

## 威海市 2023 年初中学业考试

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的．每小题选对得 3 分，选错、不选或多选，均不得分）

1. 面积为 9 的正方形，其边长等于（ ）

- A. 9 的平方根                      B. 9 的算术平方根                      C. 9 的立方根                      D. 5 的算术平方根

【答案】B

【解析】

【分析】根据算术平方根的定义解答即可．

【详解】解：∵面积等于边长的平方，

∴面积为 9 的正方形，其边长等于 9 的算术平方根．

故选 B．

【点睛】本题考查了算术平方根的意义，一般地，如果一个正数  $x$  的平方等于  $a$ ，即  $x^2 = a$ ，那么这个正数  $x$  叫做  $a$  的算术平方根．

2. 我国民间建筑装饰图案中，蕴含着丰富的数学之美．下列图案中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】A

【解析】

【分析】直接根据轴对称图形的定义和中心对称图形的定义逐项判断即可．

【详解】解：A. 该图形是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项正确；

B. 该图形不是轴对称图形，但是中心对称图形，故此选项错误；

C. 该图形不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项错误；

D. 该图形是轴对称图形，但不是中心对称图形，故此选项错误．

故选：A．

【点睛】本题考查了对称图形的定义和中心对称图形的定义，在平面内，一个图形绕某点旋转  $180^\circ$  后能与原来的图形重合，这个图形叫做中心对称图形；一个图形沿某条直线对折后，直线两旁的部分能重合，这样的图形叫做轴对称图形．理解这两个概念是关键．

3. 下列运算正确的是（ ）

A.  $a^2 + a^2 = 2a^4$       B.  $(-3a^2)^3 = -9a^6$       C.  $4a^2 \cdot a^3 = 4a^5$       D.  $a^6 \div a^2 = a^3$

【答案】C

【解析】

【分析】根据合并同类项、积的乘方、单项式乘以单项式和同底数幂除法法则进行判断即可.

【详解】A、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，不符合题意；

B、 $(-3a^2)^3 = -27a^6$ ，不符合题意；

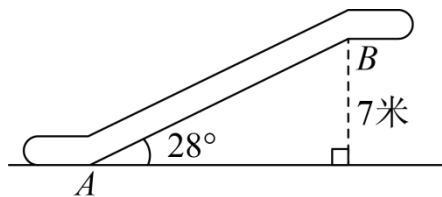
C、 $4a^2 \cdot a^3 = 4a^5$ ，符合题意；

D、 $a^6 \div a^2 = a^4$ ，不符合题意，

故选：C.

【点睛】此题考查了合并同类项、积的乘方、单项式乘以单项式和同底数幂除法，熟练掌握运算是解本题的关键.

4. 如图，某商场有一自动扶梯，其倾斜角为  $28^\circ$ ，高为 7 米. 用计算器求  $AB$  的长，下列按键顺序正确的是 ( )



A.  $7 \times \sin 28 =$       B.  $7 \div \sin 28 =$       C.  $7 \times \tan 28 =$       D.  $7 \div \tan 28 =$

【答案】B

【解析】

【分析】根据正弦的定义得出  $AB = 7 \div \sin 28^\circ$ ，进而可得答案.

【详解】解：由题意得  $\sin 28^\circ = \frac{7}{AB}$ ，

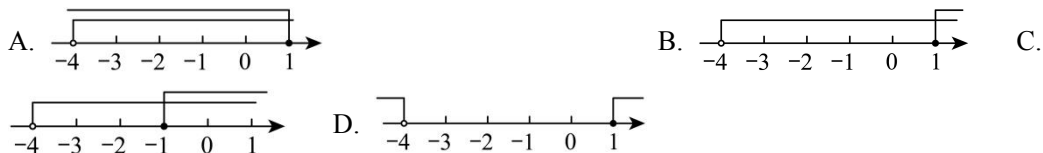
$$\therefore AB = 7 \div \sin 28^\circ,$$

$\therefore$  按键顺序为  $7 \div \sin 28 =$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了正弦的定义，计算器的使用，正确理解三角函数的定义是解题的关键.

5. 解不等式组  $\begin{cases} 7x-8 < 9x, ① \\ \frac{x+1}{2} \leq x ② \end{cases}$  时，不等式①②的解集在同一条数轴上表示正确的是 ( )



【答案】B

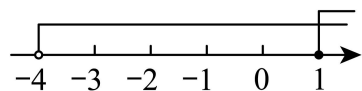
【解析】

【分析】分别求出两个不等式的解集，然后根据在数轴上表示解集的方法判断即可.

【详解】解：解不等式①得： $x > -4$ ,

解不等式②得： $x \geq 1$ ,

不等式①②的解集在同一条数轴上表示为:



故选：B.

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，在数轴上表示不等式解集，把每个不等式的解集在数轴上表示出来（ $>$ ， $\geq$ 向右画； $<$ ， $\leq$ 向左画），在表示解集时“ $\geq$ ”，“ $\leq$ ”要用实心圆点表示；“ $<$ ”，“ $>$ ”要用空心圆点表示.

6. 一个不透明的袋子中装有 2 个红球、3 个黄球，每个球除颜色外都相同. 晓君同学从袋中任意摸出 1 个球（不放回）后，晓静同学再从袋中任意摸出 1 个球. 两人都摸到红球的概率是（ ）

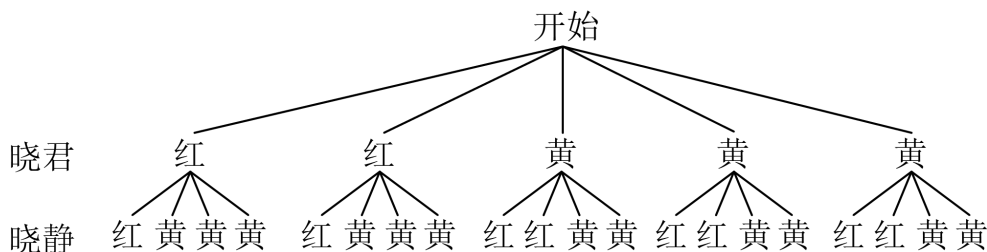
- A.  $\frac{1}{10}$       B.  $\frac{2}{25}$       C.  $\frac{4}{25}$       D.  $\frac{2}{5}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据题意画出树状图得出所有等可能的情况数，找出两人都摸到红球的情况数，然后根据概率公式即可得出答案.

【详解】解：根据题意画树状图如下：



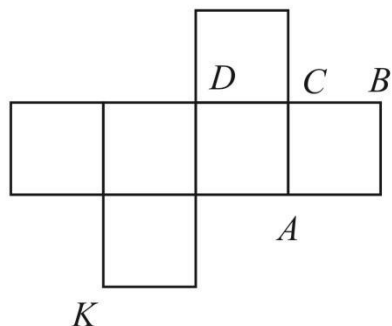
由树状图知，共有 20 种等可能的情况数，其中两人都摸到红球的有 2 种，

则两人都摸到红球的概率是  $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ .

故选：A.

【点睛】此题考查了列表法或树状图法求概率．树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回试验还是不放回试验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

7. 如图是一正方体的表面展开图．将其折叠成正方体后，与顶点  $K$  距离最远的顶点是（ ）



A.  $A$  点

B.  $B$  点

C.  $C$  点

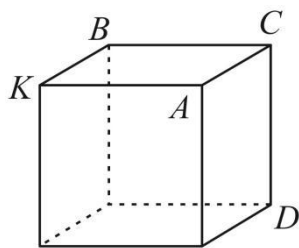
D.  $D$  点

【答案】D

【解析】

【分析】根据题意画出立体图形，即可求解．

【详解】解：折叠之后如图所示，



则  $K$  与点  $D$  的距离最远，

故选 D.

【点睛】本题考查了正方体的展开与折叠，学生需要有一定的空间想象能力．

8. 常言道：失之毫厘，谬以千里．当人们向太空发射火箭或者描述星际位置时，需要非常准确的数据． $1''$  的角真的很小．把整个圆等分成 360 份，每份这样的弧所对的圆心角的度数是  $1^\circ$ ． $1^\circ = 60' = 3600''$ ．若一个等腰三角形的腰长为 1 千米，底边长为 4.848 毫米，则其顶角的度数就是  $1''$ ．太阳到地球的平均距离大约为  $1.5 \times 10^8$  千米．若以太阳到地球的平均距离为腰长，则顶角为  $1''$  的等腰三角形底边长为（ ）

A. 24.24 千米

B. 72.72 千米

C. 242.4 千米

D. 727.2 千米

【答案】D

【解析】

【分析】设以太阳到地球的平均距离为腰长，则顶角为  $1''$  的等腰三角形底边长为  $x$  毫米，根据顶角相等的

两等腰三角形相似，相似三角形的对应边成比例，可列出方程  $\frac{1.5 \times 10^8}{1} = \frac{x}{4.848}$ ，求解即可。

【详解】解：设以太阳到地球的平均距离为腰长，则顶角为  $1''$  的等腰三角形底边长为  $x$  毫米，根据题意，得

$$\frac{1.5 \times 10^8}{1} = \frac{x}{4.848}$$

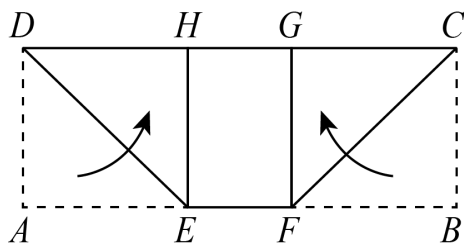
解得：  $x = 7.272 \times 10^8$

$\therefore$  等腰三角形底边长为  $7.272 \times 10^8$  毫米  $= 727.2$  千米。

故选：D。

【点睛】本题考查一元一次方程的应用。根据相似三角形判定与性质列出方程是解题的关键，注意单位换算。

9. 如图，四边形  $ABCD$  是一张矩形纸片。将其按如图所示的方式折叠：使  $DA$  边落在  $DC$  边上，点  $A$  落在点  $H$  处，折痕为  $DE$ ；使  $CB$  边落在  $CD$  边上，点  $B$  落在点  $G$  处，折痕为  $CF$ 。若矩形  $HEFG$  与原矩形  $ABCD$  相似， $AD=1$ ，则  $CD$  的长为（ ）



A.  $\sqrt{2}-1$

B.  $\sqrt{5}-1$

C.  $\sqrt{2}+1$

D.  $\sqrt{5}+1$

【答案】C

【解析】

【分析】先根据折叠的性质与矩形性质，求得  $DH=CG=1$ ，设  $CD$  的长为  $x$ ，则  $HG=x-2$ ，再根据相似多边形性质得出  $\frac{EH}{CD} = \frac{HG}{AD}$ ，即  $\frac{1}{x} = \frac{x-2}{1}$ ，求解即可。

【详解】解：由折叠可得：  $DH=AD$ ，  $CG=BC$ ，

$\therefore$  矩形  $ABCD$ ，

$\therefore AD=BC=1$ ，

$\therefore DH=CG=1$ ，

设  $CD$  的长为  $x$ ，则  $HG=x-2$ ，

$\therefore$  矩形  $HEFG$ ，

$$\therefore EH = 1,$$

$\therefore$  矩形  $HEFG$  与原矩形  $ABCD$  相似,

$$\therefore \frac{EH}{CD} = \frac{HG}{AD}, \text{ 即 } \frac{1}{x} = \frac{x-2}{1},$$

解得:  $x = \sqrt{2} + 1$  (负值不符合题意, 舍去)

$$\therefore CD = \sqrt{2} + 1,$$

故选: C.

【点睛】 本题考查矩形的折叠问题, 相似多边形的性质, 熟练掌握矩形的性质和相似多边形的性质是解题的关键.

10. 在  $\triangle ABC$  中,  $BC = 3, AC = 4$ , 下列说法错误的是 ( )

A.  $1 < AB < 7$

B.  $S_{\triangle ABC} \leq 6$

C.  $\triangle ABC$  内切圆的半径  $r < 1$

D. 当  $AB = \sqrt{7}$  时,  $\triangle ABC$  是直角三角形

【答案】 C

【解析】

【分析】 根据三角形三边关系、三角形面积、内切圆半径的计算以及勾股定理逆定理逐一求解即可.

【详解】 解:  $\because BC = 3, AC = 4$ ,

$\therefore 4 - 3 < AB < 4 + 3$  即  $1 < AB < 7$ , 故 A 说法正确;

当  $BC \perp AC$  时,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6$ ,

若以  $BC$  为底, 高  $\leq AC = 4$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} \leq 6$ , 故 B 说法正确;

设  $\triangle ABC$  内切圆的半径为  $r$ ,

则  $\frac{1}{2} AB \cdot r + \frac{1}{2} BC \cdot r + \frac{1}{2} AC \cdot r = S_{\triangle ABC}$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} \leq 6$ ,

$\therefore \frac{r}{2} (AB + BC + AC) \leq 6, r \leq \frac{12}{AB + BC + AC},$

$\therefore 1 < AB < 7, BC = 3, AC = 4$

$\therefore 8 < AB + BC + AC < 14,$

$\therefore r < \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ , 故 C 说法错误;

当  $AB = \sqrt{7}$  时,  $BC^2 + AB^2 = AC^2$ ,

$\therefore \triangle ABC$  是直角三角形, 故 D 说法正确;

故选: C.

【点睛】本题考查了三角形三边关系, 三角形面积, 三角形内切圆半径以及勾股定理的逆定理, 掌握内切圆半径与圆的面积周长之间的关系  $r = \frac{2S}{C}$  是解题的关键.

## 二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 只要求填出最后结果)

11. 计算:  $(\sqrt{2}-1)^0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} - \sqrt[3]{8} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【答案】 8

【解析】

【分析】根据零次幂、负整数指数幂和立方根的性质化简, 然后计算即可.

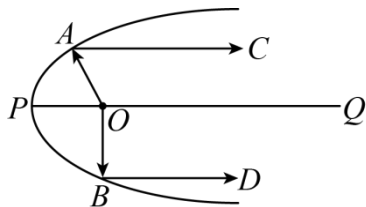
【详解】解: 原式  $= 1 + 9 - 2$

$= 8,$

故答案为: 8.

【点睛】本题考查了实数的混合运算, 熟练掌握零次幂、负整数指数幂和立方根的性质是解题的关键.

12. 某些灯具的设计原理与抛物线有关. 如图, 从点  $O$  照射到抛物线上的光线  $OA$ ,  $OB$  等反射后都沿着与  $PQ$  平行的方向射出. 若  $\angle AOB = 150^\circ$ ,  $\angle OBD = 90^\circ$ , 则  $\angle OAC = \underline{\hspace{2cm}}^\circ.$



【答案】 60

【解析】

【分析】可求  $\angle AOP = \angle AOB - \angle POB = 60^\circ$ , 由  $AC \parallel PQ$ , 即可求解.

【详解】解:  $\because PQ \parallel BD$ ,  $\angle OBD = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle POB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AOP = \angle AOB - \angle POB = 60^\circ$ ,

$\because AC \parallel PQ$ ,

$\therefore \angle OAC = \angle AOP = 60^\circ$ ,

故答案：60.

【点睛】本题考查了平行线的性质，掌握性质是解题的关键.

13. 《九章算术》中有一个问题：“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四、问人数、物价各几何？”  
 题目大意是：有几个人一起去买一件物品，每人出 8 元，多 3 元；每人出 7 元，少 4 元. 问有多少人？该物品价值多少元？设有  $x$  人，该物品价值  $y$  元，根据题意列方程组：\_\_\_\_\_.

【答案】 
$$\begin{cases} y = 8x - 3 \\ y = 7x + 4 \end{cases}$$

【解析】

【分析】设有  $x$  人，物品价值为  $y$  元，根据等量关系“每人出 8 元，多 3 元”和“每人出 7 元，少 4 元”列出二元一次方程组即可解答.

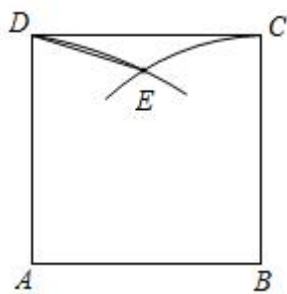
【详解】解：设有  $x$  人，物品价值为  $y$  元，

由题意得： 
$$\begin{cases} y = 8x - 3 \\ y = 7x + 4 \end{cases}.$$

故答案为： 
$$\begin{cases} y = 8x - 3 \\ y = 7x + 4 \end{cases}.$$

【点睛】本题主要考查列二元一次方程组. 根据题意、正确找到等量关系是解题的关键.

14. 如图，在正方形  $ABCD$  中，分别以点  $A, B$  为圆心，以  $AB$  的长为半径画弧，两弧交于点  $E$ ，连接  $DE$ ，  
 则  $\angle CDE =$  \_\_\_\_\_  $^\circ$ .



【答案】 15

【解析】

【分析】证明  $\triangle ABE$  是等边三角形可得  $\angle BAE = 60^\circ$ ，再求出  $\angle DAE = 30^\circ$ ，利用等腰三角形的性质可求出  $\angle ADE = 75^\circ$ ，进而可求出  $\angle CDE = 15^\circ$ .

【详解】解：连接  $AE, BE$ ，

由作图方法可知，  $AB = AE = BE$ ，

$\therefore \triangle ABE$  是等边三角形，

$$\therefore \angle BAE = 60^\circ,$$

$\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

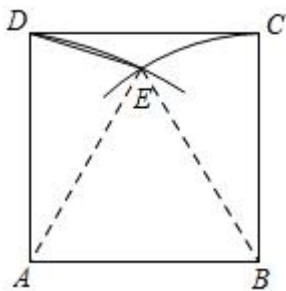
$$\therefore \angle BAD = \angle ADC = 90^\circ, \quad AD = AB = AE,$$

$$\therefore \angle DAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$

故答案为: 15.

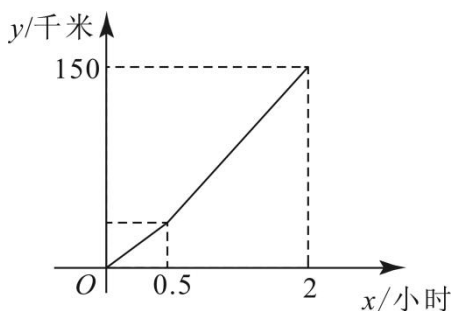


【点睛】本题考查了正方形的性质，等边三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，正确作出辅助线是解答本题的关键.

15. 一辆汽车在行驶过程中，其行驶路程  $y$  (千米) 与行驶时间  $x$  (小时) 之间的函数关系如图所示. 当

$0 \leq x \leq 0.5$  时， $y$  与  $x$  之间的函数表达式为  $y = 60x$ ；当  $0.5 \leq x \leq 2$  时， $y$  与  $x$  之间的函数表达式为

\_\_\_\_\_.



【答案】  $y = 80x - 10 (0.5 \leq x \leq 2)$

【解析】

【分析】先把  $x = 0.5$  代入  $y = 60x$ ，求得  $y = 30$ ，再设当  $0.5 \leq x \leq 2$  时， $y$  与  $x$  之间的函数表达式为

$$y = kx + b, \text{ 然后把 } (0.5, 30), (2, 150) \text{ 分别代入, 得 } \begin{cases} 0.5x + b = 30 \\ 2x + b = 150 \end{cases}, \text{ 求解得 } \begin{cases} k = 80 \\ b = -10 \end{cases}, \text{ 即可求解.}$$

【详解】解：把  $x = 0.5$  代入  $y = 60x$ ，得

$$y = 60 \times 0.5 = 30,$$

设当  $0.5 \leq x \leq 2$  时,  $y$  与  $x$  之间的函数表达式为  $y = kx + b$ ,

把  $(0.5, 30)$ ,  $(2, 150)$  分别代入, 得

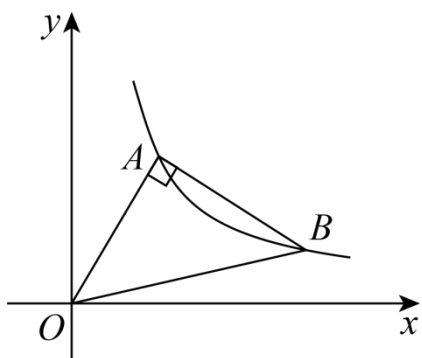
$$\begin{cases} 0.5x + b = 30 \\ 2x + b = 150 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = 80 \\ b = -10 \end{cases},$$

$\therefore y$  与  $x$  之间的函数表达式为  $y = 80x - 10 (0.5 \leq x \leq 2)$

故答案为:  $y = 80x - 10 (0.5 \leq x \leq 2)$ .

【点睛】 本题考查函数的图象, 待定系数法求一次函数解析式, 熟练掌握用待定系数法求一次函数解析式是解题的关键.

16. 如图, 在平面直角坐标系中, 点  $A, B$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图象上. 点  $A$  的坐标为  $(m, 2)$ . 连接  $OA, OB, AB$ . 若  $OA = AB, \angle OAB = 90^\circ$ , 则  $k$  的值为\_\_\_\_\_.

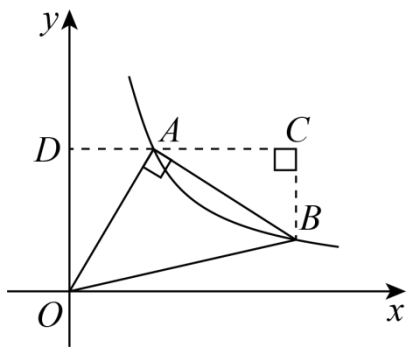


【答案】  $2\sqrt{5} - 2$  或  $-2 + 2\sqrt{5}$

【解析】

【分析】 过点  $A$  作  $CD \perp y$  轴于点  $D$ , 过点  $B$  作  $BC \perp CD$  于点  $C$ , 证明  $\triangle DAO \cong \triangle CBA$ , 进而根据全等三角形的性质得出  $DA = CB, AC = OD$ , 根据点  $A(m, 2)$ , 进而得出  $B(2 + m, 2 - m)$ , 根据点  $A, B$  在反比例函数  $y = \frac{k}{x} (x > 0)$  的图象上. 列出方程, 求得  $m$  的值, 进而即可求解.

【详解】 解: 如图所示, 过点  $A$  作  $CD \perp y$  轴于点  $D$ , 过点  $B$  作  $BC \perp CD$  于点  $C$ ,



$$\therefore \angle C = \angle CDO = 90^\circ,$$

$$\therefore OA = AB, \angle OAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAO = 90^\circ - \angle CAB = \angle CBA$$

$$\therefore \triangle DAO \cong \triangle CBA$$

$$\therefore DA = CB, AC = OD$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (m, 2).$$

$$\therefore AC = OD = 2, \quad AD = BC = m$$

$$\therefore B(2+m, 2-m)$$

$$\therefore A, B \text{ 在反比例函数 } y = \frac{k}{x} (x > 0) \text{ 的图象上,}$$

$$\therefore 2m = (2+m)(2-m)$$

$$\text{解得: } m = \sqrt{5} - 1 \text{ 或 } m = -\sqrt{5} - 1 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore k = 2m = 2\sqrt{5} - 2$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{5} - 2.$$

【点睛】本题考查了反比例函数的图象和性质，全等三角形的判定和性质，求得点  $B$  的坐标是解题的关键.

### 三、解答题 (本大题共 8 小题, 共 72 分)

17. 先化简  $\left(a - \frac{2a-1}{a}\right) \div \frac{a^2-1}{a}$ , 再从  $-3 < a < 3$  的范围内选择一个合适的数代入求值.

【答案】  $\frac{a-1}{a+1}$ , 当  $a=2$  时, 原式  $= \frac{1}{3}$  (答案不唯一)

【解析】

【分析】先根据分式混合运算法则计算即可化简, 再根据分式有意义条件把合适的数代入化简式计算即可.

【详解】解:  $\left(a - \frac{2a-1}{a}\right) \div \frac{a^2-1}{a}$

$$= \frac{a^2 - 2a + 1}{a} \div \frac{(a+1)(a-1)}{a}$$

$$= \frac{(a-1)^2}{a} \cdot \frac{a}{(a+1)(a-1)}$$

$$= \frac{a-1}{a+1},$$

$$\because a \neq 0, \pm 1 \text{ 且 } -3 < a < 3,$$

$$\therefore \text{当 } a = 2 \text{ 时, 原式} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

【点睛】本题考查分式化简求值，熟练掌握分式运算法则和分式有意义的条件是解题的关键。

18. 某校组织学生去郭永怀纪念馆进行研学活动。纪念馆距学校 72 千米，部分学生乘坐大型客车先行，出发 12 分钟后，另一部分学生乘坐小型客车前往，结果同时到达。已知小型客车的速度是大型客车速度的 1.2 倍，求大型客车的速度。

【答案】大型客车的速度为 100km/h

【解析】

【分析】设出慢车的速度，再利用慢车的速度表示出快车的速度，根据所用时间差为 12 分钟列方程解答。

【详解】解：设慢车的速度为  $x$  km/h，则快车的速度为  $1.2x$  km/h，

根据题意得

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{1.2x} = \frac{12}{60},$$

解得：  $x = 100$ ，

经检验，  $x = 100$  是原方程的根。

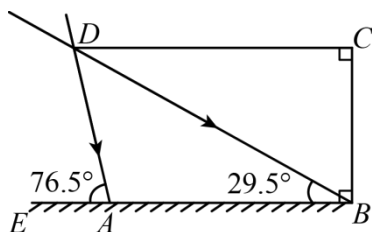
故大型客车的速度为 100km/h。

【点睛】此题考查了分式方程的应用，分析题意，找到关键描述语，找到合适的等量关系是解决问题的关键，此题的等量关系是快车与慢车所用时间差为 12 分钟。

19. 如图，某育苗基地为了能够最大限度地遮挡夏季炎热的阳光和充分利用冬天的光照，计划在苗圃正上方搭建一个平行于地面的遮阳蓬。已知苗圃的（南北）宽  $AB = 6.5$  米，该地区一年中正午时刻太阳光与地平面的最大夹角是  $\angle DAE = 76.5^\circ$ ，最小夹角是  $\angle DBE = 29.5^\circ$ 。求遮阳蓬的宽  $CD$  和到地面的距离  $CB$ 。

参考数据：  $\sin 29.5^\circ \approx \frac{49}{100}$ ，  $\cos 29.5^\circ \approx \frac{87}{100}$ ，  $\tan 29.5^\circ \approx \frac{14}{25}$ ，  $\sin 76.5^\circ \approx \frac{97}{100}$ ，  $\cos 76.5^\circ \approx \frac{23}{100}$ ，

$$\tan 76.5^\circ \approx \frac{21}{5}.$$

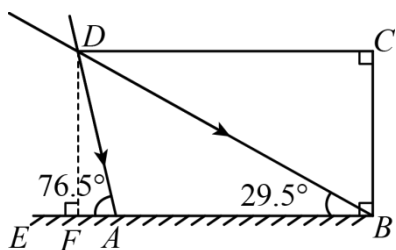


【答案】  $CD = 7.5$  米，  $BC = 4.2$  米.

【解析】

【分析】过点  $D$  作  $DF \perp EB$  于  $F$ ，解  $\text{Rt}\triangle ADF$ ，得  $DF \approx \frac{21}{5}AF$ ，解  $\text{Rt}\triangle BDF$ ，得  $DF \approx \frac{14}{25}(AF + 6.5)$ ，所以  $\frac{21}{5}AF = \frac{14}{25}(AF + 6.5)$ ，解得  $AF = 1$  米，从而得  $DF = 4.2$  米，再由矩形的性质求解即可.

【详解】解：如图，过点  $D$  作  $DF \perp EB$  于  $F$ ，



在  $\text{Rt}\triangle ADF$  中，  $\angle AFD = 90^\circ$ ，

$$\therefore DF = AF \cdot \tan \angle FAD = AF \cdot \tan 76.5^\circ \approx \frac{21}{5}AF,$$

在  $\text{Rt}\triangle BDF$  中，  $\angle BFD = 90^\circ$ ，

$$\therefore DF = BF \cdot \tan \angle FBD = (AF + AB) \cdot \tan 29.5^\circ \approx \frac{14}{25}(AF + 6.5),$$

$$\therefore \frac{21}{5}AF = \frac{14}{25}(AF + 6.5),$$

解得：  $AF = 1$  (米)，

$$\therefore DF = \frac{21}{5} \times 1 = 4.2 \text{ (米)},$$

$$\therefore BF = AB + AF = 6.5 + 1 = 7.5 \text{ (米)},$$

$$\therefore \angle AFD = \angle ABC = \angle C = 90^\circ$$

$\therefore$  矩形  $BCDF$ ，

$$\therefore CD = BF = 7.5 \text{ 米}, \quad BC = DF = 4.2 \text{ 米}.$$

答：遮阳篷的宽  $CD$  为 7.5 米，到地面的距离  $CB$  为 4.2 米.

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用，通过作辅助线构造直角三角形是解题的关键.

20. 某校德育处开展专项安全教育活动前，在全校范围内随机抽取了 40 名学生进行安全知识测试，测试结果如表 1 所示（每题 1 分，共 10 道题），专项安全教育活动后，再次在全校范围内随机抽取 40 名学生进行测试，根据测试数据制作了如图 1、图 2 所示的统计图（尚不完整）.

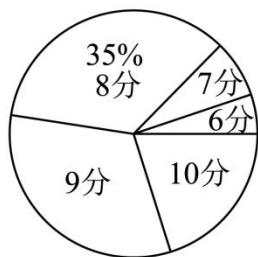


图1

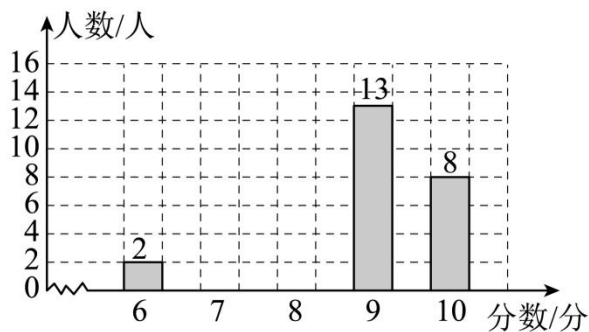


图2

表 1

| 分数/分 | 人数/人 |
|------|------|
| 2    | 4    |
| 5    | 6    |
| 6    | 8    |
| 7    | 8    |
| 8    | 12   |
| 9    | 2    |

设定 8 分及以上为合格，分析两次测试结果得到表 2.

表 2

|     | 平均数/分 | 众数/分 | 中位数/分 | 合格率 |
|-----|-------|------|-------|-----|
| 第一次 | 6.4   | $a$  | 7     | 35% |
| 第二次 | $b$   | 8    | 9     | $c$ |

请根据图表中的信息，解答下列问题：

- (1) 将图 2 中的统计图补充完整，并直接写出  $a$ ,  $b$ ,  $c$  的值；
- (2) 若全校学生以 1200 人计算，估计专项安全教育活动后达到合格水平的学生人数；
- (3) 从多角度分析本次专项安全教育活动的效果.

【答案】(1) 见解析， $a = 8$ ， $b = 8.55$ ， $c = 52.5\%$ ；

(2) 估计专项安全教育活动后达到合格水平的学生人数为 630 人；

(3) 见解析

【解析】

- 【分析】(1) 先求出第二次测试得 8 分的人数，然后求出第二次测试得 7 分的人数，再补全统计图即可；  
根据众数、中位数的定义，合格率的计算方法求解即可；  
(2) 用总人数乘以专项安全教育活动后的合格率即可；  
(3) 可以从平均数、中位数以及合格率这几个角度进行分析.

## 【小问 1 详解】

解：第二次测试得 8 分的人数为：  $40 \times 35\% = 14$  (人)，

第二次测试得 7 分的人数为：  $40 - 2 - 14 - 13 - 8 = 3$  (人)，

补全图 2 中的统计图如图：

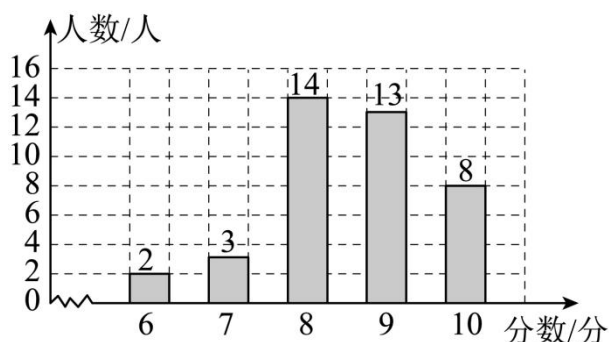


图2

由表 1 知，第一次测试得 8 分的人数有 12 人，人数最多，故众数  $a = 8$ ，

第二次测试的平均数为  $b = \frac{6 \times 2 + 7 \times 3 + 8 \times 14 + 9 \times 13 + 10 \times 8}{40} = 8.55$ ，

第二次测试的合格率  $c = \frac{13 + 8}{40} \times 100\% = 52.5\%$ ；

## 【小问 2 详解】

解：  $1200 \times 52.5\% = 630$  (人)，

答：估计专项安全教育活动后达到合格水平的学生人数为 630 人；

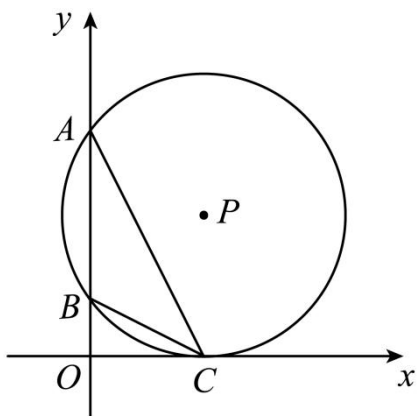
## 【小问 3 详解】

解：第二次测试的平均数、中位数以及合格率较第一次均有大幅提升，

故本次专项安全教育活动的效果非常显著.

【点睛】 本题考查了条形统计图和扇形统计图的综合应用，众数、中位数的定义，用样本估计总体等知识，能够从不同的统计图中获取有用信息是解题的关键.

21. 如图，在平面直角坐标系中，点  $P$  在第一象限内， $\odot P$  与  $x$  轴相切于点  $C$ ，与  $y$  轴相交于点  $A(0,8)$ ， $B(0,2)$ . 连接  $AC$ ， $BC$ .



- (1) 求点  $P$  的坐标;  
 (2) 求  $\cos \angle ACB$  的值.

【答案】(1)  $(4,5)$

(2)  $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$

【解析】

【分析】(1) 如图, 连接  $PC$ ,  $PB$ , 过点  $P$  作  $PD \perp AB$ , 垂足为  $D$ , 由垂径定理得  $BD = \frac{1}{2}AB$ , 由  $A(0,8)$ ,  $B(0,2)$  得  $BD = 3$ ,  $OD = 5$ , 由切线性, 得  $PC = PB$ ,  $\angle PCO = 90^\circ$ , 进一步可证四边形  $OCPD$  是矩形, 得  $PC = OD = 5$ ,  $\text{Rt}\triangle PDB$  中,  $PD = \sqrt{PB^2 - BD^2} = 4$ , 于是  $P$  的坐标  $(4,5)$ ;

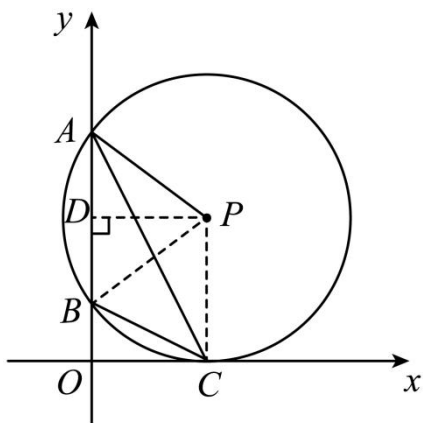
(2) 如图, 由等腰三角三线合一, 得  $\angle DPB = \frac{1}{2}\angle APB$ , 由圆周角定理, 而  $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle APB$ , 从而  $\angle ACB = \angle DPB$ ,  $\text{Rt}\triangle DPB$  中,  $\cos \angle DPB = \frac{PD}{PB} = \frac{4}{5}$ , 于是  $\cos \angle ACB = \frac{4}{5}$ .

【小问 1 详解】

如图, 连接  $PC$ ,  $PB$ , 过点  $P$  作  $PD \perp AB$ , 垂足为  $D$ , 则  $BD = \frac{1}{2}AB$

$\therefore$  点  $A(0,8)$ ,  $B(0,2)$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(OA - OB) = 3, \quad OD = OB + BD = 5$$



$\because \odot P$  与  $x$  轴相切于点  $C$

$\therefore PC = PB$ ,  $\angle PCO = 90^\circ$

$\because \angle COD = \angle PDO = 90^\circ$

$\therefore$  四边形  $OCPD$  是矩形

$\therefore PC = OD = 5$

$\therefore PB = 5$

Rt $\triangle PDB$  中,  $PD = \sqrt{PB^2 - BD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

$\therefore$  点  $P$  的坐标  $(4, 5)$

### 【小问 2 详解】

如图,  $PA = PB$ ,  $PD \perp AB$

$\therefore \angle DPB = \frac{1}{2} \angle APB$

而  $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle APB$

$\therefore \angle ACB = \angle DPB$

Rt $\triangle DPB$  中,  $\cos \angle DPB = \frac{PD}{PB} = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos \angle ACB = \frac{4}{5}$

**【点睛】** 本题考查圆的切线的性质, 圆周角定理, 垂径定理, 添加辅助线构造直角三角形, 运用勾股定理是解题的关键.

22. 城建部门计划修建一条喷泉步行通道. 图 1 是项目俯视示意图. 步行通道的一侧是一排垂直于路面的柱形喷水装置, 另一侧是方形水池. 图 2 是主视示意图. 喷水装置  $OA$  的高度是 2 米, 水流从喷头  $A$  处喷出后呈抛物线路径落入水池内, 当水流在与喷头水平距离为 2 米时达到最高点  $B$ , 此时距路面的最大高度为 3.6 米. 为避免溅起的水雾影响通道上的行人, 计划安装一个透明的倾斜防水罩, 防水罩的一端固定在喷水装

置上的点  $M$  处，另一端与路面的垂直高度  $NC$  为 1.8 米，且与喷泉水流的水平距离  $ND$  为 0.3 米. 点  $C$  到水池外壁的水平距离  $CE = 0.6$  米，求步行通道的宽  $OE$ . (结果精确到 0.1 米) 参考数据:  $\sqrt{2} \approx 1.41$



图1

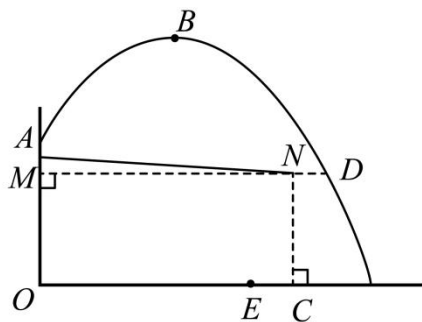


图2

【答案】3.2 米

【解析】

【分析】先以点  $O$  为坐标原点， $OC$  所在直线为  $x$  轴， $OA$  所在直线为  $y$  轴，建立平面直角坐标系，则  $A(0, 2)$ ， $B(2, 3.6)$ ，设抛物线的解析式为  $y = a(x - 2)^2 + 3.6$ ，把  $A(0, 2)$  代入，求得  $a = -0.4$ ，即  $1.8 = -0.4(x - 2)^2 + 3.6$ ，再求出点  $D$  的坐标，即可求解.

【详解】解：如图，建立平面直角坐标系，

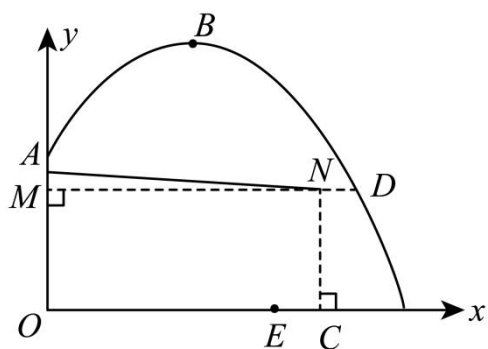


图2

由题意知:  $A(0, 2)$ ， $B(2, 3.6)$ ，

$\therefore$  抛物线的最高点  $B$ ，

$\therefore$  设抛物线的解析式为  $y = a(x - 2)^2 + 3.6$ ，

把  $A(0, 2)$  代入，得  $2 = a(0 - 2)^2 + 3.6$ ，

解得  $a = -0.4$ ，

$\therefore$  抛物线的解析式为  $y = -0.4(x - 2)^2 + 3.6$ ，

令  $y = 1.8$ ，则  $1.8 = -0.4(x - 2)^2 + 3.6$ ，

$$\text{解得: } x = 2 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore D\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, 1.8\right),$$

$$\therefore OE = x_D - ND - CE = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} - 0.3 - 0.6 \approx 3.2 \text{ (米)},$$

答：步行通道的宽  $OE$  的长约为 3.2 米.

【点睛】本题考查抛物线的实际应用. 熟练掌握用待定系数法求抛物线解析式和抛物线的图象性质是解题的关键.

23. 已知：射线  $OP$  平分  $\angle MON$ ,  $A$  为  $OP$  上一点,  $\odot A$  交射线  $OM$  于点  $B, C$ , 交射线  $ON$  于点  $D, E$ , 连接  $AB, AC, AD$ .

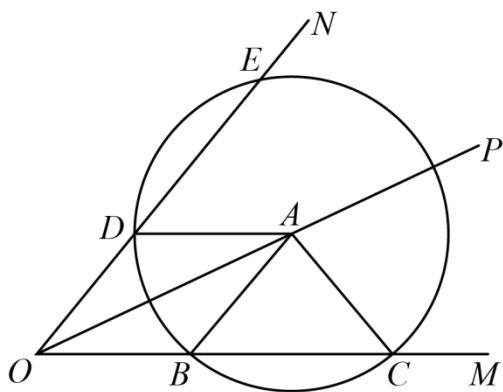


图1

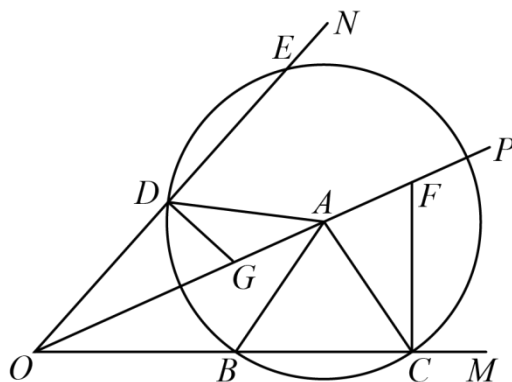


图2

(1) 如图 1, 若  $AD \parallel OM$ , 试判断四边形  $OBAD$  的形状, 并说明理由;

(2) 如图 2, 过点  $C$  作  $CF \perp OM$ , 交  $OP$  于点  $F$ ; 过点  $D$  作  $DG \perp ON$ , 交  $OP$  于点  $G$ . 求证:  $AG = AF$ .

【答案】(1) 四边形  $OBAD$  是菱形, 理由见解析

(2) 见解析

【解析】

【分析】(1) 过点  $A$  作  $AF \perp ON$  于  $F$ ,  $AG \perp OM$  于  $G$ , 先由角平分线性质得  $AF = AG$ , 再证明  $\text{Rt}\triangle AFD \cong \text{Rt}\triangle AGB$  (HL), 得  $FD = GB$ , 证明  $\text{Rt}\triangle AFO \cong \text{Rt}\triangle AGO$  (HL), 得  $OF = OG$ , 从而得出  $OD = OB$ , 再根据平行线性质与角平分线定义证明  $\angle AOD = \angle OAD$ , 得  $OD = AD$ , 从而得  $OD = AD = AB = OB$ , 即可得出结论;

(2) 连接  $EF$ , 过点  $A$  作  $AH \perp ON$  于  $H$ , 作  $AG \perp OM$  于  $G$ , 证明  $\text{Rt}\triangle AHD \cong \text{Rt}\triangle AGB$  (HL), 得

$DH = BG$ , 证明  $\text{Rt}\triangle AFO \cong \text{Rt}\triangle AGO$  (HL), 得  $OF = OG$ , 证明  $\triangle OEF \cong \triangle OCF$  (SAS), 得  $\angle OEF = \angle OCF = 90^\circ$ , 从而得  $DG \parallel AH \parallel EF$ , 根据平行线等分线段定理即可得出结论.

### 【小问 1 详解】

解：四边形  $OBAD$  是菱形，理由如下：

过点  $A$  作  $AF \perp ON$  于  $F$ ,  $AG \perp OM$  于  $G$ , 如图 1,

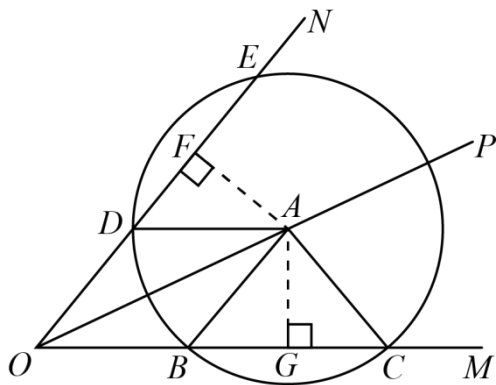


图 1

$\therefore OP$  平分  $\angle MON$ ,  $AF \perp ON$ ,  $AG \perp OM$ ,

$$\therefore AF = AG,$$
$$\therefore AD = AB,$$
$$\therefore \text{Rt}_{\Delta AFD} \cong \text{Rt}_{\Delta AGB} \text{ (HL)},$$
$$\therefore FD = GB,$$
$$\because OA = OA, \quad AF = AG$$
$$\therefore \text{Rt}_{\Delta AFO} \cong \text{Rt}_{\Delta AGO} (\text{HL}),$$
$$\therefore OF = OG,$$
$$\therefore OF - FD = OG - GB, \text{ 即 } OD = OB,$$
 $\therefore OP$  平分  $\angle MON$ ,
$$\therefore \angle AOD = \angle AOB$$
$$\therefore AD \parallel OM$$
$$\therefore \angle AOB = \angle OAD$$
$$\therefore \angle AOD = \angle OAD$$
$$\therefore OD = AD$$
$$\therefore OD = AD = AB = OB,$$

$\therefore$  四边形  $OBAD$  是菱形.

## 【小问 2 详解】

证明：连接  $EF$ ，过点  $A$  作  $AH \perp ON$  于  $H$ ，作  $AG \perp OM$  于  $G$ ，如图 2，

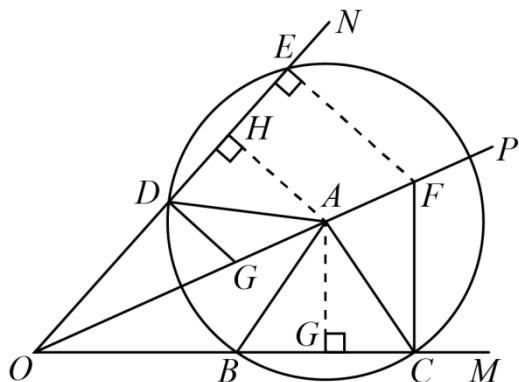


图2

$\because OP$  平分  $\angle MON$ ， $AH \perp ON$ ， $AG \perp OM$ ，

$\therefore AH = AG$ ，

$\because AD = AB$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle AHD \cong \text{Rt}\triangle AGB \text{ (HL)}$ ，

$\therefore DH = BG$ ，

$\because AH \perp ON$ ， $AG \perp OM$ ，

$\therefore EH = DH$ ， $BG = CG$ ，

$\because OA = OA$ ， $AH = AG$ ，

$\therefore \text{Rt}\triangle AHO \cong \text{Rt}\triangle AGO \text{ (HL)}$ ，

$\therefore OH = OG$ ，

$\therefore EH = CG$ ，

$\therefore OH + EH = OG + CG$ ，即  $OC = OE$ ，

$\because \angle EOF = \angle COF$ ， $OF = OF$ ，

$\therefore \triangle OEF \cong \triangle OCF \text{ (SAS)}$ ，

$\therefore \angle OEF = \angle OCF = 90^\circ$ ，

$\therefore EF \perp ON$ ，

$\because DG \perp ON$ ， $AH \perp ON$ ，

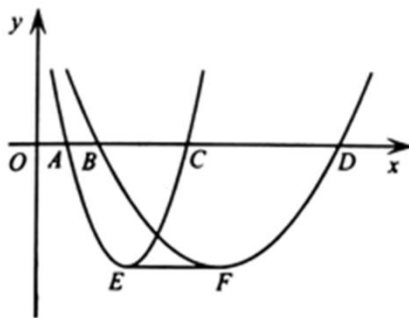
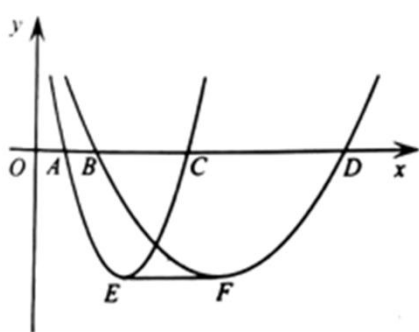
$\therefore DG \parallel AH \parallel EF$ ，

$\because DH = EH$ ，

$\therefore AG = AF$ 。

【点睛】本题考查角平分线性质，菱形的判定，全等三角形的判定与性质，垂直定理，平行线等分线段定理，熟练掌握相关性质与判定是解题的关键。

24. 如图，在平面直角坐标系中，抛物线  $L_1$  交  $x$  轴于点  $A(1,0), C(5,0)$ ，顶点坐标为  $E(m_1, k)$ 。抛物线  $L_2$  交  $x$  轴于点  $B(2,0), D(10,0)$ ，顶点坐标为  $F(m_2, k)$ 。



备用图

- (1) 连接  $EF$ ，求线段  $EF$  的长；
- (2) 点  $M(-7, d_1)$  在抛物线  $L_1$  上，点  $N(16, d_2)$  在抛物线  $L_2$  上。比较大小： $d_1$  \_\_\_\_\_  $d_2$ ；
- (3) 若点  $P(n+3, f_1), Q(2n-1, f_2)$  在抛物线  $L_1$  上， $f_1 < f_2$ ，求  $n$  的取值范围。

【答案】(1)  $EF = 3$

(2)  $d_1 > d_2$

(3)  $n < -4$  或  $n > \frac{4}{3}$

【解析】

【分析】(1) 知道抛物线与  $x$  轴的交点坐标，即可求出顶点横坐标，从而求出结果；

(2) 用两点式设出抛物线解析式，把顶点坐标代入可得  $a_1 = 4a_2$ ，再把  $x = -7$ ， $x = 16$  代入比较即可；

(3) 根据  $f_1 < f_2$ ，则点  $P$  离对称轴更近，可得  $|n+3-3| < |2n-1-3|$ ，解不等式即可。

【小问 1 详解】

解：由题意可得： $m_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ ， $m_2 = \frac{2+10}{2} = 6$ ，

$\therefore EF = 3$ ；

【小问 2 详解】

解：由题意得：设抛物线  $L_1$ ： $y_1 = a_1(x-1)(x-5)$ ，抛物线  $L_2$ ： $y_2 = a_2(x-2)(x-10)$ ，

由 (1) 得： $E(3, k)$ ， $F(6, k)$ ，

$$\therefore a_1(3-1)(3-5) = a_2(6-2)(6-10),$$

$$\therefore a_1 = 4a_2,$$

$$\therefore y_1 = 4a_2(x-1)(x-5),$$

把  $x = -7$  代入抛物线  $L_1$  得:  $d_1 = 4a_2(x-1)(x-5) = 384a_2,$

把  $x = 16$  代入抛物线  $L_2$  得:  $d_2 = a_2(x-2)(x-10) = 48a_2,$

$$\therefore a_2 > 0,$$

$$\therefore d_1 > d_2;$$

【小问3详解】

解:  $\because f_1 < f_2,$

$\therefore$  点  $P$  离对称轴更近,

$$\therefore |n+3-3| < |2n-1-3|,$$

$$\therefore (n+3-3)^2 - (2n-1-3)^2 < 0,$$

$$\therefore (n+2n-4)(n-2n-4) < 0;$$

$$\therefore \begin{cases} n+2n-4 < 0 \\ n-2n-4 > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} n+2n-4 > 0 \\ n-2n-4 < 0 \end{cases}$$

$$\therefore n < -4 \text{ 或 } n > \frac{4}{3}.$$

【点睛】 本题考查了二次函数压轴题，综合性强，掌握数形结合是关键.

