解题即可.

【详解】 解: 第 1 圈有 1 个点, 即 $A_1(0, 0)$, 这时 $a_1 = 0$;

第 2 圈有 8 个点, 即 A_2 到 $A_9(1, 1)$;

第 3 圈有 16 个点, 即 A_{10} 到 $A_{25}(2, 2)$;

依次类推, 第 n 圈, $A_{2n-1}(n-1, n-1)$;

由规律可知: A_{2023} 是在第 23 圈上, 且 $A_{2025}(22, 22)$, 则 $A_{2023}(20, 22)$ 即 $a_{2023} = 20 + 22 = 42$, 故 A 选项不正确;

A_{2024} 是在第 23 圈上, 且 $A_{2024}(21, 22)$, 即 $a_{2024} = 21 + 22 = 43$, 故 B 选项正确;

第 n 圈, $A_{2n-1}(n-1, n-1)$, 所以 $a_{2n-1} = 2n-2$, 故 C、D 选项不正确;

故选 B.

【点睛】 本题考查图形与规律, 利用所给的图形找到规律是解题的关键.

第 II 卷 (非选择题 84 分)

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分. 不需写出解答过程, 请将答案直接写在答题卡相应位置上.

13. 分解因式: $a^3b - ab =$ _____.

【答案】 $ab(a-1)(a+1)$

【解析】

【分析】 根据提取公因式法和平方差公式, 即可分解因式.

【详解】 $a^3b - ab = ab(a^2 - 1) = ab(a+1)(a-1)$,

故答案是: $ab(a+1)(a-1)$.

【点睛】 本题主要考查提取公因式法和平方差公式, 掌握平方差公式, 是解题的关键.

14. 若点 $M(m+3, m-1)$ 在第四象限, 则 m 的取值范围是_____.

【答案】 $-3 < m < 1$

【解析】

【分析】 根据第四象限的点横坐标为正, 纵坐标为负进行求解即可.

【详解】 解: $\because$ 点 $M(m+3, m-1)$ 在第四象限,

$$\therefore \begin{cases} m+3 > 0 \\ m-1 < 0 \end{cases},$$

解得 $-3 < m < 1$,

故答案为: $-3 < m < 1$.

【点睛】 本题主要考查了根据点所在的象限求参数, 解一元一次不等式组, 熟知第四象限内点的符号特点是解题的关键.

15. 已知反比例函数 $y = \frac{6-3k}{x}$ ($k > 1$ 且 $k \neq 2$) 的图象与一次函数 $y = -7x + b$ 的图象共有两个交点, 且

两交点横坐标的乘积 $x_1 \cdot x_2 > 0$, 请写出一个满足条件的 k 值_____.

【答案】 1.5 (满足 $1 < k < 2$ 都可以)

【解析】

【分析】先判断出一次函数 $y = -7x + b$ 的图象必定经过第二、四象限，再根据 $x_1 \cdot x_2 > 0$ 判断出反比例函数图象和一次函数图象的两个交点在同一象限，从而可以得到反比例函数的图象经过第二、四象限，即 $6 - 3k < 0$ ，最终选取一个满足条件的值即可。

【详解】解： $\because -7 < 0$,

$\therefore$ 一次函数 $y = -7x + b$ 的图象必定经过第二、四象限，

$\because x_1 \cdot x_2 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数图象和一次函数图象的两个交点在同一象限，

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{6-3k}{x}$ ($k > 1$ 且 $k \neq 2$) 的函数图象经过第一、三象限，

$\therefore 6 - 3k > 0$,

$\therefore k < 2$,

$\therefore k > 1$,

$\therefore 1 < k < 2$,

$\therefore$ 满足条件的 k 值可以为 1.5，

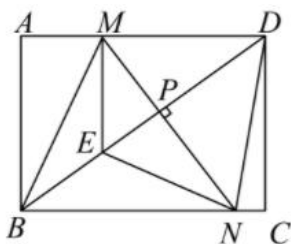
故答案为：1.5 (满足 $1 < k < 2$ 都可以)。

【点睛】本题考查一次函数和反比例函数的图形性质，解题的关键是根据 $x_1 \cdot x_2 > 0$ 判断出反比例函数图象和一次函数图象的两个交点在同一象限。

16. 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $AD = 8$ ，点 P 在对角线 BD 上，过点 P 作 $MN \perp BD$ ，交边 AD ， BC 于点 M ， N ，过点 M 作 $ME \perp AD$ 交 BD 于点 E ，连接 EN ， BM ， DN 。下列结论：① $EM = EN$ ；②四

边形 $MBND$ 的面积不变；③当 $AM : MD = 1 : 2$ 时， $S_{\triangle MPE} = \frac{96}{25}$ ；④ $BM + MN + ND$ 的最小值是 20。其

中所有正确结论的序号是_____。



【答案】②③④

【解析】

【分析】根据等腰三角形的三线合一可知 $MP = PN$ ，可以判断①；利用相似和勾股定理可以得出 $BD = 10$ ，

$MN = \frac{15}{2}$ ，利用 $S_{\text{四边形}MBND} = \frac{1}{2}MN \times BD$ 判断②；根据相似可以得到 $\frac{S_{\triangle MPE}}{S_{\triangle DAB}} = \left(\frac{ME}{BD}\right)^2$ ，判断③；利用

将军饮马问题求出最小值判断④。

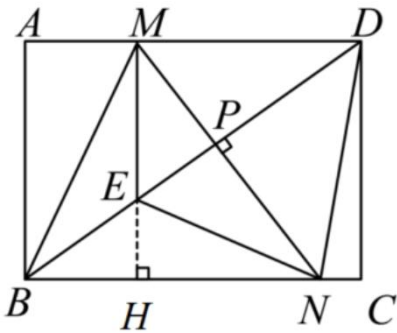
【详解】解： $\because EM = EN$ ， $MN \perp BD$ ，

$\therefore MP = PN$ ，

在点 P 移动过程中，不一定 $MP = PN$ ，

相矛盾，

故①不正确；



延长 ME 交 BC 于点 H ，

则 $ABHM$ 为矩形，

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$\therefore ME \perp AD, \quad MN \perp BD,$$

$$\therefore \angle MED + \angle MDE = \angle MEP + \angle EMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDE = \angle EMN,$$

$$\therefore \triangle MHN \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{MH}{AD} = \frac{HN}{AB} = \frac{MN}{BD},$$

$$\text{即 } \frac{6}{8} = \frac{HN}{6} = \frac{MN}{10},$$

$$\text{解得: } HN = \frac{9}{2}, \quad MN = \frac{15}{2},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}MBND} = S_{\triangle BMN} + S_{\triangle DMN} = \frac{1}{2}MN \times BP + \frac{1}{2}MN \times DP = \frac{1}{2}MN \times BD = \frac{1}{2} \times \frac{15}{2} \times 10 = \frac{75}{2}$$

故②正确；

$$\therefore ME \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DME \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{ME}{AB} = \frac{MD}{AD} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore ME = 4,$$

$$\therefore \angle MDE = \angle EMN, \quad \angle MPE = \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle MPE \sim \triangle DAB,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle MPE}}{S_{\triangle DAB}} = \left(\frac{ME}{BD}\right)^2 = \frac{4}{25},$$

$$\therefore S_{\triangle MPE} = \frac{4}{25} S_{\triangle DAB} = \frac{4}{25} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{96}{25},$$

故③正确,

$$BM + MN + ND = BM + ND + \frac{15}{2},$$

即当 $MB + ND$ 最小时, $BM + MN + ND$ 的最小值, 作 B 、 D 关于 AD 、 BC 的对称点 B_1 、 D_1 ,

把图1中的 CD_1 向上平移到图2位置, 使得 $CD = \frac{9}{2}$, 连接 B_1D_1 , 即 B_1D_1 为 $MB + ND$ 的最小值, 则

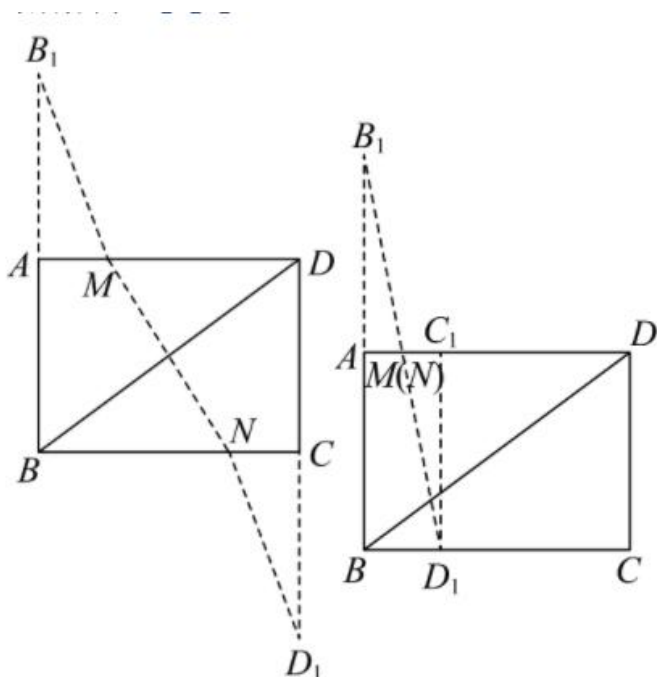
$$AC = BD_1 = \frac{7}{2}, \quad BB_1 = 12,$$

$$\text{这时 } B_1D_1 = \sqrt{BD_1^2 + BB_1^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + 12^2} = \frac{25}{2},$$

即 $BM + MN + ND$ 的最小值是 20,

故④正确;

故答案为: ②③④



【点睛】本题考查矩形的性质，

相似三角形的判定和性质，轴对称，掌握相似三角形的判定和性质是解题的关键。

三、解答题：本题共 6 个小题，满分 72 分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (1) 化简： $\sqrt{8} - |1 - \sqrt{2}| + 2^{-2} - 2 \times \sin 45^\circ$;

(2) 先化简，再求值： $\left(\frac{x^2-2}{x-2} - x\right) \div \frac{x-1}{x^2-4x+4}$ ，其中 $x = -\frac{1}{2}$ 。

【答案】(1) $\frac{5}{4}$; (2) $2(x-2)$, -5

【解析】

【分析】(1) 根据平方根，绝对值，负整数指数幂，特殊角的三角函数，实数的混合运算法则进行计算即可；

(2) 根据分式的性质进行化简，再将 $x = -\frac{1}{2}$ 代入求解即可。

【详解】(1) 解： $\sqrt{8} - |1 - \sqrt{2}| + 2^{-2} - 2 \times \sin 45^\circ$

$$= 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{4} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 解: } & \left(\frac{x^2-2}{x-2} - x \right) \div \frac{x-1}{x^2-4x+4} \\
 &= \left(\frac{x^2-2}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2} \right) \div \frac{x-1}{(x-2)^2} \\
 &= \left(\frac{x^2-2}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2} \right) \div \frac{x-1}{(x-2)^2} \\
 &= \frac{x^2-2-x^2+2x}{x-2} \times \frac{(x-2)^2}{x-1} \\
 &= \frac{2(x-1)}{x-2} \times \frac{(x-2)^2}{x-1} \\
 &= 2(x-2)
 \end{aligned}$$

将 $x = -\frac{1}{2}$ 代入可得，原式 $= 2 \times \left(-\frac{1}{2} - 2 \right) = -1 - 4 = -5$ 。

【点睛】本题考查了平方根，绝对值，负整数指数幂，特殊角的三角函数，实数的混合运算法则，分式的化简求值等，熟练掌握以上运算法则是解题的关键。

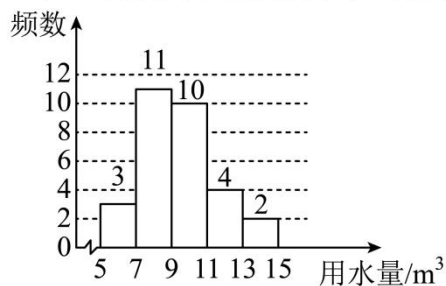
18. 2023年3月22日至28日是第三十届“中国水周”，某学校组织开展主题为“节约用水，共护母亲河”的社会实践活动。A小组在甲、乙两个小区各随机抽取30户居民，统计其3月份用水量，分别将两个小区居民的用水量 $x(\text{m}^3)$ 分为5组，第一组： $5 \leq x < 7$ ，第二组： $7 \leq x < 9$ ，第三组： $9 \leq x < 11$ ，第四组：

$11 \leq x < 13$ ，第五组： $13 \leq x < 15$ ，并对数据进行整理、描述和分析，得到如下信息：

信息一：

甲小区3月份用水量频数分布表	
用水量 (x/m)	频数 (户)
$5 \leq x < 7$	4
$7 \leq x < 9$	9
$9 \leq x < 11$	10
$11 \leq x < 13$	5
$13 \leq x < 15$	2

乙小区3月份用水量频数分布直方图



信息二：甲、乙两小区3月份用水量数据的平均数和中位数如下：

	甲小区	乙小区
平均数	9.0	9.1
中位数	9.2	a

信息三：乙小区3月份用水量在第三组的数据为：9，9.2，9.4，9.5，9.6，9.7，10，10.3，10.4，10.6.

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) $a =$ _____；
- (2) 在甲小区抽取的用户中，3月份用水量低于本小区平均用水量的户数所占百分比为 b_1 ，在乙小区抽取的用户中，3月份用水量低于本小区平均用水量的户数所占百分比为 b_2 ，比较 b_1 ， b_2 大小，并说明理由；
- (3) 若甲小区共有 600 户居民，乙小区共有 750 户居民，估计两个小区3月份用水量不低于 13m^3 的总户数；
- (4) 因任务安排，需在 B 小组和 C 小组分别随机抽取 1 名同学加入 A 小组，已知 B 小组有 3 名男生和 1 名女生，C 小组有 2 名男生和 2 名女生，请用列表或画树状图的方法，求抽取的两名同学都是男生的概率.

【答案】 (1) 9.1

(2) $b_2 > b_1$ ，理由见解析

(3) 甲小区有 40 户，乙小区有 50 户

(4) $\frac{3}{8}$

【解析】

【分析】 (1) 根据中位数的定义进行计算即可；

(2) 根据题意分别求出3月份用水量低于平均数的户数，再计算进行比较即可；

(3) 用总户数乘以不低于 13m^3 所占的比例即可求解；

(4) 画树状图，共有 16 种等可能的结果，其中抽取的两名同学都是男生的结果有 8 种，再由概率公式求

解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 随机抽取了 30 户居民,

故中位数是数据从小到大排列的第 15 个和第 16 个的平均数;

根据条形统计图可知: 用水量在 $5 \leq x < 7$ 的有 3 户, 用水量在 $7 \leq x < 9$ 的有 11 户, 用水量在 $9 \leq x < 11$ 的有 10 户, 用水量在 $11 \leq x < 13$ 的有 4 户, 用水量在 $13 \leq x < 15$ 的有 2 户, 故中位数是在第三组中, 且是第三组中第 1 个和第 2 个的平均数,

$\therefore$ 乙小区 3 月份用水量在第三组的数据为: 9, 9.2, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 10, 10.3, 10.4, 10.6.

$\therefore$ 乙小区 3 月份用水量的中位数是 $\frac{9+9.2}{2} = 9.1$;

故答案为: 9.1.

【小问 2 详解】

解: 在甲小区抽取的用户中, 3 月份用水量的平均数为: 9.0;

低于本小区平均用水量的户数为 $4+9=13$ (户),

故在甲小区抽取的用户中, 3 月份用水量低于本小区平均用水量的户数所占百分比为 $\frac{13}{30} \approx 43.3\%$, 即

$$b_1 = 43.3\%;$$

在乙小区抽取的用户中, 3 月份用水量的平均数为: 9.1;

低于本小区平均用水量的户数为 $3+11+1=15$ (户),

故在乙小区抽取的用户中, 3 月份用水量低于本小区平均用水量的户数所占百分比为 $\frac{15}{30} = 50\%$, 即

$$b_2 = 50\%;$$

$\therefore 50\% > 43.3\%$,

故 $b_2 > b_1$.

【小问 3 详解】

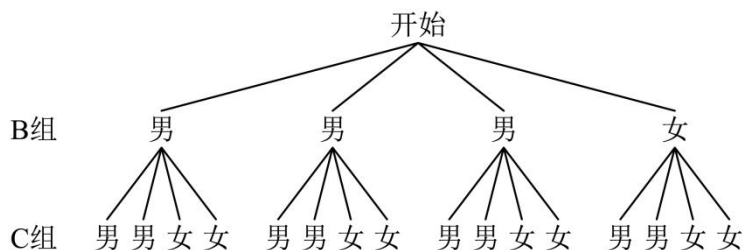
解: 甲小区 3 月份用水量不低于 13m^3 的总户数为 $600 \times \frac{2}{30} = 40$ (户),

乙小区 3 月份用水量不低于 13m^3 的总户数为 $750 \times \frac{2}{30} = 50$ (户),

即甲小区 3 月份用水量不低于 13m^3 的总户数有 40 户, 乙小区 3 月份用水量不低于 13m^3 的总户数有 50 户.

【小问 4 详解】

解: 画树状图如图:

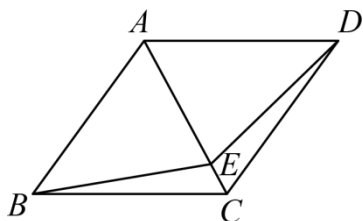


共有 16 种等可能的结果，其中抽取的两名同学都是男生的结果有 6 种，

$\therefore$ 抽取的两名同学都是男生的概率为 $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

【点睛】 本题考查了用树状图法求概率，中位数，条形统计图，用样本估计总体等，树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

19. 如图，平行四边形 $ABCD$ 中，点 E 是对角线 AC 上一点，连接 BE , DE ，且 $BE = DE$.



- (1) 求证：四边形 $ABCD$ 是菱形；
- (2) 若 $AB = 10, \tan \angle BAC = 2$ ，求四边形 $ABCD$ 的面积.

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 80

【解析】

【分析】 (1) 如图所示，连接 BD 与 AC 交于 O ，先由平行四边形对角线互相平分得到 $OB = OD$ ，再利用 SSS 证明 $\triangle BOE \cong \triangle DOE$ 得到 $\angle EOB = \angle EOD$ ，进而证明 $\triangle BOC \cong \triangle DOC$ ，得到 $BC = DC$ ，由此即可证明平行四边形 $ABCD$ 是菱形；

(2) 先由菱形的性质得到 $AC \perp BD$ ， $AC = 2OA$ ， $BD = 2OB$ ，再解 $\text{Rt}\triangle AOB$ ，得到 $OB = 2OA$ ，利用勾股定理求出 $OA = 2\sqrt{5}$ ，则 $AC = 4\sqrt{5}$ ， $BD = 8\sqrt{5}$ ，则 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 80$.

【小问 1 详解】

证明：如图所示，连接 BD 与 AC 交于 O ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OB = OD$ ，

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle DOE$ 中，

$$\begin{cases} OB = OD \\ OE = OE, \\ BE = DE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOE (\text{SSS}),$$

$$\therefore \angle EOB = \angle EOD,$$

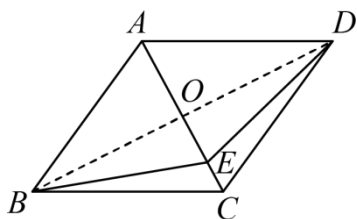
在 $\triangle BOC$ 和 $\triangle DOC$ 中,

$$\begin{cases} OB = OD \\ \angle BOC = \angle DOC, \\ OC = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BOC \cong \triangle DOC (\text{SAS}),$$

$$\therefore BC = DC,$$

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形;



【小问 2 详解】

解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AC \perp BD, AC = 2OA, BD = 2OB,$$

$$\text{在 Rt} \triangle AOB \text{ 中, } \tan \angle BAO = \tan \angle BAC = \frac{OB}{OA} = 2,$$

$$\therefore OB = 2OA,$$

$$\therefore OB^2 + OA^2 = AB^2,$$

$$\therefore 4OA^2 + OA^2 = 10^2,$$

$$\therefore OA = 2\sqrt{5} \text{ (负值舍去)},$$

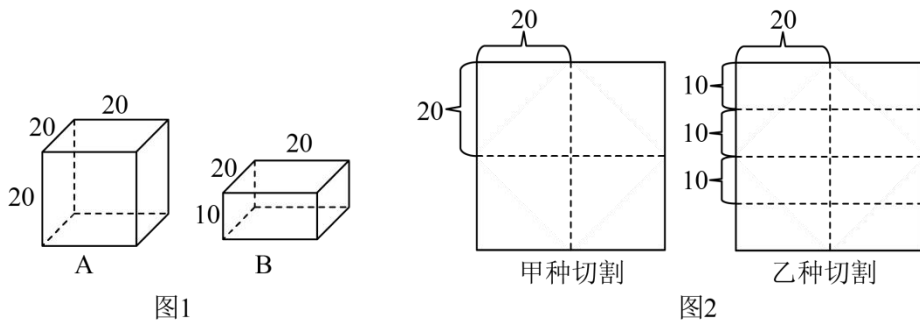
$$\therefore AC = OB = 2OA = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore BD = 2OB = 8\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{5} \times 4\sqrt{5} = 80.$$

【点睛】 本题主要考查了菱形的性质与判定, 平行四边形的性质, 解直角三角形, 全等三角形的性质与判定, 勾股定理等等, 灵活运用所学知识是解题的关键.

20. 要制作 200 个 A , B 两种规格的顶部无盖木盒, A 种规格是长、宽、高都为 20cm 的正方体无盖木盒, B 种规格是长、宽、高各为 20cm, 20cm, 10cm 的长方体无盖木盒, 如图 1. 现有 200 张规格为 $40\text{cm} \times 40\text{cm}$ 的木板材, 对该种木板材有甲、乙两种切割方式, 如图 2. 切割、拼接等板材损耗忽略不计.



- (1) 设制作 A 种木盒 x 个, 则制作 B 种木盒_____个; 若使用甲种方式切割的木板材 y 张, 则使用乙种方式切割的木板材_____张;
- (2) 该 200 张木板材恰好能做成 200 个 A 和 B 两种规格的无盖木盒, 请分别求出 A , B 木盒的个数和使用甲、乙两种方式切割的木板材张数;
- (3) 包括材质等成本在内, 用甲种切割方式的木板材每张成本 5 元, 用乙种切割方式的木板材每张成本 8 元. 根据市场调研, A 种木盒的销售单价定为 a 元, B 种木盒的销售单价定为 $\left(20 - \frac{1}{2}a\right)$ 元, 两种木盒的销售单价均不能低于 7 元, 不超过 18 元. 在 (2) 的条件下, 两种木盒的销售单价分别定为多少元时, 这批木盒的销售利润最大, 并求出最大利润.

【答案】(1) $(200-x)$, $(200-y)$

- (2) 制作 A 种木盒 100 个, B 种木盒 100 个; 使用甲种方式切割的木板 150 张, 使用乙种方式切割的木板 50 张
- (3) A 种木盒的销售单价定为 18 元, B 种木盒的销售单价定为 11 元时, 这批木盒的销售利润最大, 最大利润为 1750 元

【解析】

【分析】(1) 根据题意即可求解;

(2) 根据题意可得, 制作一个 A 种木盒需要长、宽均为 20cm 的木板 5 个, 制作一个 B 种木盒需要长、宽均为 20cm 的木板 1 个, 长为 10cm、宽为 20cm 的木板 4 个; 甲种方式可切割长、宽均为 20cm 的木板 4 个, 乙种方式可切割长为 10cm、宽为 20cm 的木板 8 个; 列关系式求解即可;

(3) 先根据 (2) 中数据求得总成本金额, 根据利润=售价-成本列式, 根据一次函数的性质进行求解即可.

【小问 1 详解】

解: $\because$ 要制作 200 个 A , B 两种规格的顶部无盖木盒, 制作 A 种木盒 x 个,

故制作 B 种木盒 $(200-x)$ 个；

$\therefore$ 有 200 张规格为 $40\text{cm} \times 40\text{cm}$ 的木板材，使用甲种方式切割的木板材 y 张，

故使用乙种方式切割的木板材 $(200-y)$ 张；

故答案为： $(200-x)$ ， $(200-y)$ 。

【小问 2 详解】

解：使用甲种方式切割的木板材 y 张，则可切割出 $4y$ 个长、宽均为 20cm 的木板，

使用乙种方式切割的木板材 $(200-y)$ 张，则可切割出 $8(200-y)$ 个长为 10cm 、宽为 20cm 的木板；

设制作 A 种木盒 x 个，则需要长、宽均为 20cm 的木板 $5x$ 个，

制作 B 种木盒 $(200-x)$ 个，则需要长、宽均为 20cm 的木板 $(200-x)$ 个，需要长为 10cm 、宽为 20cm 的木板 $4(200-x)$ 个；

$$\text{故} \begin{cases} 4y = 5x + (200-x) \\ 8(200-y) = 4(200-x) \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 100 \\ y = 150 \end{cases},$$

故制作 A 种木盒 100 个，制作 B 种木盒 100 个，

使用甲种方式切割的木板 150 张，使用乙种方式切割的木板材 50 张，

【小问 3 详解】

解： $\therefore$ 用甲种切割方式的木板材每张成本 5 元，用乙种切割方式的木板材每张成本 8 元，且使用甲种方式切割的木板 150 张，使用乙种方式切割的木板材 50 张，

故总成本为 $150 \times 5 + 8 \times 50 = 1150$ （元）；

$\therefore$ 两种木盒的销售单价均不能低于 7 元，不超过 18 元，

$$\text{即} \begin{cases} 7 \leq a \leq 18 \\ 7 \leq 20 - \frac{1}{2}a \leq 18 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} 7 \leq a \leq 18 \\ 4 \leq a \leq 26 \end{cases},$$

故 a 的取值范围为 $7 \leq a \leq 18$ ；

设利润为 w ，则 $w = 100a + 100\left(20 - \frac{1}{2}a\right) - 1150$ ，

整理得： $w = 850 + 50a$ ，

$\because k = 50 > 0$ ，故 w 随 a 的增大而增大，

故当 $a = 18$ 时， w 有最大值，最大值为 $850 + 50 \times 18 = 1750$ ，

则此时 B 种木盒的销售单价定为 $20 - \frac{1}{2} \times 18 = 11$ (元)，

即 A 种木盒的销售单价定为 18 元， B 种木盒的销售单价定为 11 元时，这批木盒的销售利润最大，最大利润为 1750 元。

【点睛】 本题考查了二元一次方程组的应用，一次函数的应用，一次函数的性质，一元一次不等式组的应用，根据题意找出等量关系进行列式是解题的关键。

21. 在探究“四点共圆的条件”的数学活动课上，小霞小组通过探究得出：在平面内，一组对角互补的四边形的四个顶点共圆。请应用此结论。解决以下问题：

如图 1， $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $\angle BAC = \alpha$ ($60^\circ < \alpha < 180^\circ$)。点 D 是 BC 边上的一动点 (点 D 不与 B ， C 重合)，将线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 α 到线段 AE ，连接 BE 。

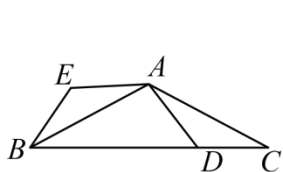


图1

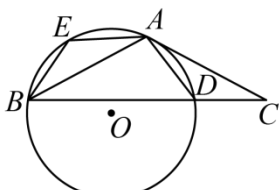
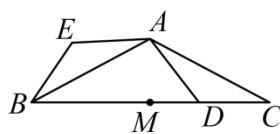


图2



备用图

- (1) 求证： A, E, B, D 四点共圆；
- (2) 如图 2，当 $AD = CD$ 时， $\odot O$ 是四边形 $AEBD$ 的外接圆，求证： AC 是 $\odot O$ 的切线；
- (3) 已知 $\alpha = 120^\circ$ ， $BC = 6$ ，点 M 是边 BC 的中点，此时 $\odot P$ 是四边形 $AEBD$ 的外接圆，直接写出圆心 P 与点 M 距离的最小值。

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析 (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】 (1) 根据旋转的性质得到 $AE = AD$ ， $\angle DAE = \alpha$ ，证明 $\angle BAE = \angle CAD$ ，进而证明 $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ ，可以得到 $\angle AEB = \angle ADC$ ，由 $\angle ADC + \angle ADB = 180^\circ$ ，可得 $\angle AEB + \angle ADB = 180^\circ$ ，即可证明 A, B, D, E 四点共圆；

(2) 如图所示，连接 OA, OD ，根据等边对等角得到 $\angle ABC = \angle ACB = \angle DAC$ ，由圆周角定理得到 $\angle AOD = 2\angle ABC = 2\angle DAC$ ，再由 $OA = OD$ ，得到 $\angle OAD = \angle ODA$ ，利用三角形内角和定理证明 $\angle DAC + \angle OAD = 90^\circ$ ，即 $\angle OAC = 90^\circ$ ，由此即可证明 AC 是 $\odot O$ 的切线；

(3) 如图所示, 作线段 AB 的垂直平分线, 分别交 AB 、 BC 于 G 、 F , 连接 AM , 先求出 $\angle B = \angle C = 30^\circ$, 再由三线合一得到 $BM = CM = \frac{1}{2}BC = 3$, $AM \perp BC$, 解直角三角形求出 $AB = 2\sqrt{3}$, 则

$BG = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, 再解 $\text{Rt}\triangle BGF$ 得到 $BF = 2$, 则 $FM = 1$; 由 $\odot P$ 是四边形 $AEBD$ 的外接圆, 可得点

P 一定在 AB 的垂直平分线上, 故当 $MP \perp GF$ 时, PM 有最小值, 据此求解即可.

【小问 1 详解】

证明: 由旋转的性质可得 $AE = AD$, $\angle DAE = \alpha$,

$$\therefore \angle BAC = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle BAD = \angle DAE - \angle BAD, \text{ 即 } \angle BAE = \angle CAD,$$

又 $\because AB = AC$,

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle AEB = \angle ADC,$$

$$\because \angle ADC + \angle ADB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB + \angle ADB = 180^\circ,$$

$\therefore A$ 、 B 、 D 、 E 四点共圆;

【小问 2 详解】

证明: 如图所示, 连接 OA , OD ,

$$\because AB = AC, AD = CD,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \angle DAC,$$

$\because \odot O$ 是四边形 $AEBD$ 的外接圆,

$$\therefore \angle AOD = 2\angle ABC,$$

$$\therefore \angle AOD = 2\angle ABC = 2\angle DAC,$$

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\because \angle OAD + \angle ODA + \angle AOD = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle DAC + 2\angle OAD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle OAD = 90^\circ, \text{ 即 } \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\therefore OA \perp AC,$$

又 $\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore AC$ 是 $\odot O$ 的切线;

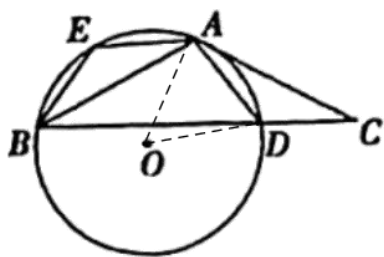


图2

【小问 3 详解】

解: 如图所示, 作线段 AB 的垂直平分线, 分别交 AB 、 BC 于 G 、 F , 连接 AM ,

$$\because AB = AC, \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 30^\circ,$$

$\therefore$ 点 M 是边 BC 的中点,

$$\therefore BM = CM = \frac{1}{2}BC = 3, \quad AM \perp BC,$$

$$\therefore AB = \frac{BM}{\cos B} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BG = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle BGF$ 中, $BF = \frac{BG}{\cos B} = 2$,

$$\therefore FM = 1,$$

$\therefore \odot P$ 是四边形 $AEBD$ 的外接圆,

$\therefore$ 点 P 一定在 AB 的垂直平分线上,

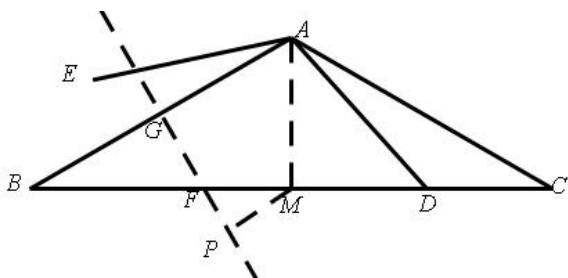
$\therefore$ 点 P 在直线 GF 上,

∴ 当 $MP \perp GF$ 时, PM 有最小值,

$$\therefore \angle PFM = \angle BFG = 90^\circ - \angle B = 60^\circ,$$

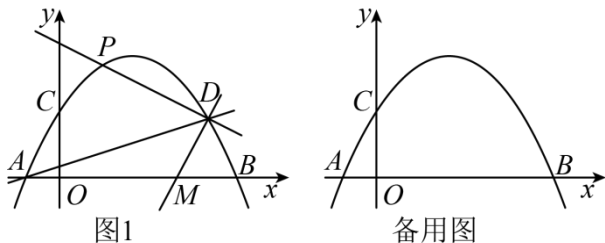
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle MPF \text{ 中, } PM = MF \cdot \sin \angle PFM = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

∴ 圆心 P 与点 M 距离的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



【点睛】本题主要考查了旋转的性质，等边对等角，解直角三角形，圆周角定理，切线的判定，三角形外接圆的性质，垂线段最短等等，正确作出辅助线是解题的关键.

22. 在平面直角坐标系 xOy 内，抛物线 $y = -ax^2 + 5ax + 2$ ($a > 0$) 交 y 轴于点 C ，过点 C 作 x 轴的平行线交该抛物线于点 D .



(1) 求点 C , D 的坐标;

(2) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时，如图 1，该抛物线与 x 轴交于 A , B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，点 P 为直线 AD 上方抛物线上一点，将直线 PD 沿直线 AD 翻折，交 x 轴于点 $M(4, 0)$ ，求点 P 的坐标;

(3) 坐标平面内有两点 $E\left(\frac{1}{a}, a+1\right)$, $F(5, a+1)$ ，以线段 EF 为边向上作正方形 $EFGH$.

①若 $a = 1$ ，求正方形 $EFGH$ 的边与抛物线的所有交点坐标;

②当正方形 $EFGH$ 的边与该抛物线有且仅有两个交点，且这两个交点到 x 轴的距离之差为 $\frac{5}{2}$ 时，求 a 的值.

【答案】(1) $C(0, 2)$, $D(5, 2)$

(2) $P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

(3) ① $(1, 6)$, $(4, 6)$, $(5, 2)$; ② $a = 0.5$

【解析】

【分析】(1) 先求出 $C(0, 2)$ ，再求出抛物线对称轴，根据题意可知 C 、 D 关于抛物线对称轴对称，据此求出点 D 的坐标即可;

(2) 先求出 $A(-1, 0)$ ，如图，设 DP 上与点 M 关于直线 AD 对称的点为 $N(m, n)$ ，由轴对称的性质可得

$AN = AM$, $DN = DM$ ，利用勾股定理建立方程组
$$\begin{cases} (m+1)^2 + n^2 = [4 - (-1)]^2 \\ (m-5)^2 + (n-2)^2 = (5-4)^2 + 2^2 \end{cases}$$
，解得 $m = 3$ 或

$$m=4 \text{ (舍去)}, \text{ 则 } N(3,3), \text{ 求出直线 } DP \text{ 的解析式为 } y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}, \text{ 然后联立 } \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2} \\ y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2 \end{cases}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{15}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases}, \text{ 则 } P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right);$$

(3) 分图 3-1, 图 3-2, 图 3-3 三种情况, 利用到 x 轴的距离之差即为纵坐标之差结合正方形的性质列出方程求解即可.

【小问 1 详解】

解: 在 $y=-ax^2+5ax+2(a>0)$ 中, 当 $x=0$ 时, $y=2$,

$$\therefore C(0,2),$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为 } y=-ax^2+5ax+2(a>0),$$

$$\therefore \text{抛物线对称轴为直线 } x=-\frac{5a}{-2a}=\frac{5}{2},$$

$\therefore$ 过点 C 作 x 轴的平行线交该抛物线于点 D ,

$\therefore C、D$ 关于抛物线对称轴对称,

$$\therefore D(5,2);$$

【小问 2 详解】

解: 当 $a=\frac{1}{3}$ 时, 抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2$,

当 $y=0$, 即 $-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x+2=0$, 解得 $x=-1$ 或 $x=6$,

$$\therefore A(-1,0);$$

如图, 设 DP 上与点 M 关于直线 AD 对称的点为 $N(m, n)$,

由轴对称的性质可得 $AN=AM$, $DN=DM$,

$$\therefore \begin{cases} (m+1)^2+n^2=[4-(-1)]^2 \\ (m-5)^2+(n-2)^2=(5-4)^2+2^2 \end{cases},$$

解得: $3m+n=12$, 即 $n=12-3m$

$$\therefore m^2+2m+1+144-72m+9m^2=25,$$

$$\therefore m^2 - 7m + 12 = 0,$$

解得 $m = 3$ 或 $m = 4$ (舍去),

$$\therefore n = 12 - 3m = 3,$$

$$\therefore N(3,3),$$

设直线 DP 的解析式为 $y = kx + b_1$,

$$\therefore \begin{cases} 3k + b_1 = 3 \\ 5k + b_1 = 2 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{9}{2} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } DP \text{ 的解析式为 } y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2},$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{15}{4} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right);$$

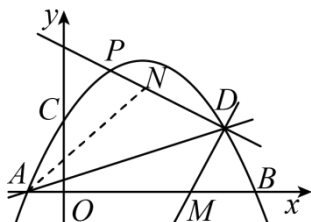


图1

【小问 3 详解】

解: ①当 $a=1$ 时, 抛物线解析式为 $y=-x^2+5x+2$, $E(1,2)$, $F(5,2)$,

$$\therefore EH = EF = FG = 4,$$

$$\therefore H(1,6), \quad G(5,6),$$

当 $x=1$ 时, $y=-1^2+5\times 1+2=6$,

$\therefore$ 抛物线 $y = -x^2 + 5x + 2$ 恰好经过 $H(1, 6)$;

$$\therefore \text{抛物线对称轴为直线 } x = \frac{5}{2},$$

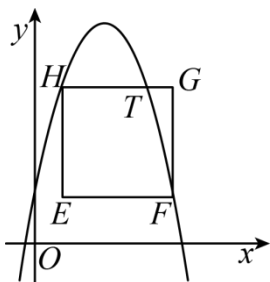
由对称性可知抛物线经过 $(4,6)$,

$\therefore$ 点 $(4,6)$ 时抛物线与正方形的一个交点,

又 $\because$ 点 F 与点 D 重合,

$\therefore$ 抛物线也经过点 $F(5,2)$;

综上所述, 正方形 $EFGH$ 的边与抛物线的所有交点坐标为 $(1,6)$, $(4,6)$, $(5,2)$;



②如图 3-1 所示, 当抛物线与 GH 、 GF 分别交于 T 、 D ,

$\therefore$ 当正方形 $EFGH$ 的边与该抛物线有且仅有两个交点, 且这两个交点到 x 轴的距离之差为 $\frac{5}{2}$,

$\therefore$ 点 T 的纵坐标为 $2 + 2.5 = 4.5$,

$$\therefore 5 - \frac{1}{a} + a + 1 = 4.5,$$

$$\therefore a^2 + 1.5a - 1 = 0,$$

解得 $a = -2$ (舍去) 或 $a = 0.5$;

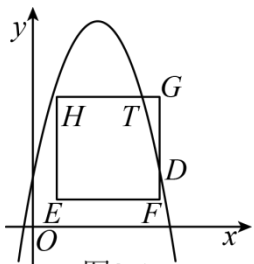


图3-1

如图 3-2 所示, 当抛物线与 GH 、 EF 分别交于 T 、 S ,

$\therefore$ 当正方形 $EFGH$ 的边与该抛物线有且仅有两个交点, 且这两个交点到 x 轴的距离之差为 $\frac{5}{2}$,

$$\therefore 5 - \frac{1}{a} = 2.5,$$

解得 $a = 0.4$ (舍去, 因为此时点 F 在点 D 下方)

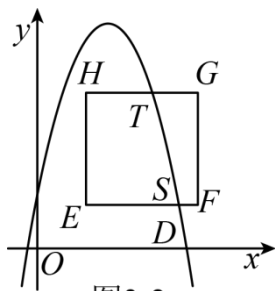


图3-2

如图 3-3 所示，当抛物线与 EH 、 EF 分别交于 T 、 S ，

$\therefore$ 当正方形 $EFGH$ 的边与该抛物线有且仅有两个交点，且这两个交点到 x 轴的距离之差为 $\frac{5}{2}$ ，

$$\therefore -a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 + 5a \cdot \frac{1}{a} + 2 = a + 1 + 2.5,$$

$$\therefore 7 - \frac{1}{a} = a + 3.5,$$

$$\therefore a^2 - 3.5a + 1 = 0,$$

$$\text{解得 } a = \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \text{ 或 } a = \frac{7 - \sqrt{33}}{4} \text{ (舍去);}$$

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = -ax^2 + 5ax + 2 = 6.25a + 2,$$

$$\text{当 } a = \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \text{ 时, } 6.25a + 2 > 7 - \frac{1}{a},$$

$$\therefore a = \frac{7 + \sqrt{33}}{4} \text{ 不符合题意;}$$

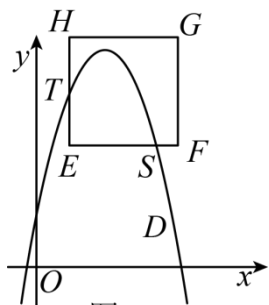


图3-3

综上所述， $a = 0.5$ 。

【点睛】 本题主要考查了二次函数综合，勾股定理，轴对称的性质，正方形的性质等等，利用分类讨论和数形结合的思想求解是解题的关键。

