

二〇二三年东营市初中学业水平考试数学试题

(总分 120 分, 考试时间 120 分钟)

第 I 卷 (选择题 共 30 分)

一、选择题：本大题共 10 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确的选项选出来。每小题选对得 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分。

1. -2 的相反数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据只有符号不同的两个数互为相反数进行解答即可得。

【详解】解： -2 的相反数是 2 ，

故选：B。

【点睛】本题考查了相反数的定义，熟练掌握相反数的定义是解题的关键。

2. 下列运算结果正确的是 ()

- A. $x^3 \cdot x^3 = x^9$ B. $2x^3 + 3x^3 = 5x^6$
C. $(2x^2)^3 = 6x^6$ D. $(2+3x)(2-3x) = 4-9x^2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据同底数幂的乘法，合并同类项，积的乘方、幂的乘方，平方差公式，逐项分析判断即可求解。

【详解】解：A. $x^3 \cdot x^3 = x^6$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B. $2x^3 + 3x^3 = 5x^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

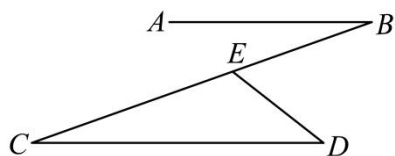
C. $(2x^2)^3 = 8x^6$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D. $(2+3x)(2-3x) = 4-9x^2$ ，故该选项正确，符合题意；

故选：D。

【点睛】本题考查了同底数幂的乘法，合并同类项，积的乘方、幂的乘方，平方差公式，熟练掌握以上运算法则以及乘法公式是解题的关键。

3. 如图， $AB \parallel CD$ ，点 E 在线段 BC 上 (不与点 B ， C 重合)，连接 DE ，若 $\angle D = 40^\circ$ ， $\angle BED = 60^\circ$ ，则 $\angle B =$ ()

A. 10° B. 20° C. 40° D. 60°

【答案】B

【解析】

【分析】根据三角形的外角的性质求得 $\angle C = 20^\circ$ ，根据平行线的性质即可求解。【详解】解： $\because \angle D = 40^\circ$ ， $\angle BED = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle C = \angle BED - \angle D = 20^\circ,$$

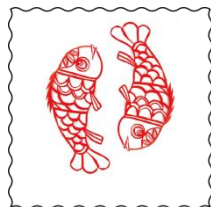
$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 20^\circ,$$

故选：B.

【点睛】本题考查了三角形的外角的性质，平行线的性质，熟练掌握以上知识是解题的关键。

4. 剪纸是中国最古老的民间艺术之一，先后入选中国国家级非物质文化遗产名录和人类非物质文化遗产代表作名录。小文购买了以“剪纸图案”为主题的5张书签，他想送给好朋友小乐一张。小文将书签背面朝上（背面完全相同），让小乐从中随机抽取一张，则小乐抽到的书签图案既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是（ ）

A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形；中心对称图形的定义：把一个图形绕着某一个点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点就是它的对称中心，进行逐一判断，然后根据概率公式即可求解。

【详解】解：共有5个书签图案，既是轴对称图形又是中心对称图形的是第2张与第4张书签图片，共2张，

$\therefore$ 小乐从中随机抽取一张，则小乐抽到的书签图案既是轴对称图形又是中心对称图形的概率是 $\frac{2}{5}$ ，

故选：C.

【点睛】本题考查了轴对称图形和中心对称图形的识别，概率公式求概率，熟练掌握以上知识是解题的关键.

5. 为扎实推进“五育”并举工作，加强劳动教育，东营市某中学针对七年级学生开设了“跟我学面点”烹饪课程，课程开设后学校花费 6000 元购进第一批面粉，用完后学校又花费 9600 元购进了第二批面粉，第二批面粉的采购量是第一批采购量的 1.5 倍，但每千克面粉价格提高了 0.4 元. 设第一批面粉采购量为 x 千克，依题意所列方程正确的是 ()

A. $\frac{9600}{1.5x} - \frac{6000}{x} = 0.4$ B. $\frac{9600}{x} - \frac{6000}{1.5x} = 0.4$ C. $\frac{6000}{1.5x} - \frac{9600}{x} = 0.4$ D. $\frac{6000}{x} - \frac{9600}{1.5x} = 0.4$

【答案】A

【解析】

【分析】表示出第二批面粉的采购量，根据“每千克面粉价格提高了 0.4 元”这一等量关系即可列方程.

【详解】设第一批面粉采购量为 x 千克，则设第二批面粉采购量为 $1.5x$ 千克，根据题意，得

$$\frac{9600}{1.5x} - \frac{6000}{x} = 0.4$$

故选：A

【点睛】本题考查列方程解决实际问题，找出题中的等量关系列出方程是解题的关键.

6. 如果圆锥侧面展开图的面积是 15π ，母线长是 5，则这个圆锥的底面半径是 ()

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】A

【解析】

【分析】根据圆锥侧面积公式，进行计算即可求解.

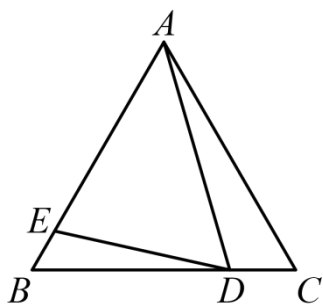
【详解】解：设这个圆锥的底面半径是 r ，依题意， $S = \pi rl = 15\pi$

$$\therefore r = \frac{15}{5} = 3$$

故选：A.

【点睛】本题考查了求圆锥底面半径，熟练掌握圆锥侧面积公式 $S = \pi rl$ 是解题的关键.

7. 如图， $\triangle ABC$ 为等边三角形，点 D ， E 分别在边 BC ， AB 上， $\angle ADE = 60^\circ$ ，若 $BD = 4DC$ ， $DE = 2.4$ ，则 AD 的长为 ()



- A. 1.8 B. 2.4 C. 3 D. 3.2

【答案】C

【解析】

【分析】证明 $\triangle ADC \sim \triangle DEB$ ，根据题意得出 $BD = \frac{4}{5}BC$ ，进而即可求解.

【详解】解： $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle ADE + \angle BDE = \angle C + \angle DAC, \quad \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle DAC,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle DEB$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{AC}{BD}$$

$$\therefore BD = 4DC,$$

$$\therefore BD = \frac{4}{5}BC,$$

$$\therefore \frac{AD}{DE} = \frac{AC}{BD} = \frac{BC}{\frac{4}{5}BC} = \frac{5}{4}$$

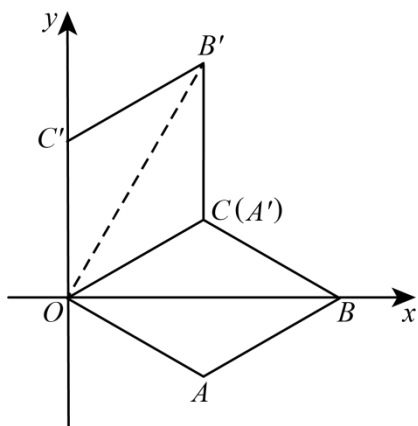
$$\therefore DE = 2.4$$

$$\therefore AD = \frac{5}{4} \times DE = 3,$$

故选：C.

【点睛】本题考查了相似三角形的性质与判定，等边三角形的性质，熟练掌握相似三角形的性质与判定是解题的关键.

8. 如图，在平面直角坐标系中，菱形 $OABC$ 的边长为 $2\sqrt{6}$ ，点 B 在 x 轴的正半轴上，且 $\angle AOC = 60^\circ$ ，将菱形 $OABC$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 60° ，得到四边形 $OA'B'C'$ （点 A' 与点 C 重合），则点 B' 的坐标是 ()



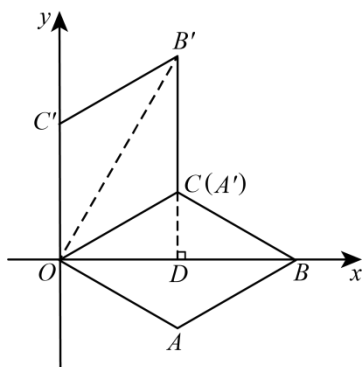
- A. $(3\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$ B. $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{6})$ C. $(3\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$ D. $(6\sqrt{2}, 3\sqrt{6})$

【答案】B

【解析】

【分析】延长 $B'C'$ 交 x 轴于点 D ，根据旋转的性质以及已知条件得出 $\angle B'DO = 90^\circ$ ，进而求得 OD, DB' 的长，即可求解。

【详解】解：如图所示，延长 $B'C'$ 交 x 轴于点 D ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，点 B 在 x 轴的正半轴上， OB 平分 $\angle AOC$ ， $\angle AOC = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle COB = \angle AOB = 30^\circ$ ， $\angle CBA = 60^\circ$

$\because$ 将菱形 $OABC$ 绕原点 O 逆时针方向旋转 60° ，

$\therefore \angle C'OC = 60^\circ$ ，则 $\angle OB'C = \frac{1}{2} \angle C'B'C = 30^\circ$ ， $AB = CB'$

$\therefore \angle B'OD = 60^\circ$

$\therefore \angle B'DO = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CDO$ 中， $OC = B'C = 2\sqrt{6}$

$\therefore CD = \frac{1}{2}OC = \sqrt{6}$ ， $OD = \sqrt{3}CD = \sqrt{3} \times \sqrt{6} = 3\sqrt{2}$

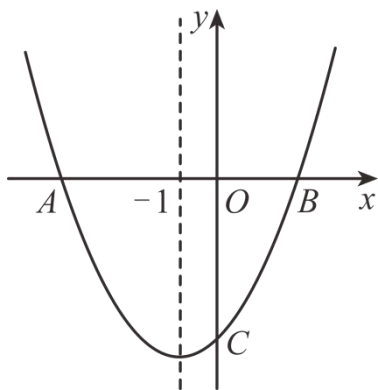
$\therefore DB' = 3\sqrt{6}$ ，

$$\therefore B'(3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}),$$

故选：B.

【点睛】本题考查了旋转的性质，菱形的性质，勾股定理，含 30 度角的直角三角形的性质，坐标与图形，熟练掌握菱形的性质是解题的关键.

9. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 A , B ，与 y 轴交于点 C ，对称轴为直线 $x = -1$ ，若点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，则下列结论正确的是 ()



- A. $2a + b = 0$
- B. $4a - 2b + c > 0$
- C. $x = 2$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的一个根
- D. 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 在抛物线上，当 $x_1 > x_2 > -1$ 时 $y_1 < y_2 < 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据对称轴为 $x = -1$ 得到 $2a - b = 0$ ，即可判断 A 选项；根据当 $x = -2$ 时， $y = 4a - 2b + c < 0$ ，即可判断 B 选项；根据当 $x = 2$ 时， $y = 4a + 2b + c = 0$ 即可判断 C 选项；根据当 $x > -1$ 时， y 随着 x 的增大而增大即可判断 D 选项.

【详解】解：A. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$ ，则 $-\frac{b}{2a} = -1$ ，则 $b = 2a$ ，即 $2a - b = 0$ ，故选项错误，不符合题意；

B. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$ ，点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，当 $x = -2$ 时， $y = 4a - 2b + c < 0$ ，故选项错误，不符合题意；

C. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x = -1$ ，若点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，可得点 $B(2, 0)$ ，当

$x=2$ 时, $y=4a+2b+c=0$, 即 $x=2$ 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的一个根, 故选项正确, 符合题意;

D. $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的对称轴为直线 $x=-1$, 开口向上,

$\therefore$ 当 $x > -1$ 时, y 随着 x 的增大而增大,

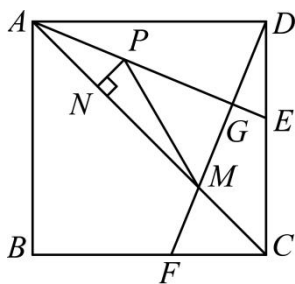
$\therefore$ 点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 在抛物线上, 当 $x_1 > x_2 > -1$ 时 $y_1 > y_2$, 故选项错误, 不符合题意;

故选: C.

【点睛】此题考查二次函数的图象和性质, 数形结合是解题的关键.

10. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长为 4, 点 E , F 分别在边 DC , BC 上, 且 $BF=CE$, AE 平分 $\angle CAD$, 连接 DF , 分别交 AE , AC 于点 G , M , P 是线段 AG 上的一个动点, 过点 P 作 $PN \perp AC$ 垂足为 N , 连接 PM , 有下列四个结论: ① AE 垂直平分 DM ; ② $PM+PN$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$; ③ $CF^2 = GE \cdot AE$;

④ $S_{\triangle ADM} = 6\sqrt{2}$. 其中正确的是 ()



A. ①②

B. ②③④

C. ①③④

D. ①③

【答案】D

【解析】

【分析】根据正方形的性质和三角形全等即可证明 $\angle DAE = \angle FDC$, 通过等量转化即可求证 $AG \perp DM$, 利用角平分线的性质和公共边即可证明 $\triangle ADG \cong \triangle AMG$ (ASA), 从而推出①的结论; 利用①中的部分结果可证明 $\triangle ADE \sim \triangle DGE$ 推出 $DE^2 = GE \cdot AE$, 通过等量代换可推出③的结论; 利用①中的部分结果和勾股定理推出 AM 和 CM 长度, 最后通过面积法即可求证④的结论不对; 结合①中的结论和③的结论可求出 $PM+PN$ 的最小值, 从而证明②不对.

【详解】解: $\because ABCD$ 为正方形,

$\therefore BC = CD = AD$, $\angle ADE = \angle DCF = 90^\circ$,

$\because BF = CE$,

$\therefore DE = FC$,

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle DCF \text{ (SAS)}.$$

$$\therefore \angle DAE = \angle FDC,$$

$$\because \angle ADE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG + \angle FDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADG + \angle DAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGD = \angle AGM = 90^\circ.$$

$$\because AE \text{ 平分 } \angle CAD,$$

$$\therefore \angle DAG = \angle MAG.$$

$$\because AG = AG,$$

$$\therefore \triangle ADG \cong \triangle AMG \text{ (ASA)}.$$

$$\therefore DG = GM,$$

$$\because \angle AGD = \angle AGM = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \text{ 垂直平分 } DM,$$

故①正确.

由①可知, $\angle ADE = \angle DGE = 90^\circ$, $\angle DAE = \angle GDE$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DGE,$$

$$\therefore \frac{DE}{GE} = \frac{AE}{DE},$$

$$\therefore DE^2 = GE \cdot AE,$$

由①可知 $DE = CF$,

$$\therefore CF^2 = GE \cdot AE.$$

故③正确.

$\because ABCD$ 为正方形, 且边长为 4,

$$\therefore AB = BC = AD = 4,$$

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{2}AB = 4\sqrt{2}.$$

由①可知, $\triangle ADG \cong \triangle AMG \text{ (ASA)},$

$$\therefore AM = AD = 4,$$

$$\therefore CM = AC - AM = 4\sqrt{2} - 4.$$

由图可知, $\triangle DMC$ 和 $\triangle ADM$ 等高, 设高为 h ,

$$\therefore S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle DMC},$$

$$\therefore \frac{4 \times h}{2} = \frac{4 \times 4}{2} - \frac{(4\sqrt{2} - 4) \cdot h}{2},$$

$$\therefore h = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle ADM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

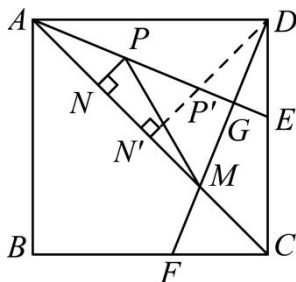
故④不正确.

由①可知, $\triangle ADG \cong \triangle AMG$ (ASA),

$$\therefore DG = GM,$$

$\therefore M$ 关于线段 AG 的对称点为 D , 过点 D 作 $DN' \perp AC$, 交 AC 于 N' , 交 AE 于 P' ,

$\therefore PM + PN$ 最小即为 DN' , 如图所示,



由④可知 $\triangle ADM$ 的高 $h = 2\sqrt{2}$ 即为图中的 DN' ,

$$\therefore DN' = 2\sqrt{2}.$$

故②不正确.

综上所述, 正确的是①③.

故选: D.

【点睛】本题考查的是正方形的综合题, 涉及到三角形相似, 最短路径, 三角形全等, 三角形面积法, 解题的关键在于是否能正确找出最短路径以及运用相关知识点.

第Ⅱ卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题: 本大题共 8 小题, 其中 11-14 题每小题 3 分, 15-18 题每小题 4 分, 共 28 分. 只要求填写最后结果.

11. 我国古代数学家祖冲之推算出 π 的近似值为 $\frac{355}{113}$, 它与 π 的误差小于 0.0000003, 将 0.0000003 用科学记数法可以表示为_____.

【答案】 3×10^{-7}

【解析】

【分析】绝对值小于1的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定.

【详解】解：0.0000003 用科学记数法表示为 3×10^{-7} .

故答案为： 3×10^{-7} .

【点睛】本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的0的个数所决定.

12. 因式分解： $3ma^2 - 6mab + 3mb^2 =$ _____.

【答案】 $3m(a-b)^2$

【解析】

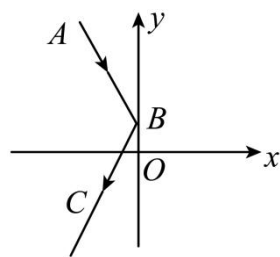
【分析】根据因式分解中的提公因式法和完全平方公式即可求出答案.

【详解】解： $3ma^2 - 6mab + 3mb^2$
 $= 3m(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= 3m(a-b)^2$

故答案为： $3m(a-b)^2$.

【点睛】本题考查了因式分解，涉及到提公因式法和完全平方公式，解题的关键需要掌握完全平方公式.

13. 如图，一束光线从点 $A(-2,5)$ 出发，经过 y 轴上的点 $B(0,1)$ 反射后经过点 $C(m,n)$ ，则 $2m-n$ 的值是_____.

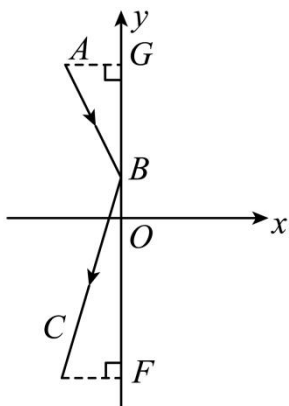


【答案】-1

【解析】

【分析】如图，过点 A 作 $AG \perp y$ 轴，点 C 作 $CF \perp y$ 轴，垂足分别为 G ， F ，可证 $\triangle AGB \sim \triangle CFB$ ，得比例线段 $\frac{BF}{CF} = \frac{BG}{AG}$ ，由 $A(-2,5)$ ， $B(0,1)$ 得线段长度 $AG=2$ ， $BG=4$ ，代入比例线段求解.

【详解】如图，过点 A 作 $AG \perp y$ 轴，点 C 作 $CF \perp y$ 轴，垂足分别为 G, F



由题意知， $\angle ABG = \angle CBF$ ， $\angle AGB = \angle CFB$

$$\therefore \triangle AGB \sim \triangle CFB$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{BG}{AG}$$

$$\therefore A(-2, 5), B(0, 1)$$

$$\therefore AG = 2, BG = 5 - 1 = 4$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{BG}{AG} = 2$$

$$\therefore \frac{BF}{CF} = \frac{1-n}{-m} = 2$$

$$\therefore 2m - n = -1$$

故答案为：-1

【点睛】本题考查相似三角形的判定和性质，直角坐标系内点坐标的含义，添加辅助线构建相似三角形是解题的关键。

14. 为备战东营市第十二届运动会，某县区对甲、乙、丙、丁四名射击运动员进行射击测试，他们射击测试成绩的平均数 $\bar{x}$ （单位：环）及方差 S^2 （单位：环²）如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
$\bar{x}$	9.6	8.9	9.6	9.6
S^2	1.4	0.8	2.3	0.8

根据表中数据，要从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛，应选择_____.

【答案】丁

【解析】

【分析】结合表中数据，先找出平均数最大的运动员；再根据方差的意义，找出方差最小的运动员即可.

【详解】解：选择一名成绩好的运动员，从平均数最大的运动员中选取，

由表可知，甲，丙，丁的平均值最大，都是9.6，

$\therefore$ 从甲，丙，丁中选取，

$\because$ 甲的方差是1.4，丙的方差是2.3，丁的方差是0.8，

$$\therefore S_{\text{丁}}^2 < S_{\text{甲}}^2 < S_{\text{丙}}^2$$

$\therefore$ 发挥最稳定的运动员是丁，

$\therefore$ 从中选择一名成绩好又发挥稳定的运动员参加比赛，应该选择丁.

故答案为：丁.

【点睛】本题重点考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

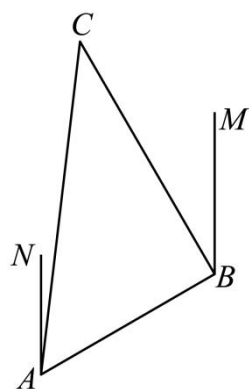
15. 一艘船由A港沿北偏东 60° 方向航行30km至B港，然后再沿北偏西 30° 方向航行40km至C港，则A，C两港之间的距离为_____km.

【答案】50

【解析】

【分析】根据题意画出图形，易证 $\triangle ABC$ 是直角三角形，利用勾股定理即可求解.

【详解】如图，根据题意，得 $AN \parallel BM$ ， $\angle NAB = 60^\circ$ ， $\angle MBC = 30^\circ$ ， $AB = 30\text{km}$ ， $BC = 40\text{km}$



$$\therefore AN \parallel BM$$

$$\therefore \angle MBA = 180^\circ - \angle NAB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABM - \angle MBC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$$

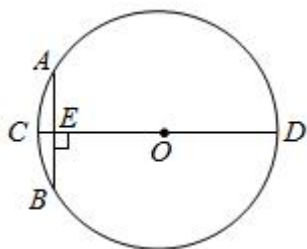
$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50(\text{km})$$

即A，C两港之间的距离为50 km.

故答案为：50

【点睛】本题考查方位角，勾股定理，根据题意画出图形，证明 $\triangle ABC$ 是直角三角形是解题的关键。

16. “圆材埋壁”是我国古代数学名著《九章算术》中的一个问题：“今有圆材，埋在壁中，不知大小，以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问：径几何？”．用现在的几何语言表达即：如图， CD 为 $\odot O$ 的直径，弦 $AB \perp CD$ ，垂足为点 E ， $CE = 1$ 寸， $AB = 10$ 寸，则直径 CD 的长度是_____寸。

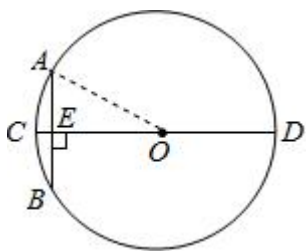


【答案】26

【解析】

【分析】连接 OA 构成直角三角形，先根据垂径定理，由 DE 垂直 AB 得到点 E 为 AB 的中点，由 $AB = 6$ 可求出 AE 的长，再设出圆的半径 OA 为 x ，表示出 OE ，根据勾股定理建立关于 x 的方程，求解方程可得 $2x$ 的值，即为圆的直径。

【详解】解：连接 OA ，



$\because AB \perp CD$ ，且 $AB = 10$ 寸，

$\therefore AE = BE = 5$ 寸，

设圆 O 的半径 OA 的长为 x ，则 $OC = OD = x$ ，

$\because CE = 1$ ，

$\therefore OE = x - 1$ ，

在直角三角形 AOE 中，根据勾股定理得：

$x^2 - (x - 1)^2 = 5^2$ ，化简得： $x^2 - x^2 + 2x - 1 = 25$ ，

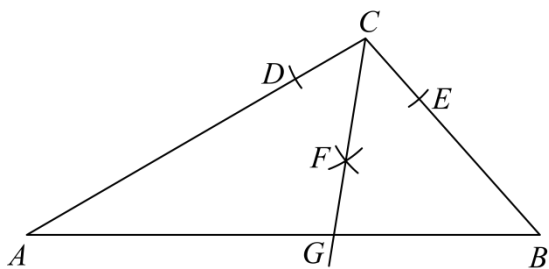
即 $2x = 26$ ，

$\therefore CD = 26$ （寸）。

故答案为：26。

【点睛】本题考查了垂径定理和勾股定理，解题的关键是正确作出辅助线构造直角三角形。

17. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以点 C 为圆心，任意长为半径作弧，分别交 AC ， BC 于点 D ， E ；分别以点 D ， E 为圆心，大于 $\frac{1}{2}DE$ 的长为半径作弧，两弧交于点 F ；作射线 CF 交 AB 于点 G ，若 $AC = 9$ ， $BC = 6$ ， $\triangle BCG$ 的面积为 8，则 $\triangle ACG$ 的面积为_____.



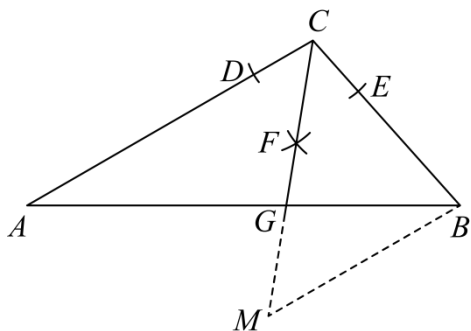
【答案】 12

【解析】

【分析】 过点 B 作 $BM \parallel AC$ 交 CG 的延长线于点 M ，证明 $\triangle ACG \sim \triangle BMG$ ，得出 $\frac{AG}{GB} = \frac{AC}{BM} = \frac{AC}{BC}$ ，

根据 $\frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle BCG}} = \frac{AG}{GB} = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ ，即可求解.

【详解】 解：如图所示，过点 B 作 $BM \parallel AC$ 交 CG 的延长线于点 M ，



$$\therefore \angle ACM = \angle CMB$$

由作图可得 CG 是 $\angle ACB$ 的角平分线，

$$\therefore \angle ACM = \angle BCM$$

$$\therefore \angle BCM = \angle CMB$$

$$\therefore BC = BM$$

$$\therefore BM \parallel AC$$

$$\therefore \triangle ACG \sim \triangle BMG$$

$$\therefore \frac{AG}{GB} = \frac{AC}{BM} = \frac{AC}{BC}$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ACG}}{S_{\triangle BCG}} = \frac{AG}{GB} = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2},$$

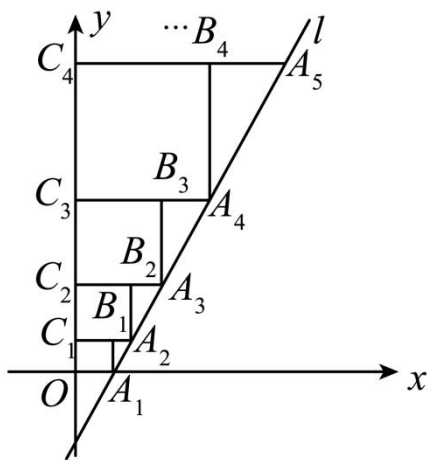
$\therefore \triangle BCG$ 的面积为 8,

$\therefore \triangle ACG$ 的面积为 12,

故答案为: 12.

【点睛】 本题考查了相似三角形的性质与判定, 作角平分线, 熟练掌握基本作图以及相似三角形的性质与判定是解题的关键.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 与 x 轴交于点 A_1 , 以 OA_1 为边作正方形 $A_1B_1C_1O$ 点 C_1 在 y 轴上, 延长 C_1B_1 交直线 l 于点 A_2 , 以 C_1A_2 为边作正方形 $A_2B_2C_2C_1$, 点 C_2 在 y 轴上, 以同样的方式依次作正方形 $A_3B_3C_3C_2$, ..., 正方形 $A_{2023}B_{2023}C_{2023}C_{2022}$, 则点 B_{2023} 的横坐标是_____.



【答案】 $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2022}$

【解析】

【分析】 分别求出点 B_1 的横坐标是 1, 点 B_2 的横坐标是 $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$, 点 B_3 的横坐标是 $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$,

找到规律, 得到答案见即可.

【详解】 解: 当 $y = 0$, $0 = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$, 解得 $x = 1$,

$\therefore$ 点 $A_1(1, 0)$,

$\therefore A_1B_1C_1O$ 是正方形,

$\therefore OA_1 = A_1B_1 = OC_1 = 1$,

$\therefore$ 点 $B_1(1, 1)$,

$\therefore$ 点 B_1 的横坐标是 1,

当 $y=1$ 时, $1=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$, 解得 $x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\therefore \text{点 } A_2 \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right),$$

$\therefore A_2B_2C_2C_1$ 是正方形,

$$\therefore A_2B_2 = C_1C_2 = A_2C_1 = 1+\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \text{点 } B_2 \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, 2+\frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

即点 B_2 的横坐标是 $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$,

当 $y=2+\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $2+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$, 解得 $x=\frac{2}{3}(\sqrt{3}+2)$,

$$\therefore \text{点 } A_3 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3}, 2+\frac{\sqrt{3}}{3} \right),$$

$\therefore A_3B_3C_3C_2$ 是正方形,

$$\therefore A_3B_3 = C_2C_3 = A_3C_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{点 } B_3 \text{ 的横坐标是 } \frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{4}{3} = \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2,$$

.....

以此类推, 则点 B_{2023} 的横坐标是 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{2022}$

故答案为: $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{2022}$

【点睛】 此题是点的坐标规律题, 考查了二次函数的图象和性质、正方形的性质等知识, 数形结合是解题的关键.

三、解答题: 本大题共 7 小题, 共 62 分. 解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

19. (1) 计算: $\sqrt{3} \tan 45^\circ - (2023 - \pi)^0 + |2\sqrt{3} - 2| + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} - \sqrt{27}$;

(2) 先化简，再求值： $\frac{x^2-x}{x^2+2x+1} \div \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x}\right)$ ，化简后，从 $-2 < x < 3$ 的范围内选择一个你喜欢的整数作为 x 的值代入求值.

【答案】(1) 1; (2) $\frac{x^2}{x+1}$, 当 $x=2$ 时, 原式 $=\frac{4}{3}$.

【解析】

【分析】(1) 根据特殊角的三角函数值，零指数幂，化简绝对值，负整数指数幂，二次根式的性质，分别计算即可求解；

(2) 先根据分式的加减计算括号内的，同时将除法转化为乘法，再根据分式的性质化简，最后将字母的值代入求解.

【详解】解：(1) 原式 $=\sqrt{3} \times 1 - 1 + 2\sqrt{3} - 2 + 4 - 3\sqrt{3}$
 $=1$;

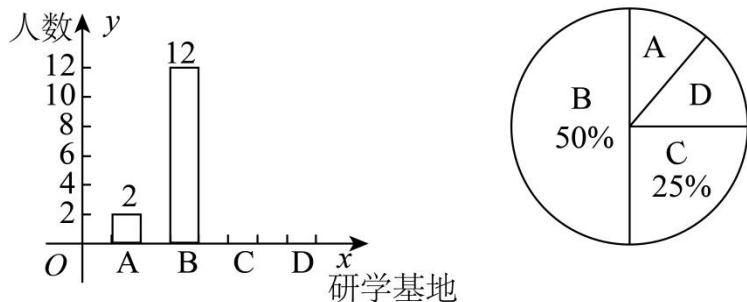
$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \div \frac{2x-(x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x(x+1)}{x-1} \\ &= \frac{x^2}{x+1}; \end{aligned}$$

由题意可知： $x \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时, 原式 $=\frac{4}{3}$.

【点睛】本题考查了实数的混合运算，分式化简求值，解题关键是熟练运用分式运算法则，掌握特殊角的三角函数值，零指数幂，化简绝对值，负整数指数幂，二次根式的性质进行求解.

20. 随着新课标的颁布，为落实立德树人根本任务，东营市各学校组织了丰富多彩的研学活动，得到家长、社会的一致好评. 某中学为进一步提高研学质量，着力培养学生的核心素养，选取了A. “青少年科技馆”，B. “黄河入海口湿地公园”，C. “孙子文化园”，D. “白鹭湖营地”四个研学基地进行研学. 为了解学生对以上研学基地的喜欢情况，随机抽取部分学生进行调查统计（每名同学只能选择一个研学基地），并将调查结果绘制成了两幅不完整的统计图（如图所示）.



请根据统计图中的信息解答下列问题:

- (1) 在本次调查中, 一共抽取了____名学生, 在扇形统计图中 A 所对应圆心角的度数为____;
- (2) 将上面的条形统计图补充完整;
- (3) 若该校共有 480 名学生, 请你估计选择研学基地 C 的学生人数;
- (4) 学校想从选择研学基地 D 的学生中选取两名学生了解他们对研学活动的看法, 已知选择研学基地 D 的学生中恰有两名女生, 请用列表法或画树状图的方法求出所选 2 人都是男生的概率.

【答案】 (1) 24, 30°

(2) 见解析; (3) 120 名;

(4) $\frac{1}{6}$.

【解析】

【分析】 (1) 用选择研学基地 B 的人数除以其所占百分比, 可得本次被调查的学生人数; 用 A 的学生人数除以本次被调查的学生人数再乘以 360° 可得选择研学基地 A 所对应的圆心角的度数.

(2) 求出选择研学基地 C 、 D 的学生人数, 补全条形统计图即可.

(3) 用选择研学基地 C 所占百分比乘以 480 即可.

(4) 画树状图得出所有等可能的结果数和所选的两人恰好都是男生的结果数, 再利用概率公式可得出答案.

【小问 1 详解】

解: 样本容量为 $12 \div 50\% = 24$ (名), 即一共抽取了 24 名学生;

A 所对应圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{2}{24} = 30^\circ$;

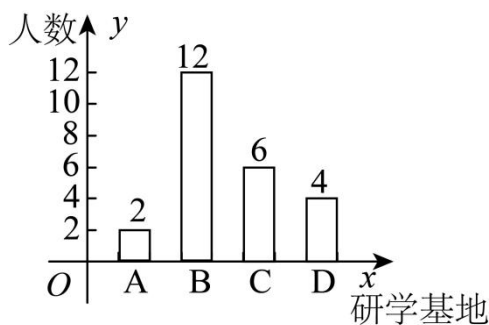
故答案为: 24, 30° ;

【小问 2 详解】

解: 选择研学基地 C 的学生人数 $24 \times 25\% = 6$ (名),

选择研学基地 D 的学生人数 $24 - 2 - 12 - 6 = 4$ (名),

补全图形如图所示:



【小问 3 详解】

解： $480 \times 25\% = 120$ (名)，

答：该校选择研学基地 C 的学生人数是 120 名。

【小问 4 详解】

解：选择研学基地 D 的学生有 2 名男生和 2 名女生，画树状图如下：

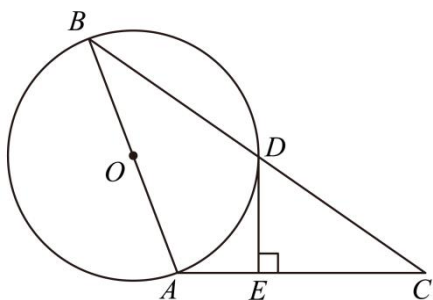


共有 12 种等可能的结果，其中所选 2 人都是男生的结果有 2 种，

$$\therefore P(\text{所选 2 人都是男生}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

【点睛】 本题考查列表法与树状图法、条形统计图、扇形统计图，能够读懂条形统计图和扇形统计图，掌握列表法与树状图法以及概率公式是解答本题的关键。

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D ， $DE \perp AC$ ，垂足为 E 。



(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $\angle C = 30^\circ$ ， $CD = 2\sqrt{3}$ ，求 $\widehat{BD}$ 的长。

【答案】 (1) 见解析；

(2) $\frac{4}{3}\pi$.

【解析】

【分析】 (1) 如图： OD ，然后根据等边对等角可得 $\angle B = \angle ODB$ 、 $\angle B = \angle C$ 即 $\angle ODB = \angle C$ ，再根据

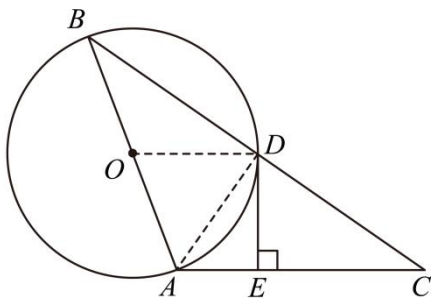
$OD \parallel AC$ 可得 $\angle ODE = \angle DEC$ ，进而得到 $\angle ODE = 90^\circ$ 即可证明结论；

(2) 如图：连接 AD ，有圆周角定理可得 $AD \perp BC$ ，再解直角三角形可得 $AC = 4$ ，进而得到

$OB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AC = 2$ ，然后说明 $\angle BOD = 120^\circ$ ，最后根据弧长公式即可解答.

【小问 1 详解】

证明：如图：连接 OD



$\because OB = OD$,
 $\therefore \angle B = \angle ODB$,
 $\because AB = AC$,
 $\therefore \angle B = \angle C$,
 $\therefore \angle ODB = \angle C$,
 $\therefore OD \parallel AC$,
 $\therefore \angle ODE = \angle DEC$.
 $\because DE \perp AC$,
 $\therefore \angle DEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle ODE = 90^\circ$,
 $\because OD$ 是 $\odot O$ 的半径,
 $\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

【小问 2 详解】

解：如图：连接 AD

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore AD \perp BC$,

在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\angle C = 30^\circ$, $CD = 2\sqrt{3}$,

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{AC} ,$$

$$\therefore AC = 4 ,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC = 2,$$

$$\because \angle C = 30^\circ,$$

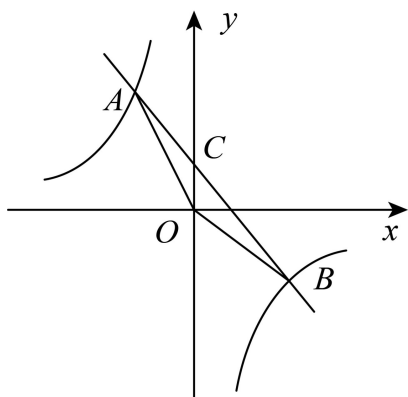
$$\therefore \angle B = \angle ODB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = 120^\circ,$$

$$\therefore l_{\widehat{BD}} = \frac{120 \times \pi \times 2}{180} = \frac{4}{3} \pi.$$

【点睛】本题主要考查了圆的切线证明、圆周角定理、解直角三角形、等腰三角形的性质等知识点，灵活运用相关知识是解答本题的关键.

22. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = ax + b$ ($a < 0$) 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 交于 $A(-m, 3m)$, $B(4, -3)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 连接 OA , OB .



(1) 求反比例函数和一次函数的表达式;

(2) 求 $\triangle AOB$ 的面积;

(3) 请根据图象直接写出不等式 $\frac{k}{x} < ax + b$ 的解集.

【答案】(1) $y = -\frac{12}{x}$, $y = -\frac{3}{2}x + 3$;

(2) 9; (3) $x < -2$ 或 $0 < x < 4$.

【解析】

【分析】(1) 把点 B 代入反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), 即可得到反比例函数的解析式; 把点 A 代入反比例函数, 即可求得点 A 的坐标; 把点 A 、 B 的坐标代入一次函数 $y = ax + b$ ($a < 0$) 即可求得 a 、 b 的值, 从而得到一次函数的解析式;

(2) $\triangle AOB$ 的面积是 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOC$ 的面积之和, 利用面积公式求解即可;

(3) 利用图象, 找到反比例函数图象在一次函数图象下方所对应的 x 的范围, 直接得出结论.

【小问 1 详解】

$\therefore$ 点 $B(4, -3)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$$\therefore -3 = \frac{k}{4},$$

解得: $k = -12$

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y = -\frac{12}{x}$.

$\therefore A(-m, 3m)$ 在反比例函数 $y = -\frac{12}{x}$ 的图象上,

$$\therefore 3m = -\frac{12}{-m},$$

解得 $m_1 = 2$, $m_2 = -2$ (舍去).

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-2, 6)$.

$\therefore$ 点 A, B 在一次函数 $y = ax + b$ 的图象上,

把点 $A(-2, 6)$, $B(4, -3)$ 分别代入, 得 $\begin{cases} -2a + b = 6 \\ 4a + b = -3 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} a = -\frac{3}{2}, \\ b = 3 \end{cases}$$

$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y = -\frac{3}{2}x + 3$;

【小问 2 详解】

$\therefore$ 点 C 为直线 AB 与 y 轴的交点,

$\therefore$ 把 $x = 0$ 代入函数 $y = -\frac{3}{2}x + 3$, 得 $y = 3$

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 3)$

$\therefore OC = 3$,

$$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC}$$

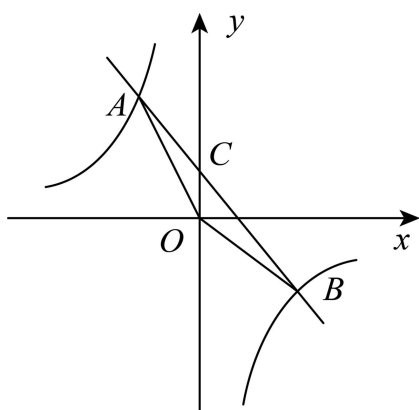
$$= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot |x_A| + \frac{1}{2} \cdot OC \cdot |x_B|$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4$$

$$= 9.$$

【小问 3 详解】

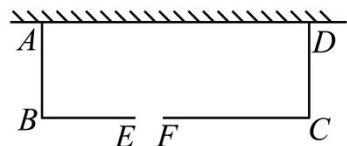
由图象可得，不等式 $\frac{k}{x} < ax + b$ 的解集是 $x < -2$ 或 $0 < x < 4$.



【点睛】此题是反比例函数与一次函数的交点问题，考查了待定系数法

求函数的解析式，三角形面积，函数与不等式的关系，求出两个函数解析式是解本题的关键.

23. 如图，老李想用长为 70m 的栅栏，再借助房屋的外墙（外墙足够长）围成一个矩形羊圈 $ABCD$ ，并在边 BC 上留一个 2m 宽的门（建在 EF 处，另用其他材料）.



(1) 当羊圈的长和宽分别为多少米时，能围成一个面积为 640 m^2 的羊圈？

(2) 羊圈的面积能达到 650 m^2 吗？如果能，请你给出设计方案；如果不能，请说明理由.

【答案】(1) 当羊圈的长为 40m，宽为 16m 或长为 32m，宽为 20m 时，能围成一个面积为 640 m^2 的羊圈；

(2) 不能，理由见解析.

【解析】

【分析】(1) 设矩形 $ABCD$ 的边 $AB = x \text{ m}$ ，则边 $BC = 70 - 2x + 2 = (72 - 2x) \text{ m}$ ，根据题意列出一元二次方程，解方程即可求解；

(2) 同 (1) 的方法建立方程，根据方程无实根即可求解.

【小问 1 详解】

解：设矩形 $ABCD$ 的边 $AB = x \text{ m}$ ，则边 $BC = 70 - 2x + 2 = (72 - 2x) \text{ m}$.

根据题意，得 $x(72 - 2x) = 640$.

化简，得 $x^2 - 36x + 320 = 0$.

解得 $x_1 = 16$ ， $x_2 = 20$.

当 $x = 16$ 时， $72 - 2x = 72 - 32 = 40$ ；

当 $x = 20$ 时, $72 - 2x = 72 - 40 = 32$.

答: 当羊圈的长为 40m, 宽为 16m 或长为 32m, 宽为 20m 时, 能围成一个面积为 640 m^2 的羊圈.

【小问 2 详解】

解: 不能, 理由如下:

由题意, 得 $x(72 - 2x) = 650$.

化简, 得 $x^2 - 36x + 325 = 0$.

$\therefore \Delta = (-36)^2 - 4 \times 325 = -4 < 0$,

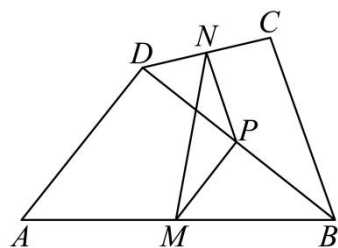
$\therefore$ 一元二次方程没有实数根.

$\therefore$ 羊圈的面积不能达到 650 m^2 .

【点睛】 本题考查了一元二次方程的应用, 根据题意列出一元二次方程, 解一元二次方程是解题的关键.

24. (1) 用数学的眼光观察.

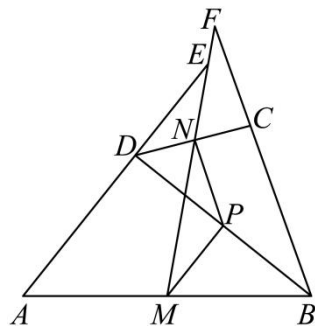
如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, P 是对角线 BD 的中点, M 是 AB 的中点, N 是 DC 的中点, 求证: $\angle PMN = \angle PNM$.



(2) 用数学的思维思考.

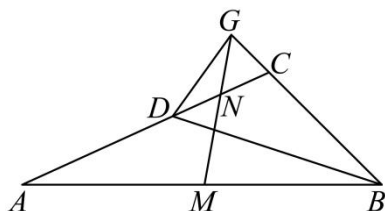
如图, 延长图中的线段 AD 交 MN 的延长线于点 E , 延长线段 BC 交 MN 的延长线于点 F , 求证:

$\angle AEM = \angle F$.



(3) 用数学的语言表达.

如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC < AB$, 点 D 在 AC 上, $AD = BC$, M 是 AB 的中点, N 是 DC 的中点, 连接 MN 并延长, 与 BC 的延长线交于点 G , 连接 GD , 若 $\angle ANM = 60^\circ$, 试判断 $\triangle CGD$ 的形状, 并进行证明.



【答案】(1) 见解析；(2) 见解析；(3) $\triangle CGD$ 是直角三角形，证明见解析.

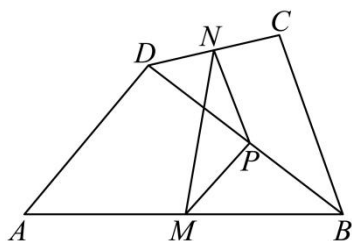
【解析】

【分析】(1) 根据中位线定理即可求出 $PM = PN$ ，利用等腰三角形的性质即可证明 $\angle PMN = \angle PNM$ ；

(2) 根据中位线定理即可求出 $\angle PNM = \angle F$ 和 $\angle PMN = \angle AEM$ ，通过第 (1) 问的结果进行等量代换即可证明 $\angle AEM = \angle F$ ；

(3) 根据中位线定理推出 $PM \parallel AD$ 和 $PN \parallel BC$ 从而求出 $\angle PNM = \angle PMN = \angle ANM = \angle CGN = \angle GNC = 60^\circ$ ，证明 $\triangle CGN$ 是等边三角形，利用中点求出 $\angle NGD = 30^\circ$ ，从而求出 $\angle DGC$ 度数，即可求证 $\triangle CGD$ 的形状.

【详解】证明：(1) $\because P$ 的中点， M 是 AB 的中点，



$$\therefore PM = \frac{1}{2} AD.$$

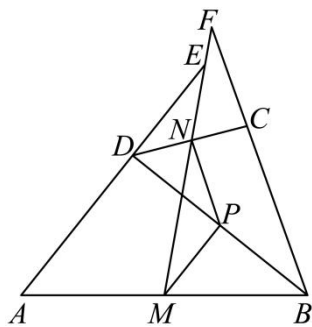
$$\text{同理, } PN = \frac{1}{2} BC.$$

$$\because AD = BC,$$

$$\therefore PM = PN.$$

$$\therefore \angle PMN = \angle PNM.$$

(2) $\because P$ 的中点， M 是 AB 的中点，



$$\therefore PN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle PNM = \angle F.$$

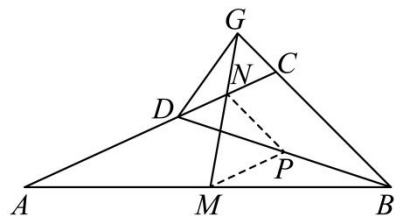
同理, $\angle PMN = \angle AEM$.

由 (1) 可知 $\angle PMN = \angle PNM$,

$\therefore \angle AEM = \angle F$.

(3) $\triangle CGD$ 是直角三角形, 证明如下:

如图, 取 BD 的中点 P , 连接 PM , PN ,



M 是 AB 的中点,

$\therefore PM \parallel AD$, $PM = \frac{1}{2}AD$.

同理, $PN \parallel BC$, $PN = \frac{1}{2}BC$.

$\because AD = BC$,

$\therefore PM = PN$.

$\therefore \angle PMN = \angle PNM$.

$\because PM \parallel AD$,

$\therefore \angle PMN = \angle ANM = 60^\circ$,

$\therefore \angle PNM = \angle PMN = 60^\circ$.

$\because PN \parallel BC$,

$\therefore \angle CGN = \angle PNM = 60^\circ$.

又 $\because \angle CNG = \angle ANM = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CGN$ 是等边三角形,

$\therefore CN = GN$.

又 $\because CN = DN$,

$\therefore DN = GN$.

$\therefore \angle NDG = \angle NGD = 30^\circ$,

$\therefore \angle CGD = \angle CGN + \angle NGD = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$.

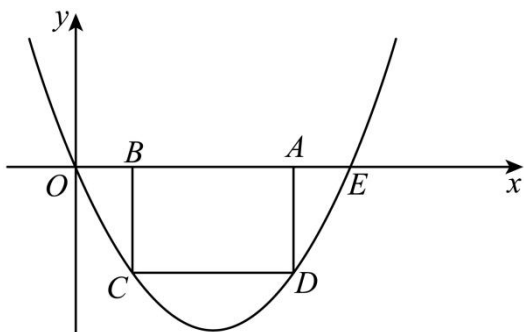
$\therefore \triangle CGD$ 是直角三角形.

故答案为: $\triangle CGD$ 是直角三角形.

【点睛】 本题考查了三角形的中位线定理, 等腰三角形的性质, 等边三角形的性质以及直角三角形的判定,

解题的关键在于灵活运用中位线定理.

25. 如图, 抛物线过点 $O(0,0)$, $E(10,0)$, 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在线段 OE 上 (点 B 在点 A 的左侧), 点 C, D 在抛物线上, 设 $B(t,0)$, 当 $t=2$ 时, $BC=4$.



- (1) 求抛物线的函数表达式;
- (2) 当 t 为何值时, 矩形 $ABCD$ 的周长有最大值? 最大值是多少?
- (3) 保持 $t=2$ 时的矩形 $ABCD$ 不动, 向右平移抛物线, 当平移后的抛物线与矩形的边有两个交点 G, H , 且直线 GH 平分矩形 $ABCD$ 的面积时, 求抛物线平移的距离.

【答案】 (1) $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x$

(2) 当 $t=1$ 时, 矩形 $ABCD$ 的周长有最大值, 最大值为 $\frac{41}{2}$

(3) 4

【解析】

【分析】 (1) 设抛物线的函数表达式为 $y = ax(x-10)$ ($a \neq 0$), 求出点 C 的坐标, 将点 C 的坐标代入即可求出该抛物线的函数表达式;

(2) 由抛物线的对称性得 $AE = OB = t$, 则 $AB = 10 - 2t$, 再得出 $BC = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t$, 根据矩形的周长公式, 列出矩形周长的表达式, 并将其化为顶点式, 即可求解;

(3) 连接 AC , BD 相交于点 P , 连接 OC , 取 OC 的中点 Q , 连接 PQ , 根据矩形的性质和平移的性质推出四边形 $OCHG$ 是平行四边形, 则 $PQ = CH$, $PQ = \frac{1}{2}OA$. 求出 $t=2$ 时, 点 A 的坐标为 $(8,0)$, 则 $CH = \frac{1}{2}OA = 4$, 即可得出结论.

【小问 1 详解】

解: 设抛物线的函数表达式为 $y = ax(x-10)$ ($a \neq 0$).

$\because$ 当 $t=2$ 时, $BC=4$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(2, -4)$.

将点 C 坐标代入表达式，得 $2a(2-10)=-4$ ，

解得 $a=\frac{1}{4}$ 。

$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{2}x$ 。

【小问 2 详解】

解：由抛物线的对称性得： $AE=OB=t$ ，

$\therefore AB=10-2t$ 。

当 $x=t$ 时， $BC=-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t$ 。

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的周长为

$$2(AB+BC)=2\left[(10-2t)+\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{5}{2}t\right)\right]$$

$$=-\frac{1}{2}t^2+t+20$$

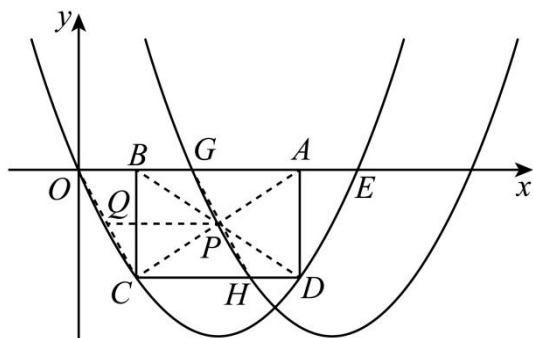
$$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{41}{2}。$$

$$\because -\frac{1}{2}<0，$$

$\therefore$ 当 $t=1$ 时，矩形 $ABCD$ 的周长有最大值，最大值为 $\frac{41}{2}$ 。

【小问 3 详解】

解：连接 AC ， BD 相交于点 P ，连接 OC ，取 OC 的中点 Q ，连接 PQ 。



$\because$ 直线 GH 平分矩形 $ABCD$ 的面积，

$\therefore$ 直线 GH 过点 P 。

由平移的性质可知，四边形 $OCHG$ 是平行四边形，

$\therefore PQ=CH$ 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

$\therefore P$ 是 AC 的中点。

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}OA.$$

当 $t = 2$ 时，点 A 的坐标为 $(8, 0)$ ，

$$\therefore CH = \frac{1}{2}OA = 4.$$

$\therefore$ 抛物线平移的距离是 4.

【点睛】 本题主要考查了求二次函数的解析式，二次函数的图象和性质，矩形的性质，平移的性质，解题的关键是掌握用待定系数法求解二次函数表达式的方法和步骤，二次函数图象上点的坐标特征，矩形的性质，以及平移的性质.

