

试卷类型：A

2023 年临沂市初中学业水平考试试题

数 学

注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题），共 8 页，满分 120 分，考试时间 120 分钟。答卷前，考生务必用 0.5 毫米黑色签字笔将自己的姓名、准考证号、座号填写在试卷和答题卡规定的位置。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

2. 答题注意事项见答题卡，答在本试卷上不得分。

第 I 卷（选择题 共 36 分）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）在每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 计算 $(-7) - (-5)$ 的结果是 ()

- A. -12 B. 12 C. -2 D. 2

【答案】C

【解析】

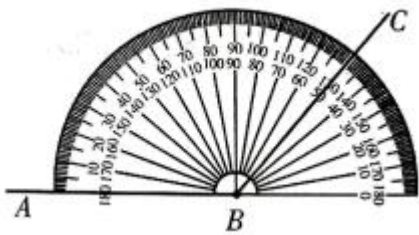
【分析】直接利用有理数的减法法则进行计算即可。

【详解】解： $(-7) - (-5) = (-7) + 5 = -2$ ；

故选 C.

【点睛】本题考查有理数的减法，熟练掌握减一个负数等于加上它的相反数，是解题的关键。

2. 下图中用量角器测得 $\angle ABC$ 的度数是 ()



- A. 50° B. 80° C. 130° D. 150°

【答案】C

【解析】

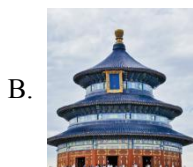
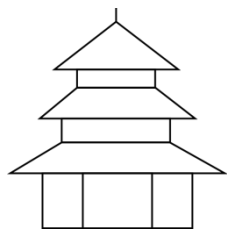
【分析】由图形可直接得出。

【详解】解：由题意，可得 $\angle ABC = 130^\circ$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查角的度量，量角器的使用方法，正确使用量角器是解题的关键.

3. 下图是我国某一古建筑的主视图，最符合视图特点的建筑物的图片是 ()



【答案】B

【解析】

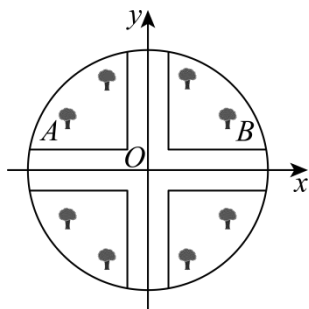
【分析】依次观察各建筑物的图片即可作出判断，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中.

【详解】解：最符合视图特点的建筑物的图片是选项 B 所示图片.

故选：B.

【点睛】本题考查三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图.

4. 某小区的圆形花园中间有两条互相垂直的小路，园丁在花园中栽种了 8 棵桂花，如图所示. 若 A , B 两处桂花的位置关于小路对称，在分别以两条小路为 x , y 轴的平面直角坐标系内，若点 A 的坐标为 $(-6, 2)$ ，则点 B 的坐标为 ()



A. $(6, 2)$

B. $(-6, -2)$

C. $(2, 6)$

D. $(2, -6)$

【答案】A

【解析】

【分析】根据关于 y 轴对称的点的坐标特点：纵坐标不变，横坐标互为相反数，进行求解即可.

【详解】解：由题意，得：点 B 的坐标为 $(6, 2)$ ；

故选 A.

【点睛】本题考查坐标与轴对称. 熟练掌握关于 y 轴对称的点的坐标特点: 纵坐标不变, 横坐标互为相反数, 是解题的关键.

5. 在同一平面内, 过直线 l 外一点 P 作 l 的垂线 m , 再过 P 作 m 的垂线 n , 则直线 l 与 n 的位置关系是 ()

- A. 相交 B. 相交且垂直 C. 平行 D. 不能确定

【答案】C

【解析】

【分析】根据“在同一平面内, 垂直于同一直线的两直线互相平行”即可作出判断.

【详解】解: $\because$ 在同一平面内, 过直线 l 外一点 P 作 l 的垂线 m , 即 $l \perp m$,

又 $\because$ 过 P 作 m 的垂线 n , 即 $n \perp m$,

$\therefore l \parallel n$,

$\therefore$ 直线 l 与 n 的位置关系是平行,

故选: C.

【点睛】本题考查平行线的判定. 掌握平行线判定的方法是解题的关键.

6. 下列运算正确的是 ()

A. $3a - 2a = 1$

B. $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

C. $(a^5)^2 = a^7$

D. $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^5$.

【答案】D

【解析】

【分析】根据合并同类项, 完全平方公式, 幂的乘方, 单项式乘单项式法则, 进行计算后判断即可.

【详解】解: A、 $3a - 2a = a$, 故选项错误, 不符合题意;

B、 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, 故选项错误, 不符合题意;

C、 $(a^5)^2 = a^{10}$, 故选项错误, 不符合题意;

D、 $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^5$, 故选项正确, 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题考查整式的运算, 熟练掌握相关运算法则, 是解题的关键.

7. 将一个正六边形绕其中心旋转后仍与原图形重合, 旋转角的大小不可能是 ()

A. 60°

B. 90°

C. 180°

D. 360°

【答案】B

【解析】

【分析】根据旋转的性质，以及正多边形的中心角的度数，进行判断即可.

【详解】解：正六边形的中心角的度数为： $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$,

$\therefore$ 正六边形绕其中心旋转 60° 或 60° 的整数倍时，仍与原图形重合，

$\therefore$ 旋转角的大小不可能是 90° ；

故选 B.

【点睛】本题考查旋转图形，正多边形的中心角. 熟练掌握旋转的性质，正多边形的中心角的度数的求法，是解题的关键.

8. 设 $m = 5\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{45}$ ，则实数 m 所在的范围是 ()

A. $m < -5$

B. $-5 < m < -4$

C. $-4 < m < -3$

D. $m > -3$

【答案】B

【解析】

【分析】根据二次根式的加减运算进行计算，然后估算即可求解.

【详解】解： $m = 5\sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{45} = \sqrt{\frac{25}{5}} - \sqrt{45} = \sqrt{5} - 3\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$ ，

$\because 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$ ， $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$

$\therefore -5 < -2\sqrt{5} < -4$ ，

即 $-5 < m < -4$ ，

故选：B.

【点睛】本题考查了二次根式的加减运算，无理数的估算，正确的计算是解题的关键.

9. 在项目化学习中，“水是生命之源”项目组为了解本地区人均淡水消耗量，需要从四名同学（两名男生，两名女生）中随机抽取两人，组成调查小组进行社会调查，恰好抽到一名男生和一名女生的概率是 ()

A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

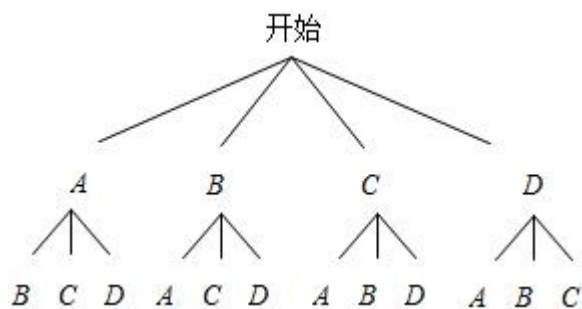
【答案】D

【解析】

【分析】画树状图得出所有等可能的结果数和抽取的两名同学恰好是一名男生和一名女生的结果数，再利用概率公式可得出答案.

【详解】解：设两名男生分别记为 A，B，两名女生分别记为 C，D，

画树状图如下：



共有12种等可能的结果，其中抽取的两名同学恰好是一名男生和一名女生的结果有8种，

$\therefore$ 抽取的两名同学恰好是一名男生和一名女生的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ，

故选：D.

【点睛】 本题考查列表法或树状图法求概率，解题时要注意是放回试验还是不放回试验；概率等于所求情况数与总情况数之比. 用列表法或画树状图法不重复不遗漏的列出所有可能的结果是解题的关键.

10. 正在建设中的临滕高速是我省“十四五”重点建设项目. 一段工程施工需要运送土石方总量为 10^5m^3 ，设土石方日平均运送量为 V (单位： $\text{m}^3/\text{天}$)，完成运送任务所需要的时间为 t (单位：天)，则 V 与 t 满足 ()

- A. 反比例函数关系
- B. 正比例函数关系
- C. 一次函数关系
- D. 二次函数关系

【答案】 A

【解析】

【分析】 根据题意，列出函数关系式，进行作答即可.

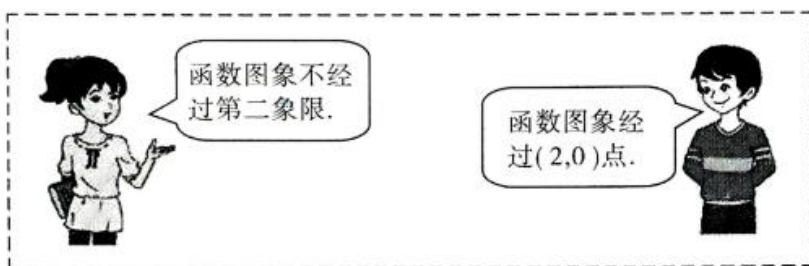
【详解】 解：由题意，得： $V = \frac{10^5}{t}$ ，

$\therefore V$ 与 t 满足反比例函数关系.

故选 A.

【点睛】 本题考查反比例函数的实际应用. 读懂题意，正确的列出函数关系式，是解题的关键.

11. 对于某个一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ ，根据两位同学的对话得出的结论，错误的是 ()



- A. $k > 0$ B. $kb < 0$ C. $k + b > 0$ D. $k = -\frac{1}{2}b$

【答案】C

【解析】

【分析】首先根据一次函数的性质确定 k , b 的符号, 再确定一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 系数的符号, 判断出函数图象所经过的象限.

【详解】解: $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象不经过第二象限,

$\therefore k > 0$, $b < 0$, 故选项 A 正确, 不符合题意;

$\therefore kb < 0$, 故选项 B 正确, 不符合题意;

$\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象经过点 $(2, 0)$,

$\therefore 2k + b = 0$, 则 $b = -2k$,

$\therefore k + b = k - 2k = -k < 0$, 故选项 C 错误, 符合题意;

$\therefore b = -2k$,

$\therefore k = -\frac{1}{2}b$, 故选项 D 正确, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】本题考查一次函数图象与系数的关系, 解决此类题目的关键是确定 k 、 b 的正负.

12. 在实数 a , b , c 中, 若 $a + b = 0$, $b - c > c - a > 0$, 则下列结论: ① $|a| > |b|$, ② $a > 0$, ③ $b < 0$, ④ $c < 0$, 正确的个数有 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

【答案】A

【解析】

【分析】根据相反数的性质即可判断①, 根据已知条件得出 $b > c > a$, 即可判断②③, 根据 $b = -a$, 代入已知条件得出 $c < 0$, 即可判断④, 即可求解.

【详解】解: $\because a + b = 0$

$\therefore |a| = |b|$, 故①错误,

$\because a + b = 0, b - c > c - a > 0$

$\therefore b > c > a$,

又 $a + b = 0$

$\therefore a < 0, b > 0$, 故②③错误,

$$\because a+b=0$$

$$\therefore b=-a$$

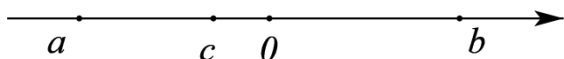
$$\because b-c > c-a > 0$$

$$\therefore -a-c > c-a$$

$$\therefore -c > c$$

$$\therefore c < 0, \text{ 故④正确}$$

或借助数轴，如图所示，



故选：A.

【点睛】本题考查了不等式的性质，实数的大小比较，借助数轴比较是解题的关键.

第Ⅱ卷（非选择题 共 84 分）

注意事项：

1.第Ⅱ卷分填空题和解答题.

2.第Ⅱ卷所有题目的答案，考生须用 0.5 毫米黑色签字笔答在答题卡规定的区域内，在试卷上答题不得分.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

13. 已知菱形的两条对角线长分别为 6 和 8，则它的面积为_____.

【答案】24

【解析】

【分析】根据菱形面积等于两条对角线乘积的一半进行计算即可.

【详解】解：根据菱形面积等于两条对角线乘积的一半可得：

$$\text{面积} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24,$$

故答案为：24.

【点睛】本题考查了菱形的性质，解答本题的关键是掌握菱形面积等于两条对角线乘积的一半.

14. 观察下列式子

$$1 \times 3 + 1 = 2^2;$$

$$2 \times 4 + 1 = 3^2;$$

$$3 \times 5 + 1 = 4^2;$$

.....

按照上述规律, _____ = n^2 .

【答案】 $(n-1)(n+1)+1$

【解析】

【分析】 根据已有的式子, 抽象出相应的数字规律, 进行作答即可.

【详解】 解: $\because 1 \times 3 + 1 = 2^2;$

$$2 \times 4 + 1 = 3^2;$$

$$3 \times 5 + 1 = 4^2;$$

.....

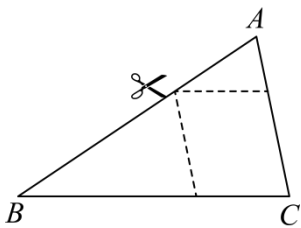
$$\therefore n(n+2)+1=(n+1)^2,$$

$$\therefore (n-1)(n+1)+1=n^2.$$

故答案为: $(n-1)(n+1)+1$

【点睛】 本题考查数字类规律探究. 解题的关键是从已有的式子中抽象出相应的数字规律.

15. 如图, 三角形纸片 ABC 中, $AC=6$, $BC=9$, 分别沿与 BC , AC 平行的方向, 从靠近 A 的 AB 边的三等分点剪去两个角, 得到的平行四边形纸片的周长是_____.

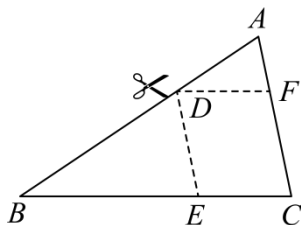


【答案】 14

【解析】

【分析】 由平行四边形的性质推出 $DF \parallel BC$, $DE \parallel AC$, 得到 $\triangle ADF \sim \triangle ABC$, $\triangle BDE \sim \triangle BAC$, 利用相似三角形的性质求解即可.

【详解】 解: 如图, 由题意得 $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$, 四边形 $DECF$ 是平行四边形,



$$\therefore DF \parallel BC, DE \parallel AC,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ABC, \triangle BDE \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}, \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{AB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore AC = 6, BC = 9,$$

$$\therefore DF = 3, DE = 4,$$

$\therefore$ 四边形 $DECF$ 平行四边形,

$$\therefore \text{平行四边形 } DECF \text{ 纸片的周长是 } 2(3+4) = 14,$$

故答案为: 14.

【点睛】 本题考查了平行四边形的性质, 相似三角形的判定和性质, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题.

16. 小明利用学习函数获得的经验研究函数 $y = x^2 + \frac{2}{x}$ 的性质, 得到如下结论:

- ①当 $x < -1$ 时, x 越小, 函数值越小;
- ②当 $-1 < x < 0$ 时, x 越大, 函数值越小;
- ③当 $0 < x < 1$ 时, x 越小, 函数值越大;
- ④当 $x > 1$ 时, x 越大, 函数值越大.

其中正确的是_____ (只填写序号).

【答案】 ②③④

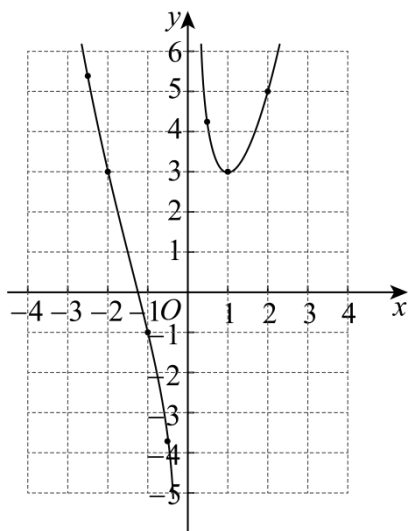
【解析】

【分析】 列表, 描点、连线, 画出图象, 根据图象回答即可.

【详解】 解: 列表,

x		-2.5	-2	-1	-0.5	0.5	1	2	
y		5.45	3	-1	-3.75	4.25	3	5	

描点、连线, 图象如下,



根据图象知：

- ①当 $x < -1$ 时， x 越小，函数值越大，错误；
- ②当 $-1 < x < 0$ 时， x 越大，函数值越小，正确；
- ③当 $0 < x < 1$ 时， x 越小，函数值越大，正确；
- ④当 $x > 1$ 时， x 越大，函数值越大，正确。

故答案为：②③④。

【点睛】本题考查二次函数、反比例函数与不等式等知识，解题的关键是理解题意，学会画出函数图象，利用图象解决问题，属于中考常考题型。

三、解答题（本大题共 7 小题，共 72 分）

17. (1) 解不等式 $5 - 2x < \frac{1-x}{2}$ ，并在数轴上表示解集。

(2) 下面是某同学计算 $\frac{a^2}{a-1} - a - 1$ 的解题过程：

$$\text{解：} \frac{a^2}{a-1} - a - 1$$

$$= \frac{a^2}{a-1} - \frac{(a-1)^2}{a-1} \quad \text{①}$$

$$= \frac{a^2 - (a-1)^2}{a-1} \quad \text{②}$$

$$= \frac{a^2 - a^2 + a - 1}{a-1} \quad \text{③}$$

$$= \frac{a-1}{a-1} = 1 \quad \text{④}$$

上述解题过程从第几步开始出现错误？请写出正确的解题过程.

【答案】(1) $x > 3$ (2) 从第①步开始出错，过程见解析

【解析】

【分析】(1) 根据解不等式的步骤，解不等式即可；

(2) 根据分式的运算法则，进行计算即可.

【详解】解：(1) $5 - 2x < \frac{1-x}{2}$,

去分母，得： $10 - 4x < 1 - x$,

移项，合并，得： $-3x < -9$,

系数化 1，得： $x > 3$ ；

(2) 从第①步开始出错，正确的解题过程如下：

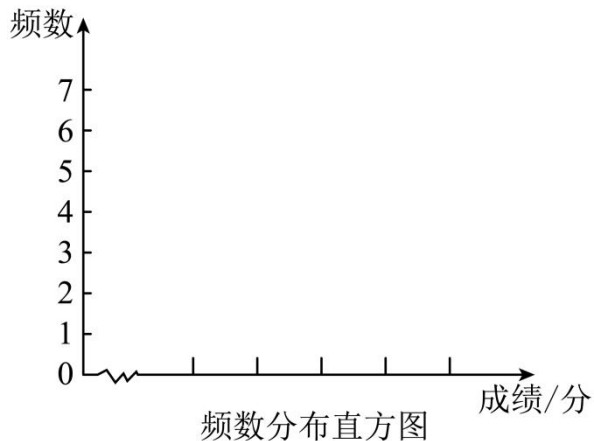
$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a-1} - a - 1 &= \frac{a^2}{a-1} - \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} \\&= \frac{a^2}{a-1} - \frac{a^2-1}{a-1} \\&= \frac{1}{a-1}.\end{aligned}$$

【点睛】本题考查解一元一次不等式，分式的加减运算. 熟练掌握解不等式的步骤，分式的运算法则，是解题的关键.

18. 某中学九年级共有 600 名学生，从中随机抽取了 20 名学生进行信息技术操作测试，测试成绩（单位：分）如下：

81 90 82 89 99 95 91 83 92 93
87 92 94 88 92 87 100 86 85 96

(1) 请按组距为 5 将数据分组，列出频数分布表，画出频数分布直方图；



(2) ①这组数据的中位数是_____；

②分析数据分布的情况（写出一条即可）_____；

（3）若 85 分以上（不含 85 分）成绩为优秀等次，请预估该校九年级学生在同等难度的信息技术操作考试中达到优秀等次的人数。

【答案】（1）见解析 （2）① 90.5；②测试成绩分布在 91～95 的较多（不唯一）；

（3）估计该校九年级学生在同等难度的信息技术操作考试中达到优秀等次的人数约为 480 人。

【解析】

【分析】（1）根据极差和组距，可以判断组数，确定分点后，列频数分布表进行统计即可；再将频数分布表中的数据用频数分布直方图表示出来，最后从图表中观察整体的情况，得出结论；

（2）①根据中位数的定义求解即可；

②根据频数分布直方图即可解答；

（3）用样本估计总体即可求解。

【小问 1 详解】

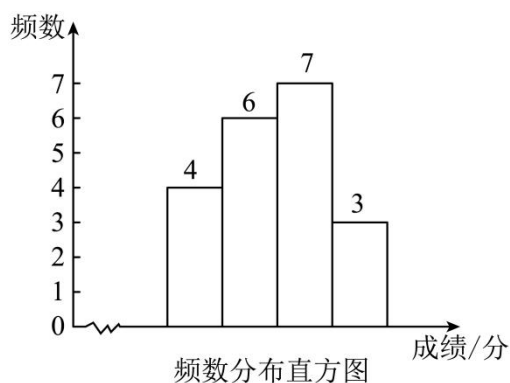
解：数据从小到大排列：81、82、83、85、86、87、87、88、89、90、91、92、92、92、93、94、95、96、99、100

最大值是 100，最小值为 81，极差为 $100 - 81 = 19$ ，若组距为 5，则分为 4 组，

频数分布表

成绩分组	81～85	86～90	91～95	96～100
划记	正	正一	正丁	下
频数	4	6	7	3

频数分布直方图，如图；



【小问 2 详解】

解：①中位数是 $\frac{90+91}{2} = 90.5$ ；

故答案为 90.5；

②测试成绩分布在 91~95 的较多（不唯一）；

【小问 3 详解】

解： $600 \times \frac{6+7+3}{20} = 480$ （人），

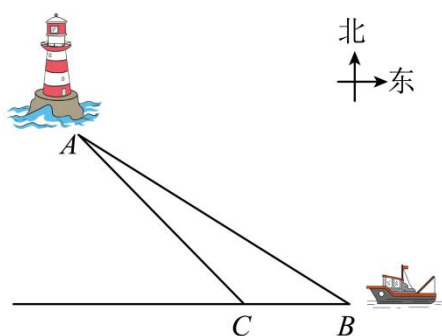
答：估计该校九年级学生在同等难度的信息技术操作考试中达到优秀等次的人数约为 480 人。

【点睛】本题考查频数分布直方图、频数分布表、用样本估计总体，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答。

19. 如图，灯塔 A 周围 9 海里内有暗礁。一渔船由东向西航行至 B 处，测得灯塔 A 在北偏西 58° 方向上，继续航行 6 海里后到达 C 处，测得灯塔 A 在西北方向上。如果渔船不改变航线继续向西航行，有没有触礁的危险？

（参 考 数 据：

$\sin 32^\circ \approx 0.530, \cos 32^\circ \approx 0.848, \tan 32^\circ \approx 0.625; \sin 58^\circ \approx 0.848, \cos 58^\circ \approx 0.530, \tan 58^\circ \approx 1.6$ ）

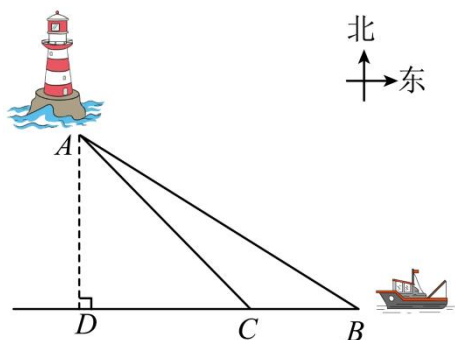


【答案】渔船没有触礁的危险

【解析】

【分析】过点 A 作 $AD \perp BC$ ，分别解 $\text{Rt}\triangle ADC$ 和 $\text{Rt}\triangle ADB$ ，求出 AD 的长，即可得出结论。

【详解】解：过点 A 作 $AD \perp BC$ ，由题意，得： $\angle ABC = 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$ ， $\angle ACD = 45^\circ$ ， $BC = 6$ ，
设 $AD = x$ ，



在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle ACD = 45^\circ$,

$$\therefore AD = CD = x,$$

$$\therefore BD = x + 6,$$

$$\text{在 } \text{Rt}\triangle ADB \text{ 中, } \tan \angle ABD = \frac{AD}{BD} = \frac{x}{x+6} \approx 0.625,$$

$$\therefore x = 10,$$

$$\therefore AD = 10,$$

$$\therefore 10 > 9,$$

$\therefore$ 渔船没有触礁的危险.

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用—方向角问题. 解题的关键是添加辅助线, 构造直角三角形.

20. 大学生小敏参加暑期实习活动, 与公司约定一个月 (30 天) 的报酬是 M 型平板电脑一台和 1500 元现金, 当她工作满 20 天后因故结束实习, 结算工资时公司给了她一台该型平板电脑和 300 元现金.

(1) 这台 M 型平板电脑价值多少元?

(2) 小敏若工作 m 天, 将上述工资支付标准折算为现金, 她应获得多少报酬 (用含 m 的代数式表示)?

【答案】 (1) 这台 M 型平板电脑的价值为 2100 元

(2) 她应获得 $120m$ 元的报酬

【解析】

【分析】 (1) 设这台 M 型平板电脑的价值为 x 元, 根据题意, 列出方程进行求解即可;

(2) 根据题意, 列出代数式即可.

【小问 1 详解】

解: 设这台 M 型平板电脑的价值为 x 元, 由题意, 得:

$$\frac{x+1500}{30} = \frac{x+300}{20},$$

解得: $x = 2100$;

$\therefore$ 这台 M 型平板电脑的价值为 2100 元;

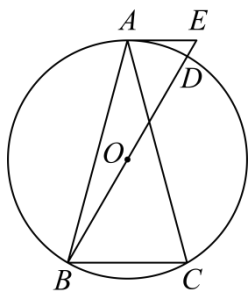
【小问 2 详解】

$$\text{解: 由题意, 得: } m \cdot \frac{2100+1500}{30} = 120m;$$

答: 她应获得 $120m$ 元的报酬.

【点睛】 本题考查一元一次方程的应用. 找准等量关系, 正确的列出方程, 是解题的关键.

21. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, BD 是 $\odot O$ 的直径, $AB = AC$, $AE \parallel BC$, E 为 BD 的延长线与 AE 的交点.



- (1) 求证: AE 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 若 $\angle ABC = 75^\circ, BC = 2$, 求 $\widehat{CD}$ 的长.

【答案】(1) 见解析 (2) $\frac{4\pi}{3}$

【解析】

【分析】(1) 连接 AO 并延长交 BC 于点 F , 根据 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 得到 $AO \perp BC$, 由平行线的性质, 得到 $AO \perp AE$, 即可得证.

(2) 连接 OC , 等边对等角, 求出 $\angle BAC$ 的度数, 圆周角定理求出 $\angle BOC$ 度数, 得到 $\triangle BOC$ 为等边三角形, 求出半径和 $\angle COD$ 的度数, 利用弧长公式进行计算即可.

【小问 1 详解】

证明: 连接 AO 并延长交 BC 于点 F ,

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,

$\therefore$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 三边中垂线的交点,

$\because AB = AC$,

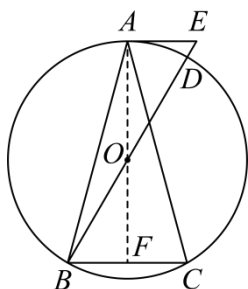
$\therefore AO \perp BC$,

$\because AE \parallel BC$,

$\therefore AO \perp AE$,

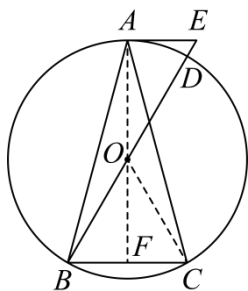
$\because AO$ 是 $\odot O$ 的半径,

$\therefore AE$ 是 $\odot O$ 的切线;



【小问 2 详解】

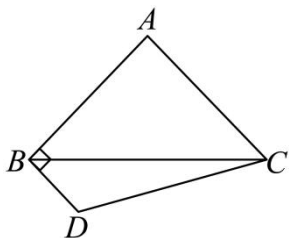
解: 连接 OC ,



$$\begin{aligned}
 &\because AB = AC, \\
 &\therefore \angle ABC = \angle ACB = 75^\circ, \\
 &\therefore \angle BAC = 180^\circ - 2 \times 75^\circ = 30^\circ, \\
 &\therefore \angle BOC = 2\angle BAC = 60^\circ, \\
 &\because OB = OC, \\
 &\therefore \triangle BOC \text{ 为等边三角形}, \\
 &\therefore OC = OB = BC = 2, \\
 &\therefore \angle COD = 180^\circ - \angle BOC = 120^\circ, \\
 &\therefore \widehat{CD} \text{ 的长为 } \frac{120 \times 2\pi}{180} = \frac{4\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

【点睛】 本题考查切线的判定，圆周角定理，求弧长，等腰三角形的性质，等边三角形的判定和性质．熟练掌握相关知识点，并灵活运用，是解题的关键．

22. 如图， $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$, $BD \perp AB$, $BC = AB + BD$.



- (1) 写出 AB 与 BD 的数量关系
- (2) 延长 BC 到 E ，使 $CE = BC$ ，延长 DC 到 F ，使 $CF = DC$ ，连接 EF ．求证： $EF \perp AB$ ．
- (3) 在 (2) 的条件下，作 $\angle ACE$ 的平分线，交 AF 于点 H ，求证： $AH = FH$ ．

【答案】 (1) $(\sqrt{2} - 1)AB = BD$,

(2) 见解析 (3) 见解析

【解析】

【分析】 (1) 勾股定理求得 $BC = \sqrt{2}AB$ ，结合已知条件即可求解；

(2) 根据题意画出图形，证明 $\triangle CBD \cong \triangle CEF$ ，得出 $\angle E = \angle DBC = 45^\circ$ ，则 $EF \parallel BD$ ，即可得证；

(3) 延长 BA, EF 交于点 M ，延长 CH 交 ME 于点 G ，根据角平分线以及平行线的性质证明 $EG = EC$ ，进而证明 $\triangle AHC \cong \triangle FHG$ (AAS)，即可得证。

【小问 1 详解】

解： $\because \angle A = 90^\circ, AB = AC$

$$\therefore BC = \sqrt{2}AB,$$

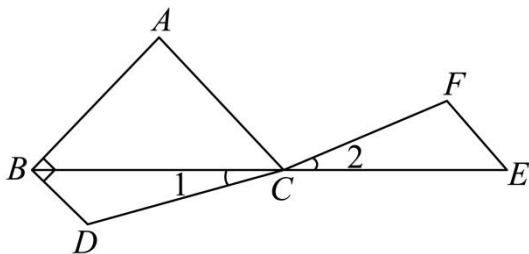
$$\therefore BC = AB + BD$$

$$\therefore \sqrt{2}AB = AB + BD$$

$$\text{即 } (\sqrt{2} - 1)AB = BD;$$

【小问 2 详解】

证明：如图所示，



$$\therefore \angle A = 90^\circ, AB = AC$$

$$\therefore \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore BD \perp AB,$$

$$\therefore \angle DBC = 45^\circ$$

$$\therefore CE = BC, \angle 1 = \angle 2, CF = DC$$

$$\therefore \triangle CBD \cong \triangle CEF$$

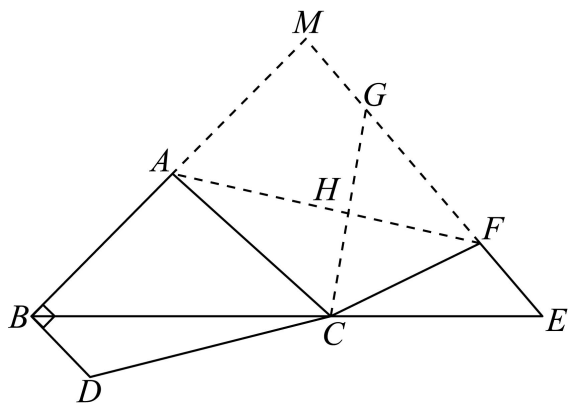
$$\therefore \angle E = \angle DBC = 45^\circ$$

$$\therefore EF \parallel BD$$

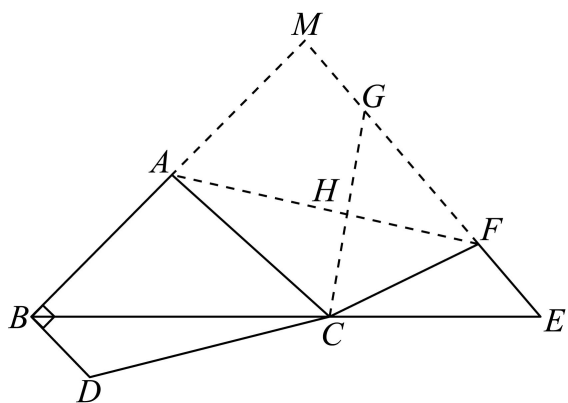
$$\therefore AB \perp EF$$

【小问 3 详解】

证明：如图所示，延长 BA, EF 交于点 M ，延长 CH 交 ME 于点 G ，



$\because EF \perp AB, AC \perp AB,$
 $\therefore ME \parallel AC,$
 $\therefore \angle CGE = \angle ACG$
 $\because CH$ 是 $\angle ACE$ 的角平分线,
 $\therefore \angle ACG = \angle ECG,$
 $\therefore \angle CGE = \angle ECG$
 $\therefore EG = EC$
 $\because \triangle CBD \cong \triangle CEF,$
 $\therefore EF = BD, CE = CB,$
 $\therefore EG = CB,$
 又 $\because BC = AB + BD,$
 $\therefore EG = AB + BD = AC + EF,$



即 $FG + EF = AC + EF,$
 $\therefore AC = EG,$
 又 $AC \parallel FG,$ 则 $\angle HAG = \angle HFG,$
 在 $\triangle AHC, \triangle FHG$ 中,

$$\begin{cases} \angle HAG = \angle HFG \\ \angle AHG = \angle FHG, \\ AC = FG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AHC \cong \triangle FHG (\text{AAS}),$$

$$\therefore AH = HF$$

【点睛】本题考查了全等三角形的判定，等腰三角形的性质与判定，勾股定理，平行线的性质与判定，熟练掌握全等三角形的性质与判定是解题的关键。

23. 综合与实践

问题情境

小莹妈妈的花卉超市以 15 元/盆的价格新购进了某种盆栽花卉，为了确定售价，小莹帮妈妈调查了附近 A , B , C , D , E 五家花卉店近期该种盆栽花卉的售价与日销售量情况，记录如下：

	售价 (元/盆)	日销售量 (盆)
A	20	50
B	30	30
C	18	54
D	22	46
E	26	38

数据整理

(1) 请将以上调查数据按照一定顺序重新整理，填写在下表中：

售价 (元/盆)					
日销售量 (盆)					

模型建立

(2) 分析数据的变化规律，找出日销售量与售价间的关系；

拓广应用

(3) 根据以上信息，小莹妈妈在销售该种花卉中，

①要想每天获得 400 元的利润，应如何定价？

②售价定为多少时，每天能够获得最大利润？

【答案】(1) 见解析 (2) 售价每涨价 2 元，日销售量少卖 4 盆

(3) ①定价为每盆 25 元或每盆 35 元时，每天获得 400 元的利润；②售价定为 30 元时，每天能够获得最大利润

【解析】

【分析】(1) 按照从小到大的顺序进行排列即可；

(2) 根据表格数据，进行求解即可；

(3) ①设定价应为 x 元，根据题意，列出一元二次方程，进行求解即可；

②设每天的利润为 w ，列出二次函数表示式，利用二次函数的性质，进行求解即可.

【小问 1 详解】

解：按照售价从低到高排列列出表格如下：

售价 (元/盆)	18	20	22	26	30
日销售量 (盆)	54	50	46	38	30

【小问 2 详解】由表格可知，售价每涨价 2 元，日销售量少卖 4 盆；

【小问 3 详解】

①设：定价应为 x 元，由题意，得：

$$(x-15) \left[54 - \frac{(x-18)}{2} \times 4 \right] = 400,$$

整理得： $-2x^2 + 120x - 1750 = 0$ ，

解得： $x_1 = 25, x_2 = 35$ ，

$\therefore$ 定价为每盆 25 元或每盆 35 元时，每天获得 400 元的利润；

②设每天的利润为 w ，由题意，得：

$$w = (x-15) \left[54 - \frac{(x-18)}{2} \times 4 \right] = -2x^2 + 120x - 1350,$$

$$\therefore w = -2x^2 + 120x - 1350 = -2(x-30)^2 + 450,$$

$$\therefore -2 < 0,$$

$\therefore$ 当 $x = 30$ 时， w 有最大值为 450 元.

答：售价定为 30 元时，每天能够获得最大利润.

【点睛】本题考查一元二次方程和二次函数的实际应用. 从表格中有效的获取信息，正确的列出方程和二次函数，是解题的关键.

